

输入受限的混沌系统同步控制*

谢林柏[†] 周志刚 张正道

(江南大学, 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 无锡 214122)

(2013年5月23日收到; 2013年6月24日收到修改稿)

在混沌系统的同步控制中, 由于混沌系统对初始状态的敏感性, 一旦两个混沌系统的状态初值偏差大, 其状态同步往往需要高幅值的控制律来达到, 这给同步控制实现带来了困难, 并且在同步控制中, 两个混沌系统的初始值通常是未知的. 本文考虑控制输入受限情况下的混沌同步控制问题, 基于符号函数的近似表示式, 将受限的控制输入建模为连续可微的光滑函数, 在每一个采样点将同步控制误差系统近似为局部最优线性模型并设计连续型线性二次型调节器 (LQR) 最优控制律. 为降低混沌同步控制律的幅值和维持同步系统采样时刻之间的动态, 设计了等价的离散最优控制律, 并通过调整 LQR 性能加权矩阵值, 确保同步控制信号不会超出其受限的上界. 最后对统一混沌模型下的三种不同混沌系统同步控制进行了仿真研究. 仿真结果验证了方法的有效性.

关键词: 统一混沌模型, 符号函数, 输入受限, 同步控制

PACS: 87.19.lr, 95.10.Fh, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.188702

1 引言

近年来, 混沌系统的同步控制是非线性控制领域的研究热点之一^[1-11]. 由于混沌系统对于其初始状态值非常敏感, 微小的初值改变往往会引起混沌系统状态轨线形状及其稳定性的剧烈波动, 这使得混沌系统的同步控制变得困难. 在混沌系统同步控制研究中, Ott 等^[12] 首先提出了混沌系统的 OGY 控制策略. Pecora 和 Carroll^[13] 提出了“混沌同步”的概念并实现了同一信号驱动下两个耦合混沌系统的状态同步. 随着现代控制理论的发展, 研究者们提出了一系列新的同步控制方法, 如滑模控制方法^[2,3]、基于 PI^α 控制器的方法^[4]、鲁棒自适应模糊控制^[5]、自适应 H_∞ 反馈控制方法^[7]、神经网络方法^[8]、基于状态观测的方法^[9]、单变量反馈控制方法^[10,11] 以及线性化方法^[14] 等. 与此同时, 混沌系统在保密通信和信息处理等领域也引起了越来越多的关注^[15-21].

在已有的混沌同步控制方法研究中, 很少考虑同步控制输入受限的问题. 由于实际中混沌系统的初始状态往往是未知的, 因此一旦两个混沌系统初

始状态值偏差稍大, 其状态同步的实现往往需要高幅值或高增益的控制律来达到, 这有可能使得控制器或执行器处于饱和和工作状态, 甚至会损坏系统的元器件, 给混沌系统的同步控制实现带来困难. 因此, 研究输入受限情形下的混沌同步控制问题具有重要的现实意义.

本文考虑在控制输入受限情形下, 研究混沌系统的同步控制问题. 针对输入的受限约束式, 采用连续可微的 $\text{sign}_l(\bullet)$ 函数来近似表示, 将混沌同步控制误差系统建模为具有连续可微特性的非线性系统. 利用局部最优线性化方法, 将误差系统在每一个采样点上近似为最优线性模型, 并针对此模型设计了线性二次型调节器 (LQR) 最优控制律. 为了降低同步控制律的幅值大小, 避免控制输入饱和, 采用了两个方法: 一是对所设计的连续型 LQR 最优控制律, 利用等价离散化的方法设计了其离散最优控制律, 不仅可以降低控制律的幅值, 而且保证了同步采样控制系统的状态在采样点之间的动态拟合于其连续控制系统的动态特性; 二是通过调整 LQR 性能指标的加权矩阵, 避免控制输入进入饱和区域. 最后对统一形式表述的混沌系统同步控制进

* 国家自然科学基金 (批准号: 60804013, 61374047) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xielb.sp@gmail.com

行了仿真验证.

2 混沌系统同步控制模型

文献 [1] 中采用如下的一组动态方程组表示了 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统三种不同混沌系统的统一模型.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = (25\alpha + 10)(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = (28 - 35\alpha)x(t) - x(t)z(t) \\ \quad + (29\alpha - 1)y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - \frac{8 + \alpha}{3}z(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 为状态变量, $\alpha \in [0, 1]$ 为系统参数. 三种不同的混沌系统模型由参数 α 进行区分: 当 $0 \leq \alpha < 0.8$ 时, 方程组 (1) 表示的是 Lorenz 系统; 当 $\alpha = 0.8$ 时, 表示的是 Lü 系统模型; 当 $0.8 < \alpha \leq 1$ 时, 为广义 Chen 系统. 假设混沌同步控制中主系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = (25\alpha + 10)(y_m(t) - x_m(t)), \\ \dot{y}_m(t) = (28 - 35\alpha)x_m(t) - x_m(t)z_m(t) \\ \quad + (29\alpha - 1)y_m(t), \\ \dot{z}_m(t) = x_m(t)y_m(t) - \frac{8 + \alpha}{3}z_m(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中, $x_m(t)$, $y_m(t)$ 和 $z_m(t)$ 表示主系统的三个状态. 类似地, 从系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = (25\alpha + 10)(y_s(t) - x_s(t)), \\ \dot{y}_s(t) = (28 - 35\alpha)x_s(t) - x_s(t)z_s(t) \\ \quad + (29\alpha - 1)y_s(t) + u(t), \\ \dot{z}_s(t) = x_s(t)y_s(t) - \frac{8 + \alpha}{3}z_s(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中, $x_s(t)$, $y_s(t)$ 和 $z_s(t)$ 为从系统的状态, 模型 (3) 式中包含了标量控制 $u(t)$, 即控制作用施加在变量 $y_s(t)$ 的动态过程上. 令状态误差为

$$\begin{cases} e_1(t) = x_s(t) - x_m(t), \\ e_2(t) = y_s(t) - y_m(t), \\ e_3(t) = z_s(t) - z_m(t), \end{cases} \quad (4)$$

则从模型 (2) 和 (3) 式可得到同步控制误差模型

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = (25\alpha + 10)(e_2(t) - e_1(t)), \\ \dot{e}_2(t) = -x_s(t)e_3(t) - z_m(t)e_1(t) \\ \quad + (28 - 35\alpha)e_1(t) \\ \quad + (29\alpha - 1)e_2(t) + u(t), \\ \dot{e}_3(t) = x_s(t)e_2(t) + y_m(t)e_1(t) \\ \quad - \frac{8 + \alpha}{3}e_3(t). \end{cases} \quad (5)$$

假设在模型 (5) 式中, 主、从系统的状态都可以检测, 因此主系统的状态变量 $x_m(t)$, $y_m(t)$ 和 $z_m(t)$ 为已知量, 故 (5) 式可进一步转化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = (25\alpha + 10)(e_2(t) - e_1(t)), \\ \dot{e}_2(t) = -e_1(t)e_3(t) - x_m(t)e_3(t) - z_m(t)e_1(t) \\ \quad + (28 - 35\alpha)e_1(t) \\ \quad + (29\alpha - 1)e_2(t) + u(t), \\ \dot{e}_3(t) = e_1(t)e_2(t) + x_m(t)e_2(t) + y_m(t)e_1(t) \\ \quad - \frac{8 + \alpha}{3}e_3(t). \end{cases} \quad (6)$$

在混沌系统同步控制中, 由于主、从系统的状态初始值往往是未知的, 小的状态偏差通常需要设计高幅值的控制律来同步, 因此在同步控制误差模型 (6) 式中控制量 $u(t)$ 可能会受到约束, 如饱和和约束条件:

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max} & u(t) \geq U_{\max} \\ u(t) & U_{\min} < u(t) < U_{\max} \\ U_{\min} & u(t) \leq U_{\min} \end{cases}, \quad (7)$$

其中 U_{\max} 和 U_{\min} 分别为控制输入的上、下限, 假设有 $U_{\max} = -U_{\min}$. 因此, 输入受限下的混沌系统同步控制目标即为: 在控制输入满足约束条件 (7) 式时, 设计控制律 $u(t)$ 使得同步误差系统 (6) 式稳定.

3 模型线性化

同步控制误差模型 (6) 式是一个非线性模型, 且控制输入存在约束条件 (7) 式时, 系统输入函数不连续, 给非线性系统的同步控制律设计带来了困难. 为得到连续可微的非线性模型, 采用如下的 $\text{sign}_l(\bullet)$ 函数 [22]

$$\text{sign}_l(x) = \frac{(a+x)^l - (a-x)^l}{(a+x)^l + (a-x)^l},$$

$$a > 0, \quad l > 0 \text{ 且为偶数} \quad (8)$$

来近似表示控制输入的约束式 $|u(t)| \leq U_{\max}$, 即 $u(t) \approx U_{\max} \text{sign}_l(u(t))$. $\text{sign}_l(\bullet)$ 函数是符号函数 $\text{sign}(\bullet)$ 的近似函数, 有关 $\text{sign}_l(\bullet)$ 函数的特性详见文献 [22]. 典型的 $\text{sign}_l(\bullet)$ 函数输入输出曲线如图 1 所示. 将 $u(t) \approx U_{\max} \text{sign}_l(u(t))$ 带入同步控制误差系统 (6) 式可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1), \\ \dot{e}_2 = -e_1 e_3 - x_m e_3 - z_m e_1 + (28 - 35\alpha)e_1 \\ \quad + (29\alpha - 1)e_2 + U_{\max} \text{sign}_l(u(t)), \\ \dot{e}_3 = e_1 e_2 + x_m e_2 + y_m e_1 - \frac{8 + \alpha}{3} e_3. \end{cases} \quad (9)$$

对同步误差模型 (9), 其动态过程及控制输入均为非线性, 为便于控制律设计, 采用线性化的方法来获得动态过程及控制函数的局部最优线性模型. 将非线性系统模型 (9) 式表示为

$$\dot{e}(t) = f(e(t)) + Bh(u(t)), \quad (10)$$

其中误差状态向量 $e(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ e_3(t)]^T$, $f: R^3 \rightarrow R^3$, $B = [0 \ 1 \ 0]^T$, $h(u(t)) = U_{\max} \text{sign}_l(u(t))$ 为标量函数. 设 T 为系统采样周期, 则在第 j 个状态和控制输入的采样点 $e_j = e(jT)$ 和 $u_j = u(jT)$ 处, 得到模型 (10) 的局部最优线性模型为

$$\dot{e}(t) = A_j e(t) + B_j u(t), \quad (11)$$

其中 $A_j = [a_i^T]$, $i = 1, 2, 3$, $B_j = BS_j$ 为控制输入矩阵. A_j 和 S_j 满足

①当 $\|e_j\| \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} a_1^T &= [-(25\alpha + 10); (25\alpha + 10); 0], \\ a_2^T &= \left[28 - 35\alpha - e_{3j} - z_m + \frac{e_{3j}e_{1j}^2}{\|e_j\|_2^2}; \right. \\ &\quad \left. 29\alpha - 1 + \frac{e_{1j}e_{2j}e_{3j}}{\|e_j\|_2^2}; -e_{1j} - x_m + \frac{e_{1j}e_{3j}^2}{\|e_j\|_2^2} \right], \\ a_3^T &= \left[e_{2j} + y_m - \frac{e_{1j}^2 e_{2j}}{\|e_j\|_2^2}; e_{1j} + x_m - \frac{e_{1j}e_{2j}^2}{\|e_j\|_2^2}; \right. \\ &\quad \left. -\frac{8 + \alpha}{3} - \frac{e_{1j}e_{2j}e_{3j}}{\|e_j\|_2^2} \right], \end{aligned}$$

$$S_j = \frac{U_{\max} \text{sign}_l(u_j)}{u_j};$$

②当 $\|e_j\| = 0$ 时

$$a_1^T = [-(25\alpha + 10); (25\alpha + 10); 0],$$

$$a_2^T = [28 - 35\alpha - z_m; 29\alpha - 1; -x_m],$$

$$a_3^T = \left[y_m; x_m; -\frac{8 + \alpha}{3} \right],$$

$$S_j = \frac{U_{\max} \text{sign}_l(u_j)}{u_j};$$

其中, $e_j = e(jT) = [e_{1j} \ e_{2j} \ e_{3j}]^T$, $\text{sign}_l(u_j) = \frac{(a + u_j)^l - (a - u_j)^l}{(a + u_j)^l + (a - u_j)^l}$. 相关最优线性模型 (11) 式及 A_j 和 B_j 的推导计算过程见附录 I.

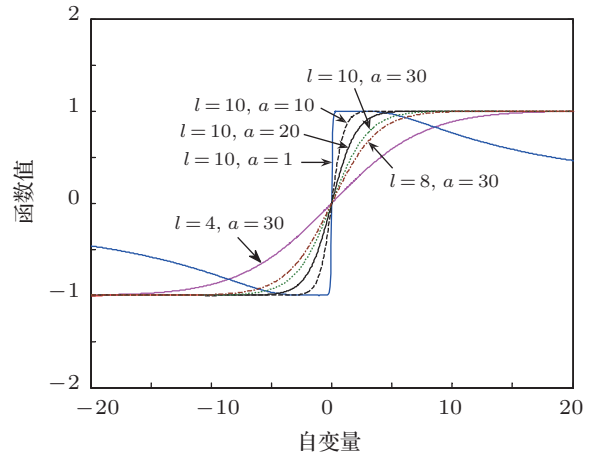


图 1 $\text{sign}_l(\bullet)$ 函数的输入输出特性

4 同步控制律设计

利用局部最优线性模型 (11) 式, 构造在第 j 个状态和控制输入采样点上的同步控制系统状态空间模型为

$$\begin{aligned} \dot{e}_c(t) &= A_j e_c(t) + B_j u_c(t), \\ y(t) &= C e_c(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中, A_j, B_j 同 (11) 式, $C = I_3$, 即输出为状态同步误差信号, 下标 c 表示连续信号. 采用如下的 LQR 最优二次型性能指标

$$J = \int_0^{\infty} \{ e_c^T(t) C^T Q C e_c(t) + u_c^T(t) R u_c(t) \} dt, \quad (13)$$

其中 $Q = Q^T \geq 0$ 和 $R = R^T > 0$ 为加权矩阵. 连续最优控制律设计为

$$u_c(t) = -K_c e_c(t), \quad (14)$$

其中 $K_c = R^{-1} B_j P_j$, $K_c \in R^{1 \times 3}$ 为状态反馈控制增益矩阵, P_j 为如下 Riccati 方程的解

$$\begin{aligned} A_j^T P_j + P_j A_j - P_j B_j R^{-1} B_j^T P_j \\ + C^T Q C = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

通常针对连续系统设计的增益矩阵 K_c 中的数值都较大^[23], 在形成状态反馈控制时容易达到其约束条件的上界而造成控制输入饱和, 而采用离散控制方式则可以减小控制信号幅值的大小^[24]. 因此为降低控制信号幅值, 基于状态匹配的原则设计 K_c 的等价离散控制律 $u_d(kT) = -K_d e_d(kT)$, 其中, $e_d(kT)$ 为与系统 (12) 式对应的采样控制系统 (16) 式的状态向量采样值, 即

$$\begin{aligned} \dot{e}_d(t) &= A_j e_d(t) + B_j u_d(t), \\ u_d(t) &= -K_d e_d(kT) \quad kT \leq t < kT + T, \end{aligned} \quad (16)$$

且 $K_d = (1 + K_c H_j)^{-1} K_c G_j$, $G_j = e^{A_j T}$, $H_j = (G_j - I_3) A_j^{-1} B_j$. 等价的离散控制增益 K_d 的推导过程见附录 II. 采用等价离散控制律 $u_d(kT)$, 不仅可以减小控制量的大小, 而且可以确保在 $u_d(t)$ 的控制作用下, 采样闭环控制系统 (16) 式的状态拟合于其连续的闭环控制系统 (12)—(14) 式的状态.

为进一步确保控制律 (16) 式不会进入其饱和区, 则必须在每个状态和控制输入的采样点上设计控制律时确保得到的控制信号满足约束条件 $U_{\min} < u_d(t) < U_{\max}$, $kT \leq t < kT + T$. 而由局部最优线性模型 (11) 式可知, 在模型的控制输入矩阵 $B_j = B S_j$ 中, S_j 在每一对采样点 (e_{cj}, u_{cj}) 上的值都可能不同, 并且在计算 S_j 中的函数值 $\text{sign}_l(u_{cj})$ 时控制信号 u_{cj} 尚未求解出来, 因此当前周期内的 S_j 无法算出. 考虑到本文的混沌同步系统的采样控制周期 T 取值较小, 因此可利用当前采样周期内的离散控制信号 $u_d(jT)$ 近似替代 u_{cj} 来计算 S_j . 即

$$S_j = \frac{U_{\max} \text{sign}_l(u_d(jT))}{u_d(jT)}. \quad (17)$$

此外, 为确保在每一个采样周期内设计的控制信号满足约束条件 (7) 式, 采用如下迭代算法来设计连续控制律 (14) 式及等价的离散控制律 (16) 式.

迭代同步控制算法步骤如下:

- 1) 确定加权矩阵 Q 和 R 的初始值, 设定 S_j 的初始值 $S_j = 1$;
- 2) 运用 (11) 式计算混沌同步误差系统的局部最优线性模型矩阵 A_j 和 B_j ;
- 3) 由 (14) 式计算 LQR 最优控制律得到连续控制增益 K_c ;
- 4) 由 (16) 式设计 K_c 的等价离散控制律 $u_d(jT)$;

5) 内循环:

①判断 $|u_d(jT)| > U_{\max}$ 是否成立, 成立则由 (17) 式计算出 S_j , 否则退出内循环并输出 $u_d(jT)$, 转至第 6) 步;

②更新加权矩阵 $R := S_j^{-1} R S_j^{-1}$, 由 (14) 式计算 LQR 最优控制律得到连续控制增益 K_c ;

③由 (16) 式设计 K_c 的等价离散控制律 $u_d(jT)$, 转至内循环的第①步;

6) 进入下一个采样周期, $j := j + 1$, 转至第 1) 步.

5 仿真实验

为验证本文所提方法的有效性, 对统一混沌模型 (1) 式中的三种不同混沌系统进行同步控制仿真验证. 考虑到模型 (1) 式代表了三个不同的混沌系统, 作为方法验证和方便起见, 在数字仿真中设定三种同步控制系统的控制输入的饱和和约束条件为

$$u(t) = \begin{cases} 120 & u(t) \geq 120 \\ u(t) & -120 < u(t) < 120 \\ -120 & u(t) \leq -120 \end{cases}, \quad (18)$$

仿真中设定系统 LQR 性能加权矩阵为 $Q = 10^4 I_3$, $R = 1$, 采样周期为 $T = 0.01$ s.

1) Lorenz 系统

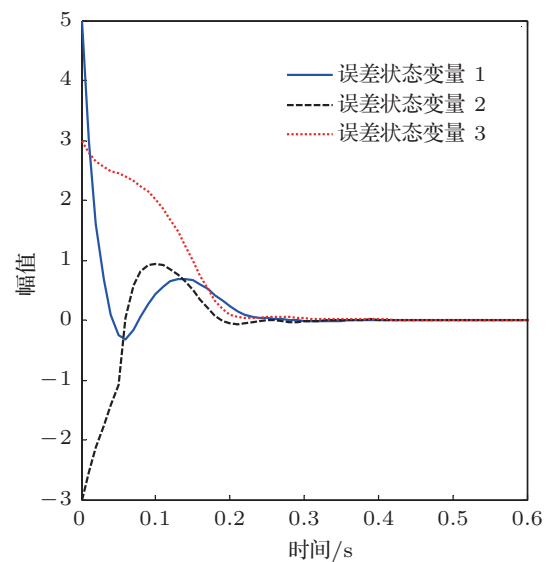
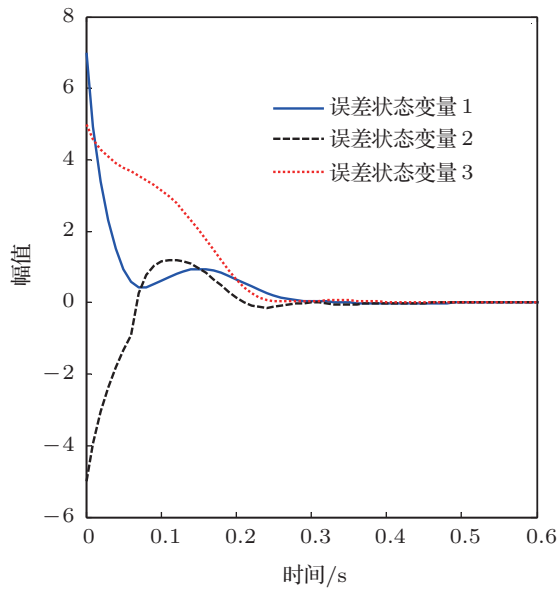
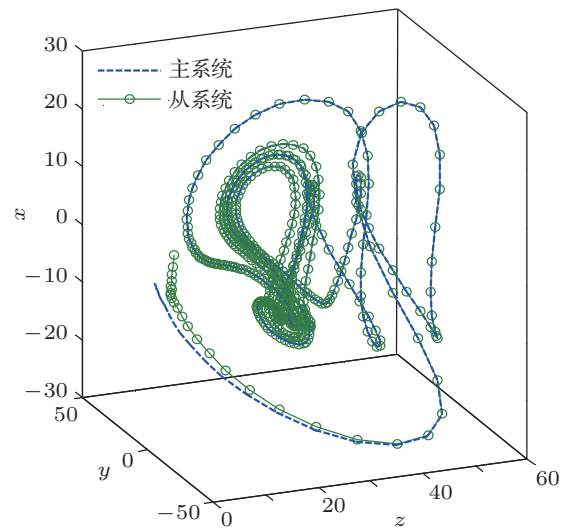
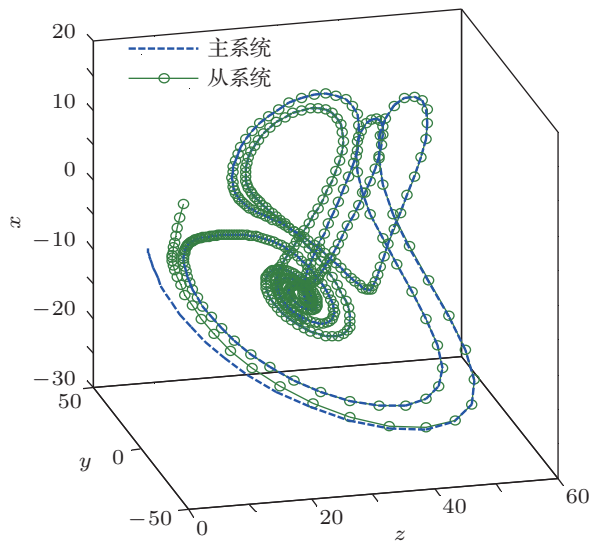
在系统模型 (1) 式中, 当 $\alpha = 0.4$ 时系统为 Lorenz 系统, 假设主、从系统的初始状态分别为 $[x_m, y_m, z_m]^T = [-1, -1, 1]^T$ 和 $[x_s, y_s, z_s]^T = [6, -6, 6]^T$, 运用迭代同步控制算法并仿真得到结果如图 2(a) 和 (b) 所示, 其中 e_1, e_2 和 e_3 分别为三个同步误差状态变量.

2) Lü 系统

在系统模型 (1) 式中, 当 $\alpha = 0.8$ 时系统为 Lü 系统, 假设主、从系统的初始状态分别为 $[x_m, y_m, z_m]^T = [-1, -1, 1]^T$ 和 $[x_s, y_s, z_s]^T = [4, -4, 4]^T$, 仿真结果如图 3(a) 和 (b) 所示.

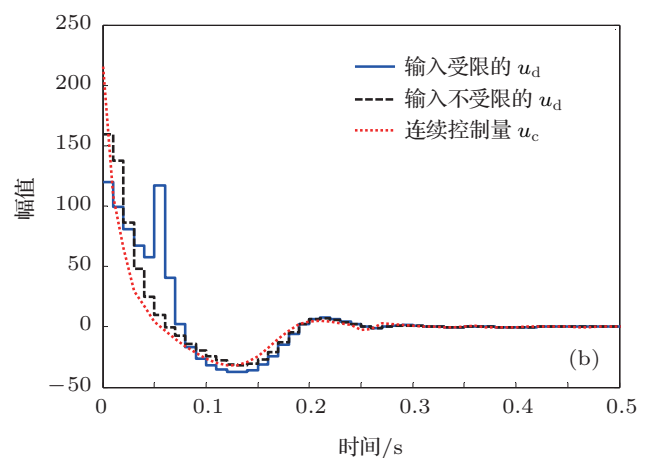
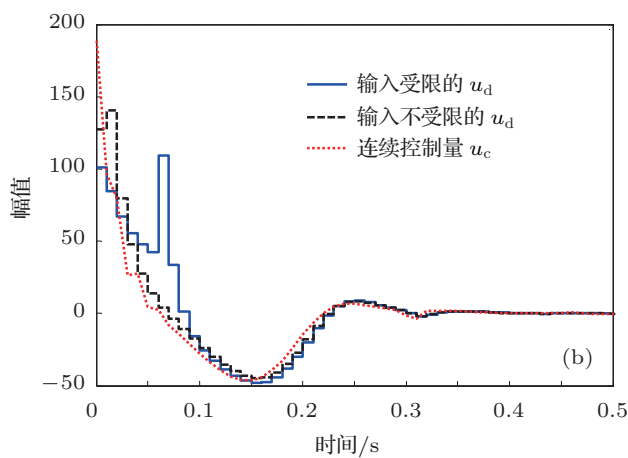
3) Chen 系统

在系统模型 (1) 式中, 当 $\alpha = 0.9$ 时系统为 Chen 系统, 设主、从系统的初始状态分别为 $[x_m, y_m, z_m]^T = [-1, -1, 1]^T$ 和 $[x_s, y_s, z_s]^T = [4, -4, 4]^T$, 仿真结果如图 4(a) 和 (b) 所示.



(a)

(a)



(b)

(b)

图2 (a) Lorenz 系统状态同步轨迹及误差曲线 ($\alpha = 0.4$);
(b) Lorenz 系统中的控制输入曲线 ($\alpha = 0.4$)

图3 (a) Lü系统状态同步轨迹及误差曲线 ($\alpha = 0.8$); (b) Lü系
统中的控制输入曲线 ($\alpha = 0.8$)

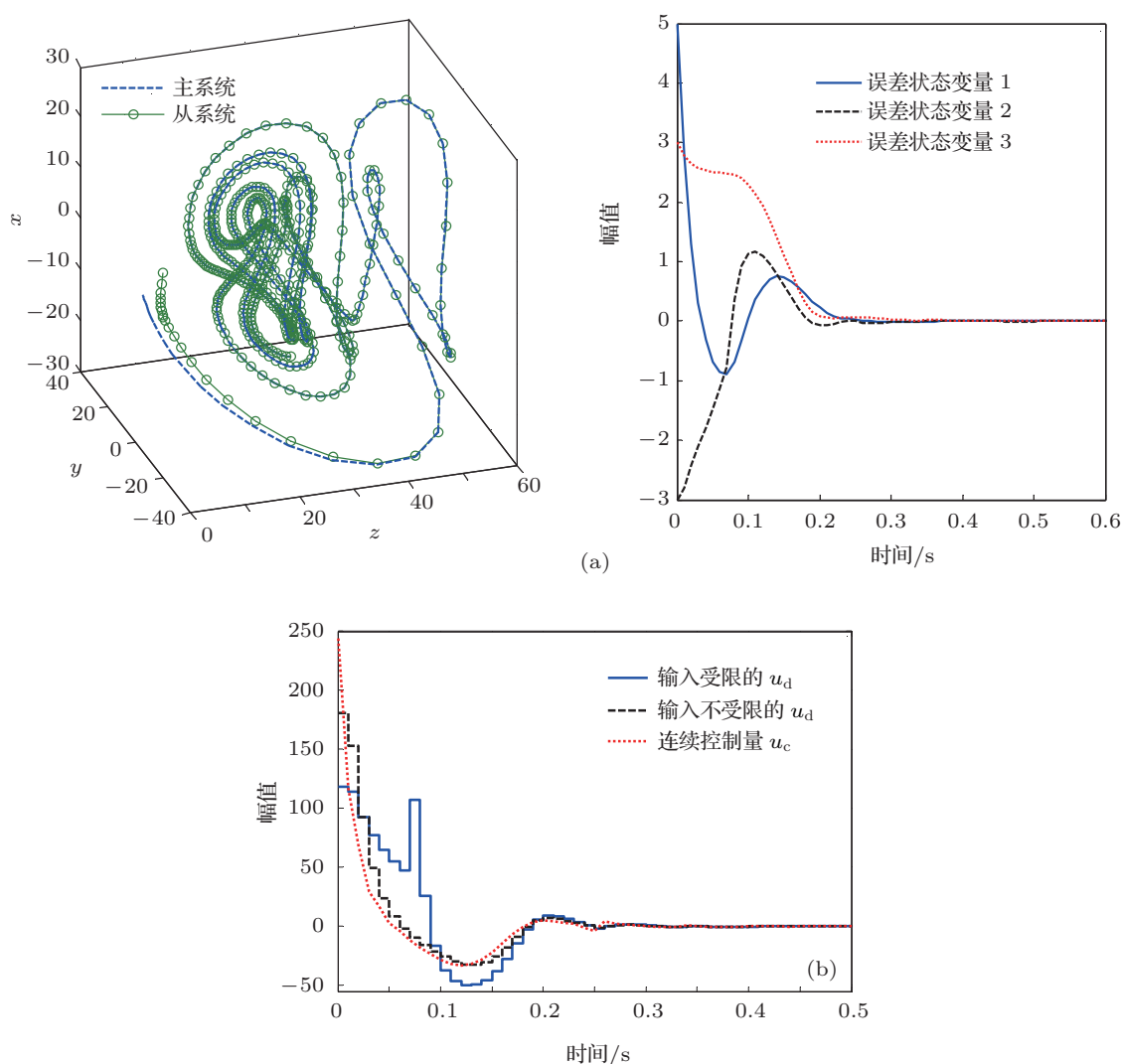


图4 (a) Chen 系统状态同步轨迹及误差曲线 ($\alpha = 0.9$); (b) Chen 系统中的控制输入曲线 ($\alpha = 0.9$)

从上述统一混沌模型中的三个混沌系统同步仿真研究可看出, 运用本文所提同步算法, 各主、从混沌系统在初始状态偏差较大的情形下能实现快速同步, 而同步效果的达到并没有以增大控制信号的幅值为代价, 如图 2(b), 图 3(b) 和图 4(b) 所示. 对比连续时间最优控制律 u_c 和采样控制律 u_d , 本文算法设计的受限采样控制律 u_d 的控制信号幅值被限制在饱和区的范围内, 并获得了较好的同步效果.

为分析不同的控制输入饱和约束值 U_{max} 对同步控制效果的影响, 在其他仿真参数不变的情形下分别取 U_{max} 为 120, 150 和 180, 得到各混沌同步系统中误差状态变量 e_1, e_2 和 e_3 收敛至误差范围 $\varepsilon = 0.01$ 内时所需的时间如表 1 所示. 从表 1 的结果可以看出, 不同的 U_{max} 值下各混沌同步系统状态收敛的速度不同, 但总的趋势是 U_{max} 越大, 收敛

时间越快, 即若允许施加的控制量越大, 从系统状态跟踪主系统状态所需的时间越短. 当 U_{max} 取 180 时, 状态收敛结果与采样控制输入 u_d 不受限的情形几乎相同.

表 1 不同 U_{max} 值对同步控制的影响 (误差 $\varepsilon = 0.01$)

系统	$U_{max} = 120$	$U_{max} = 150$	$U_{max} = 180$
Lorenz (e_1)	0.35 s	0.35 s	0.35 s
Lorenz (e_2)	0.30 s	0.22 s	0.22 s
Lorenz (e_3)	0.56 s	0.55 s	0.55 s
Lü (e_1)	0.29 s	0.29 s	0.29 s
Lü (e_2)	0.26 s	0.25 s	0.25 s
Lü (e_3)	0.42 s	0.42 s	0.42 s
Chen (e_1)	0.28 s	0.08 s	0.06 s
Chen (e_2)	0.25 s	0.25 s	0.25 s
Chen (e_3)	0.41 s	0.40 s	0.40 s

6 结论

本文针对具有输入饱和约束的混沌同步控制问题,提出了统一混沌系统的同步控制算法.利用符号函数近似表示式 $\text{sign}_l(\bullet)$ 函数的连续性,将饱和约束条件建模为连续可微的光滑函数,从而得到统一混沌系统的同步误差控制非线性模型.在此基础上,利用最优线性化方法在每一个采样点上得到同步误差非线性控制系统的局部最优线性模型,基于此线性模型设计了其连续型 LQR 最优控制律.为减小混沌同步控制量的幅值大小并维持连续/离散同步系统采样时刻之间的动态,对连续的最优控制律设计了等价的数字实现方法并通过调整 LQR 性能加权矩阵,确保同步控制信号幅值不会超出其受限的上界.仿真结果验证了方法的有效性.

附录 I 最优线性模型计算

设 (e_j, u_j) 为非线性系统 (10) 式在第 j 个采样周期上的状态和控制输入的采样点,其最优线性化模型即为

$$\dot{e}(t) = A_j e(t) + B_j u(t), \quad (\text{A1})$$

且在点 (e_j, u_j) 附近的邻域上系统满足

$$\begin{aligned} f(e(t)) + Bh(u(t)) &\approx A_j e(t) + B_j u(t), \\ f(e_j) + Bh(u_j) &= A_j e_j + B_j u_j, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

其中 $A_j = [a_i^T]$, $i = 1, 2, 3$, $B_j = BS_j$ 为控制输入矩阵.在原系统 (10) 式中,关于状态 $e(t)$ 和控制量 $u(t)$ 的函数均为非线性函数,故其最优线性化过程类似,以下以状态变量 $e(t)$ 为例说明.由于 a_i^T 为矩阵 A_j 的第 i 行行向量, $f_i: R^3 \rightarrow R$ 为 f 的第 i 行元素,对应于 (A2) 有

$$\begin{aligned} f_i(e(t)) &\approx a_i^T e(t), \\ f_i(e_j) &= a_i^T e_j \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

将 (A3) 中第一个等式左边在点 e_j 处进行 Taylor 展开有

$$f_i(e_j) + [\nabla f_i(e_j)]^T (e(t) - e_j) \approx a_i^T e(t). \quad (\text{A4})$$

考虑到 (A3) 中第二个等式,得

$$[\nabla f_i(e_j)]^T (e(t) - e_j) \approx a_i^T (e(t) - e_j), \quad (\text{A5})$$

其中 $e(t)$ 在 e_j 的邻域中取值.为求得参数 a_i^T , (A5) 式可转化为如下的凸优化问题

$$\begin{aligned} \min F &:= \frac{1}{2} \|\nabla f_i(e_j) - a_i\|_2^2 \\ \text{st. } a_i^T e_j &= f_i(e_j). \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

求解上述凸优化问题得

$$\begin{aligned} \nabla_{a_i} F + \lambda \nabla_{a_i} (a_i^T e_j - f_i(e_j)) &= 0, \\ f_i(e_j) &= a_i^T e_j, \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

其中 λ 为 Laplace 乘子,下标 a_i 表示对 a_i 求梯度,对 (A7) 式化简后可得

$$a_i - \nabla f_i(e_j) + \lambda e_j = 0. \quad (\text{A8})$$

当 $\|e_j\| \neq 0$ 时,可解得

$$\lambda = \frac{e_j^T \nabla f_i(e_j) - f_i(e_j)}{\|e_j\|_2^2}, \quad (\text{A9})$$

代入 (A8) 式得

$$a_i = \nabla f_i(e_j) - \frac{e_j^T \nabla f_i(e_j) - f_i(e_j)}{\|e_j\|_2^2} e_j. \quad (\text{A10})$$

对控制变量 $u(t)$ 实施类似的线性化过程并将误差系统 (9) 式的参数代入可得 (11) 式的最优线性模型.

附录 II 等价离散控制律增益计算

由同步误差线性化系统 (12) 式可得闭环连续控制系统为

$$\dot{e}_c(t) = A_j e_c(t) + B_j (-K_c e_c(t)), \quad (\text{A11})$$

其中 $u_c(t) = -K_c e_c(t)$ 为设计的连续控制律.与系统 (A11) 式对应的闭环采样控制系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_d(t) &= A_j e_d(t) + B_j (-K_d e_d(kT)), \\ kT \leq t < kT + T, \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

其中 $u_d(t) = -K_d e_d(kT)$ 为待求的采样控制律.为了从连续控制律 $u_c(t) = -K_c e_c(t)$ 中得到采样控制律 $u_d(t) = -K_d e_d(kT)$ 并使得闭环采样控制系统 (A12) 式的状态拟合于闭环连续控制系统 (A11) 式的状态,分别将系统 (A11) 和 (A12) 式求解,得到

$$\begin{aligned} e_c(t_v) &= \exp(A_j(t_v - kT)) e_c(kT) \\ &\quad + \int_{kT}^{t_v} \exp(A_j(t_v - \tau)) B_j u_c(\tau) d\tau, \quad (\text{A13}) \\ e_d(t_v) &= \exp(A_j(t_v - kT)) e_d(kT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{kT}^{t_v} \exp(\mathbf{A}_j(t_v - \tau)) \\
 & \times \mathbf{B}_j d\tau \cdot u_d(kT), \quad (\text{A14})
 \end{aligned}$$

其中 $t = t_v = (k + v)T$, $0 \leq v \leq 1$, $\exp(\mathbf{A}_j(t_v - kT)) = e^{\mathbf{A}_j(t_v - kT)}$. 考虑到 $u_c(t)$ 在第 j 个采样周期内为常值, 则解 (A13) 式进一步表为

$$e_c(t_v) = \mathbf{G}_j^{(v)} e_c(kT) + \mathbf{H}_j^{(v)} u_c(t_v), \quad (\text{A15})$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_j^{(v)} &= \exp(\mathbf{A}_j(t_v - kT)) \\
 &= \exp(\mathbf{A}_j v T) = (\exp(\mathbf{A}_j T))^v = (\mathbf{G}_j)^v, \\
 \mathbf{H}_j^{(v)} &= \int_{kT}^{t_v} \exp(\mathbf{A}_j(t_v - \tau)) \mathbf{B}_j d\tau \\
 &= \int_0^{vT} \exp(\mathbf{A}_j \tau) \mathbf{B}_j d\tau = (\mathbf{G}_j^{(v)} - \mathbf{I}_3) \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{B}_j.
 \end{aligned}$$

类似地, 闭环采样控制系统的解 (A14) 可表示为

$$e_d(t_v) = \mathbf{G}_j^{(v)} e_d(kT) + \mathbf{H}_j^{(v)} u_d(kT). \quad (\text{A16})$$

由 (A15) 和 (A16) 式可知, 若 $e_c(kT) = e_d(kT)$, 要确保 $e_c(t_v) = e_d(t_v)$, 即在采样点之间系统 (A12) 与系统 (A11) 式的状态拟合, 则必须使

$$u_d(kT) = u_c(t_v) = -\mathbf{K}_c e_c(t_v) = -\mathbf{K}_c e_d(t_v). \quad (\text{A17})$$

将 (A16) 式代入 (A17) 式并求解出 $u_d(kT)$ 得到

$$u_d(kT) = -(1 + \mathbf{K}_c \mathbf{H}_j^{(v)})^{-1} \mathbf{K}_c \mathbf{G}_j^{(v)} e_d(kT). \quad (\text{A18})$$

当 $v = 1$ 时就可得到 (16) 式的一步预测离散控制律增益值

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_d &= (1 + \mathbf{K}_c \mathbf{H}_j)^{-1} \mathbf{K}_c \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{G}_j = e^{\mathbf{A}_j T}, \\
 \mathbf{H}_j &= (\mathbf{G}_j - \mathbf{I}_3) \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{B}_j.
 \end{aligned}$$

-
- [1] Zribi M, Smaoui N, Salim H 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 3197
 - [2] Huang L L, Qi X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 080507 (in Chinese) [黄丽莲, 齐雪 2013 物理学报 **62** 080507]
 - [3] Qi D L, Wang Q, Yang J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100505
 - [4] Chen Z W, Wang J, Pang S J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220505 (in Chinese) [陈志旺, 王敬, 庞双杰 2012 物理学报 **61** 220505]
 - [5] Che Y Q, Wang J, Chan W L, Tsang K M 2010 *Nonlinear Dyn.* **61** 847
 - [6] Zang H Y, Min L Q, Zhao Q, Chen G R 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 040502
 - [7] Fu S H, Lu Q S, Du Y 2012 *Chin. Phys. B* **6** 060507
 - [8] Li H Y, Hu Y A, Ren J C, Zhu M, Liu L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 140502 (in Chinese) [李海燕, 胡云安, 任建存, 朱敏, 刘亮 2012 物理学报 **61** 140502]
 - [9] Shan L, Li J, Wang Z Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3950 (in Chinese) [单梁, 李军, 王执铨 2006 物理学报 **55** 3950]
 - [10] Li C B, Chen S, Zhu H Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2255 (in Chinese) [李春彪, 陈谟, 朱焕强 2009 物理学报 **58** 2255]
 - [11] Li S H, Cai H X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1687 (in Chinese) [李世华, 蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687]
 - [12] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
 - [13] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 - [14] Guo S M, Shieh L S, Lin C F, Chandra J 2001 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **11** 1079
 - [15] Azzaz M S, Tanougast C, Sadoudi S, Bouridance A 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** 2035
 - [16] Ali S Z, Islam M K, Zafrullah M 2012 *Optimal Rev.* **19** 320
 - [17] Wei Y, Fan L, Xia G Q, Chen Y L, Wu Z M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 224203 (in Chinese) [魏月, 樊利, 夏光琼, 陈于淋, 吴正茂 2012 物理学报 **61** 224203]
 - [18] Luo C, Wang X Y 2013 *Int. J. Mod. Phys. C* **24** 1350025
 - [19] Wang X Y, Zhang N, Ren X L, Zhang Y L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 020507
 - [20] Zhu F L 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **40** 2384
 - [21] Bouraoui H, Kemih K 2013 *Acta Phys. Pol. A* **123** 259
 - [22] Shieh L S, Tsay Y T, Yates R 1983 *IEEE Proc. Cont. Th. App. Part D* **130** 111
 - [23] Chen Y S, Tsai J S H, Shieh L S, Kung F C 2002 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **49** 1860
 - [24] Xie L B, Ozkul S, Sawant M, Shieh L S, Tsai J S H 2012 *Int. J. Syst. Sci.* 752546

Synchronization of chaotic systems with input constraint*

Xie Lin-Bo[†] Zhou Zhi-Gang Zhang Zheng-Dao

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education) Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

(Received 23 May 2013; revised manuscript received 24 June 2013)

Abstract

It is well known that the dynamics of the chaotic system is very sensitive to the initial conditions of the state, and the synchronization of two identical chaotic systems is only obtained, in general, with the high gain control law once their initial conditions are in a certain large deviation. Furthermore, the initial conditions are commonly unknown in practice, which causes difficulty in synchronizing two chaotic systems. This paper deals with the synchronization of two unified chaotic systems with input constraint. First, the scalar sign function is utilized to approximate the constrained non-smooth input function so that a continuous smooth nonlinear input function and an approximated nonlinear synchronized error system are obtained. Then, an optimal linear quadratic regulator (LQR) continuous-time control law is designed based on the optimal linear model, which is constructed at the sampled operating point of the afore-mentioned approximated nonlinear synchronized error system. To reduce the high magnitude of the obtained control law, the continuous-time control law is digitally redesigned for the implementation and an iterative procedure is proposed to adjust the weighting matrices in the LQR performance index so as to avoid input saturation occurs. Finally, three illustrative examples of the Lorenz, the Chen and the Lü chaotic systems decomposed from the unified chaotic system are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: unified chaotic system, sign function, input constraint, synchronization control

PACS: 87.19.lr, 95.10.Fh, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.188702

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60804013, 61374047).

[†] Corresponding author. E-mail: xielb.sp@gmail.com