

## 一种最简的并行忆阻器混沌系统\*

许碧荣†

(武夷学院机电工程学院, 武夷山 354300)

(2013年6月7日收到; 2013年6月19日收到修改稿)

在提出的一种压控忆阻器的基础上, 构造了最简的并联忆阻器混沌系统, 分析其动力学特性, 得到了该系统的 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数, 给出了时域波形、相图、Lyapunov 指数谱、分岔图、Poincaré 映射等. 利用 EWB 软件设计了该新混沌系统的振荡电路并进行了仿真实验. 研究表明, 忆阻器的  $i-v$  特性在参数的变化时, 并不保持斜“8”字形, 会变为带尾巴的扇形. 该混沌系统与磁控忆阻器混沌系统不同, 系统只有一个平衡点, 初始条件在系统能振荡的情况下不影响系统状态. 电路实验仿真结果和数值仿真具有很好的一致性, 证实了该系统的存在性和物理上可实现性.

**关键词:** 忆阻器, 混沌电路, 并联, 动力学行为

**PACS:** 05.45.Ac, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.190506

## 1 引言

忆阻器 (memristor) 是电路中的四个基本元件之一, 是与广为大家熟知的电阻、电容、电感相并列的第四种电路元件, 是 Chua(蔡少棠) 于 1971 年提出的<sup>[1]</sup>, 并且在 1976 年建立了忆阻器件与系统理论<sup>[2]</sup>. 但是, 这之后 30 多年, 忆阻器并没得到重视, 自 2008 年忆阻器实现性报道后<sup>[3,4]</sup>, 人们才在忆阻器的物理实现<sup>[5,6]</sup>、基本电路特性分析<sup>[7,8]</sup> 和应用电路设计<sup>[9-15]</sup> 等方面开展研究工作, 并取得一定成绩.

忆阻器是一个非线性元件, 很容易实现混沌信号的产生. 因此基于忆阻器构造混沌电路得到了研究人员的极大关注<sup>[11-15]</sup>. Itoh 和 Chua 采用一个具有单调上升且分段线性特性曲线的忆阻器替换蔡氏振荡器中的蔡氏二极管, 导出了两类基于忆阻器的混沌振荡电路<sup>[11]</sup>. 随后, 出现了多种不同结构的忆阻器混沌振荡电路, 有一个忆阻器的混沌电路<sup>[12-14]</sup>, 还有两个忆阻器的混沌电路<sup>[15]</sup>, 而且, 不仅有整数阶的忆阻器混沌电路<sup>[12,14,15]</sup>, 还有分数阶的忆阻器混沌电路<sup>[13]</sup>. 忆阻器混沌电路可以通过

增加电路元件采用不同结构构造日益复杂的电路, 但是, 最简的忆阻器混沌系统是怎样, 有多简单呢? 这是忆阻器混沌系统研究的另一思路, 它拓宽了人们对忆阻器混沌系统的认识, 同时为基于忆阻器的混沌通信和混沌密码的电路实现, 提供最简的混沌电路形式. 2010 年, Muthuswamy 和蔡少棠设计了由电容、电感和忆阻器三个元件串联的最简忆阻器混沌电路<sup>[13]</sup>. 由于串联和并联是电路连接的两种基本形式, 那么, 就有了对应的问题, 能否由电容、电感和忆阻器并联构造出最简的忆阻器混沌电路? 为此, 本文提出了一种合理的忆阻器, 并在此基础上构造出最简的并联忆阻器混沌电路, 对其动力学进行基本分析, 然后, 利用 EWB 软件建立系统的电路模型并进行仿真.

## 2 最简的并行忆阻器混沌系统模型

## 2.1 忆阻器

忆阻器是蔡少棠根据电路元件端口变量间关系的结构完整性, 提出了存在直接关联电荷和磁链的第四类基本的无源电路元件. 此后, 蔡少棠等在

\* 福建省自然科学基金(批准号: 2012D127)和福建省教育厅科技项目(批准号: JA11264)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xubirong1@163.com

文献 [2] 将忆阻器的概念进行拓展, 定义为

$$y(t) = g(z, u, t)u(t), \quad \frac{dz}{dt} = f(z, u, t), \quad (1)$$

其中  $u(t)$ ,  $y(t)$  分别为忆阻器的输入信号和输出信号,  $z$  为系统的状态参量,  $f(\cdot)$  是连续  $n$  维的矢量函数,  $g(\cdot)$  是连续  $n$  维的标量函数, 且  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  均与具体器件有关. 忆阻器的输入信号  $u(t)$  和输出信号  $y(t)$  可取电荷、电流、电压和磁通中的一种, 当输入信号  $u(t)$  取电荷, 称其为电荷控制型忆阻器, 当输入信号  $u(t)$  取电流, 则称其为电流控制型忆阻器, 类似的, 还有电压控制型忆阻器和磁通控制型忆阻器.

为了实现最简的并联忆阻器混沌电路, 在此选用了非时变的电压控制型忆阻器. 根据上面忆阻器的定义, 将其表示为

$$i_M = G(z, v_M)v_M(t), \quad \frac{dx}{dt} = f(z, v_M). \quad (2)$$

在取  $G(z, v_M) = -c(1 + z - z^2)$ ,  $f(z, v_M) = -kc(v_M + 4z - 2v_Mz + 2v_Mz^2)$  之后, 所采用的忆阻器就表示为

$$i_M = -c(1 + z - z^2)v_M, \quad \frac{dz}{dt} = -kc(v_M + 4z - 2v_Mz + 2v_Mz^2). \quad (3)$$

该忆阻器的电导  $G$  受状态参量  $z$  的影响, 不受忆阻器两端电压  $v_M$  的影响, 在  $c = 0.5$ ,  $k = 1$  时, 电导  $G(z)$  与  $z$  的关系如图 1 所示, 图像呈现非线性, 是关于  $z = 0.5$  轴对称下凸的曲线, 反映了忆阻器的非线性动力学特性.

## 2.2 最简并行忆阻器混沌系统模型的建立

利用上述的忆阻器, 便可建立如图 2 所示的最简并行忆阻器混沌系统模型.

根据基尔霍夫定律和元件的电压电流之间的关系, 可得如下的电路的动态方程:

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}v_C, \\ \frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C}[-i_L + c(1 + z - z^2)v_C], \\ \frac{dz}{dt} &= -kc(v_C + 4z - 2v_Cz + 2v_Cz^2). \end{aligned} \quad (4)$$

若令  $i_L = x$ ,  $v_C = y$ ,  $\frac{1}{L} = ak$ ,  $\frac{1}{C} = bk$ , 则方程 (4) 可表示为

$$\frac{dx}{dt} = kay,$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= kb[-x + c(1 + z - z^2)y], \\ \frac{dz}{dt} &= -kc(y + 4z - 2yz + 2yz^2), \end{aligned} \quad (5)$$

其中系数  $k$  的引入是为了电路系统容易实现, 利用系统的电容和电感值成比例变化来改变电路的时间常数, 从而改变系统的振荡频率. 下面对系统分析时, 采用的是  $k = 1$ .

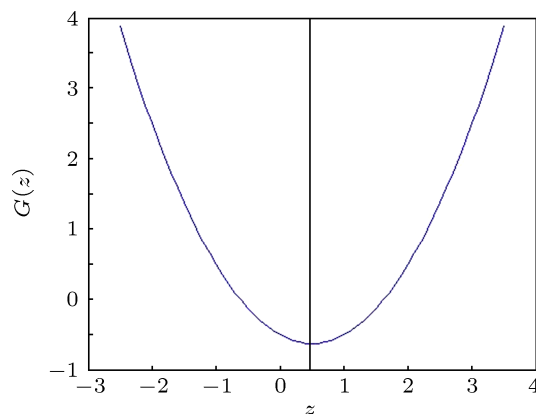


图 1 电导  $G(z)$  与状态参量  $z$  的关系

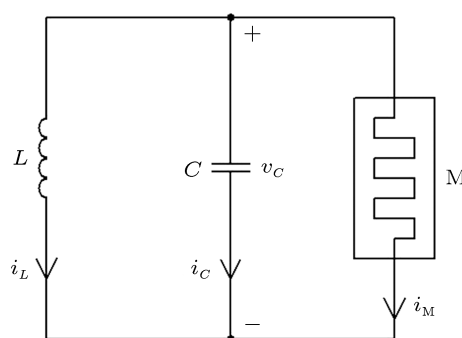


图 2 最简并行忆阻器混沌系统模型

当参数选择为  $k = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.5$  时, 在初始条件  $(0, 0.1, 0)$  下, 计算 Lyapunov 指数得  $LE_1 = 0.112$ ,  $LE_2 = 0$ ,  $LE_3 = -1.653$ , Lyapunov 维数为  $D_L = 2.068$ , 由于 Lyapunov 指数存在大于 0, Lyapunov 指数之和小于 0, 且 Lyapunov 维数也为分数维, 说明系统处于混沌状态. 系统的时域波形如图 3 所示, 显示非周期性, 貌似随机性. 系统的相空间或相平面上的投影如图 4 所示, 系统生成了一个涡卷混沌吸引子. 在  $z = 0$  截面上做的 Poincaré 映射, 由图 5 所示, 在 Poincaré 截面上有无穷多个密集点, 吸引子的轮廓清晰可见, 进一步说明此时系统的运动是混沌的.

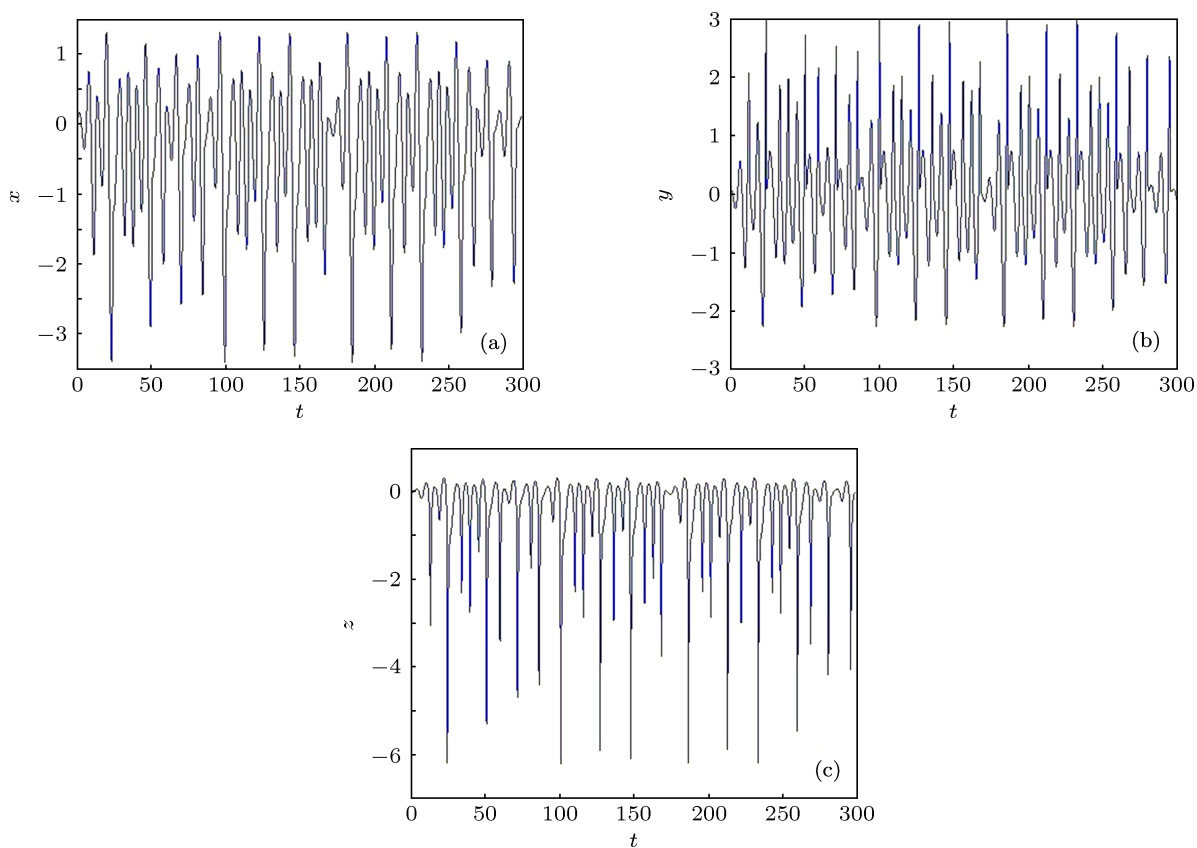


图3 最简并联忆阻器混沌系统的时域波形 (a)  $x(t)$  的时域波形; (b)  $y(t)$  的时域波形; (c)  $z(t)$  的时域波形

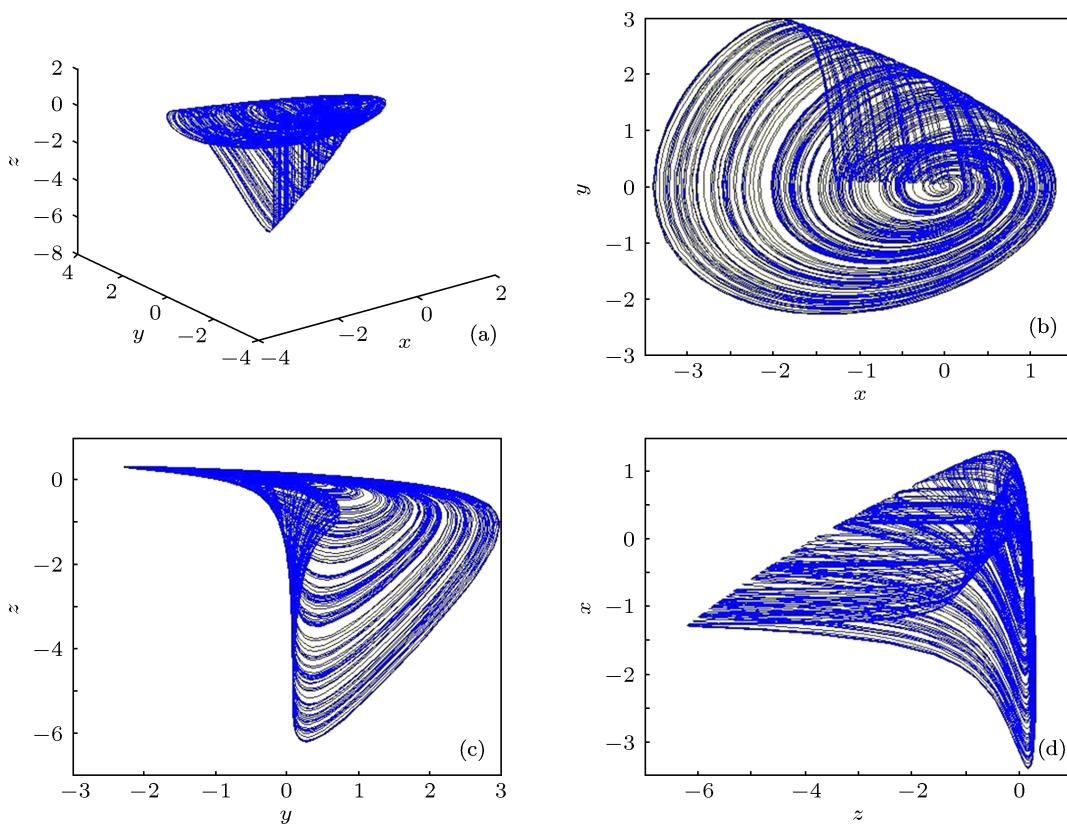


图4 最简并联忆阻器混沌系统的混沌吸引子 (a)  $x$ - $y$ - $z$  空间相图; (b)  $x$ - $y$  平面相图; (c)  $y$ - $z$  平面相图; (d)  $z$ - $x$  平面相图

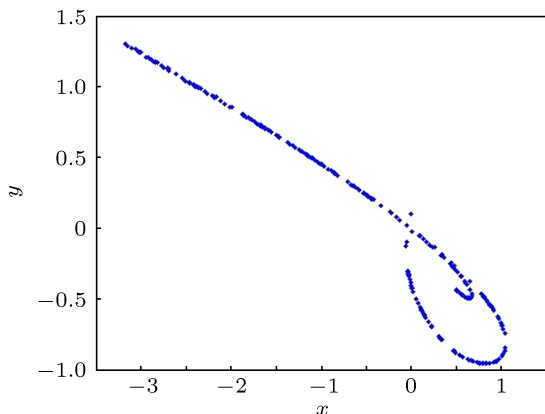


图5 最简并联忆阻器混沌系统在  $z=0$  截面上的 Poincaré 映射

### 3 基本动力学特性

#### 3.1 平衡点的稳定性

由  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$  可计算出系统 (5) 只有一个平衡点  $0(0,0,0)$ . 在  $k=1$  时, 将系统 (5) 在平衡点处线性化后, 可得 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & bc & 0 \\ 0 & -c & -4c \end{bmatrix}. \quad (6)$$

那么, 在平衡点  $0$  的特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda^3 - (4c - bc)\lambda^2 + (ab - 4bc^2)\lambda + 4abc = 0. \quad (7)$$

可计算出在平衡点  $0$  处矩阵的特征值为

$$\lambda_1 = -4c, \quad \lambda_2 = \frac{bc}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(b^2c^2 - 4bc)},$$

$$\lambda_3 = \frac{bc}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2c^2 - 4bc)}.$$

显然, 如果  $c > 0$ , 且  $b < 0, a < 0$ , 则  $\lambda_1 < 0, \text{Re}(\lambda_2) < 0, \text{Re}(\lambda_3) < 0$ , 平衡点  $0$  是渐进稳定的. 否则, 特征值不满足是负实数或具有负实部, 根据微分线性系统理论, 易知平衡点  $0$  是不稳定的. 当参数选择为  $k=1, a=1, b=1, c=0.5$  时,  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0.25 + j3.873, \lambda_3 = 0.25 - j3.873$ , 这里  $\lambda_1$  为负实根, 而  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  是一对具有正实部的共轭复根, 可见, 平衡点  $0$  是不稳定的, 是鞍焦点.

#### 3.2 参数对系统影响的动力学分析

随着系统参数的改变, 系统平衡点的稳定性将会发生变化, 从而系统也将处于不同的状态. 在初始条件  $(0,0,1,0)$  下, 固定参数  $k=1, b=1, c=0.5$ , 改

变  $a$ . 当  $a$  在  $[0, 6]$  范围内变化时, 系统的 Lyapunov 指数谱如图 6 所示, 分岔图如图 7 所示. 由图 6 和图 7 可见, Lyapunov 指数谱与分岔图是基本一致的. 当  $a \in [0, 0.00028]$  时, 系统轨道收敛于平衡点; 当  $a$  达到  $0.00029$  时, 系统进入周期态; 接着,  $a$  达到  $0.47$  时, 系统进入拟周期态; 然后,  $a$  达到  $0.53$  时, 系统进入混沌态; 最后,  $a$  达到  $3.26$  时, 系统退出混沌态, 进入拟周期状态和周期状态. 在  $a \in [0.53, 3.26]$  时, 系统也不全处于混沌态, 还存在周期状态和拟周期状态, 例如  $a \in [0.71, 0.77] \cup [1.36, 1.45] \cup [1.46, 3.25]$  时, 系统处于拟周期状态,  $a = 0.8$  时, 系统处于周期状态.

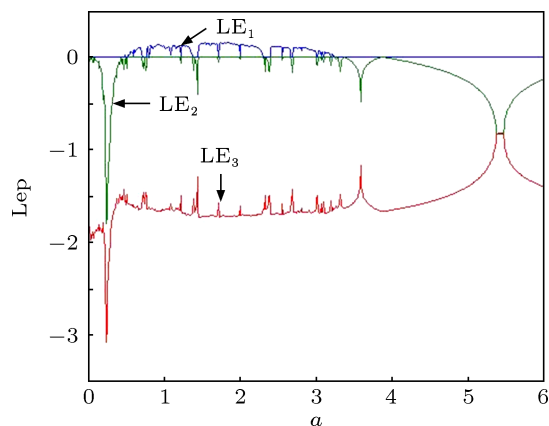


图6 参数  $a$  变化的 Lyapunov 指数谱

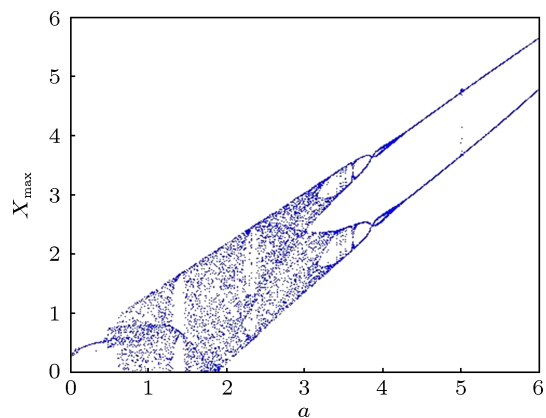


图7 参数  $a$  变化的分岔图

在  $a$  取不同值时, 忆阻器的  $i-v$  特性也随之改变. 图 8(a) 和 (d) 呈现出忆阻器斜“8”字形的伏安特性曲线, 但是随着参数的变化, 忆阻器的  $i-v$  特性还会表现成带尾巴的扇形. 图 8(a) 和 (b) 是周期状态下的忆阻器的  $i-v$  轨道, 图 8(d) 示出了拟周期状态下的忆阻器的  $i-v$  轨道, 而图 8(c) 是混沌状态下的忆阻器的  $i-v$  轨道.

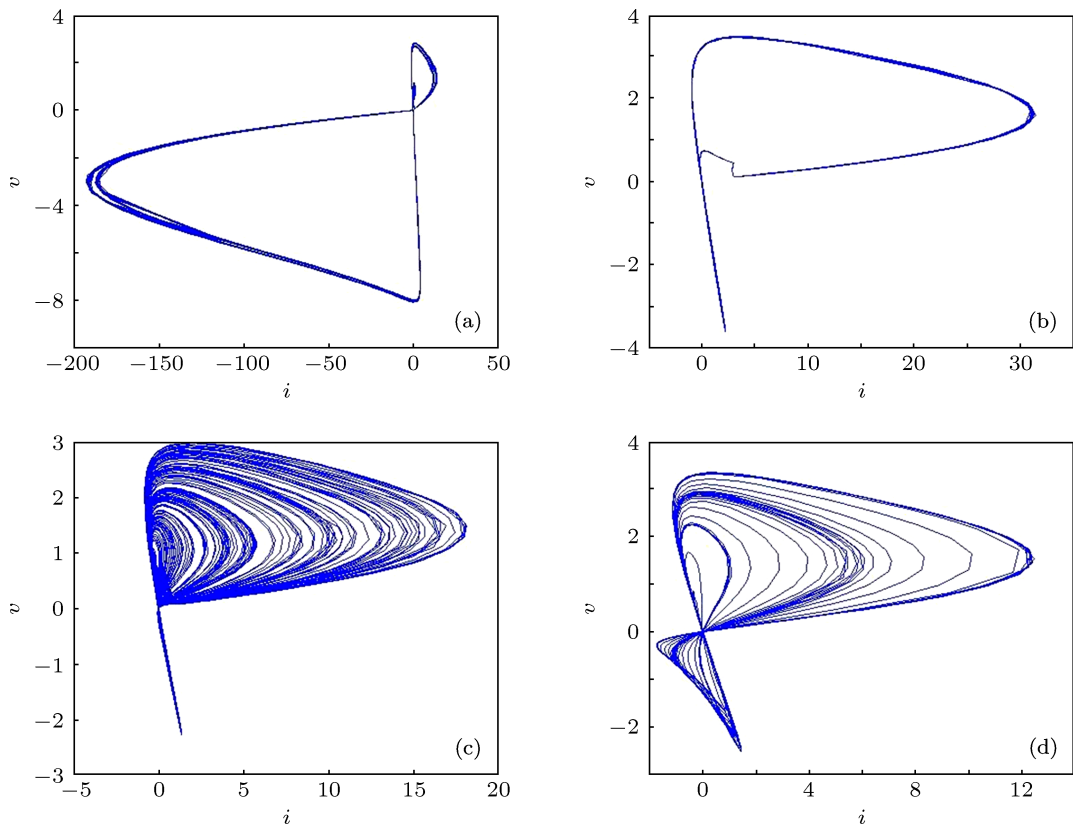


图8  $a$  不同值时, 忆阻器的  $i-v$  特性图 (a)  $a = 0.1$ ; (b)  $a = 0.3$ ; (c)  $a = 1$ ; (d)  $a = 5$

同样, 参数  $b$  和  $c$  也会影响系统状态. 在初始条件  $(0,0,1,0)$  下, 固定参数  $k = 1, a = 1, c = 0.5$ , 让  $b$  在  $[0, 4.5]$  范围内变化, 得到的系统的 Lyapunov 指数谱如图 9 所示. 在同样初始条件下, 固定参数  $k = 1, a = 1, b = 1$ , 让  $c$  在  $[0, 1]$  范围内变化, 得到的系统的 Lyapunov 指数谱如图 10 所示. 由图 9 和图 10 可见, 系统 (5) 在一定范围内具有一个正的 Lyapunov 指数, 说明了系统存在着混沌态.

### 3.3 初始值对系统影响的动力学分析

对于磁控忆阻器构成的混沌系统的动力学特性, 依赖于电路的初始条件, 而本文采用的压控忆阻器构成的混沌系统是否也有此特性? 在此将参数选择为  $k = 1, a = 1, b = 1, c = 0.5$ , 取不同的初始条件, 得到的 Lyapunov 指数如表 1 所示. 由表可见, 在初值  $x = 0$  和  $y = 0$  的条件下, 不管  $z$  为何值, 混沌系统不发生振荡. 在初值  $x$  和  $y$  不同时为 0 的条件下, Lyapunov 指数基本一致, 系统都发生混沌振荡, 说明了在能振荡的条件下电路的初始条件不影响系统的状态.

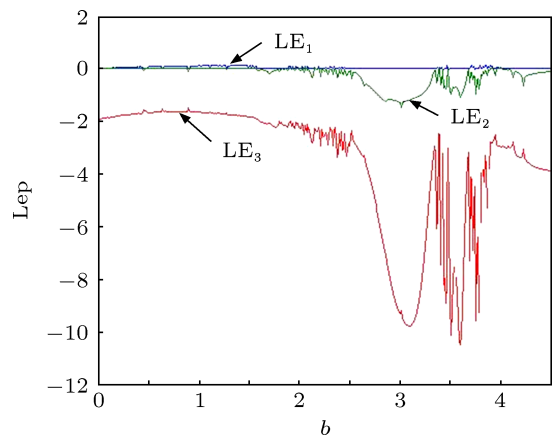


图9 参数  $b$  变化的 Lyapunov 指数谱

## 4 电路设计与实验结果

由于混沌系统常用电路来物理实现, 此利用 EWB 软件设计电路, 建立最简的并联忆阻器混沌系统的电路模型, 并对系统的动力学行为进行验证. 建立的系统电路模型如图 11 所示, 首先采用了运算放大器、电阻、电容和受控电流源构成电压控制型忆阻器, 利用  $U_1$  构成电压跟随器取样电容  $C$ 、电感  $L$  和构造的忆阻器并联的两端电压  $v_c$ , 由  $U_2, U_6$  构成的反比例放大器,  $U_3, U_4$  构成的加法器,

乘法器  $A_1, A_2$  对电压  $v_C$  和忆阻器状态变量  $z$  进行运算, 而状态变量  $z$  的产生由  $U_5$  构成的积分电路来实现, 通过受控电流源实现电压对电流的控制, 从而得到电压控制型忆阻器. 接着, 在电压控制型忆阻器两端并联上电容  $C$ 、电感  $L$  便可构造出一个混沌系统. 然后, 利用电压源和开关为电容提供初值.

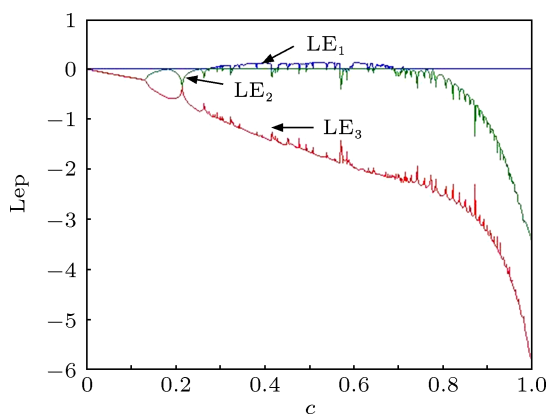


图 10 参数  $c$  变化的 Lyapunov 指数谱

根据电路理论以及各个元件的特性, 可得图 11 的电路方程为

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} v_C, \\ \frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C} \left[ -i_L + \left( \frac{R_6}{R_3} + \frac{R_6}{R_4} z - \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_{14}}{R_{13}} z^2 \right) v_C \right], \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{R_{12}C_1} \left( \frac{R_{11}}{R_7} \cdot \frac{R_2}{R_1} v_C + \frac{R_{11}}{R_8} \cdot \frac{R_{14}}{R_{13}} z - \frac{R_{11}}{R_9} v_C z \right) \end{aligned}$$

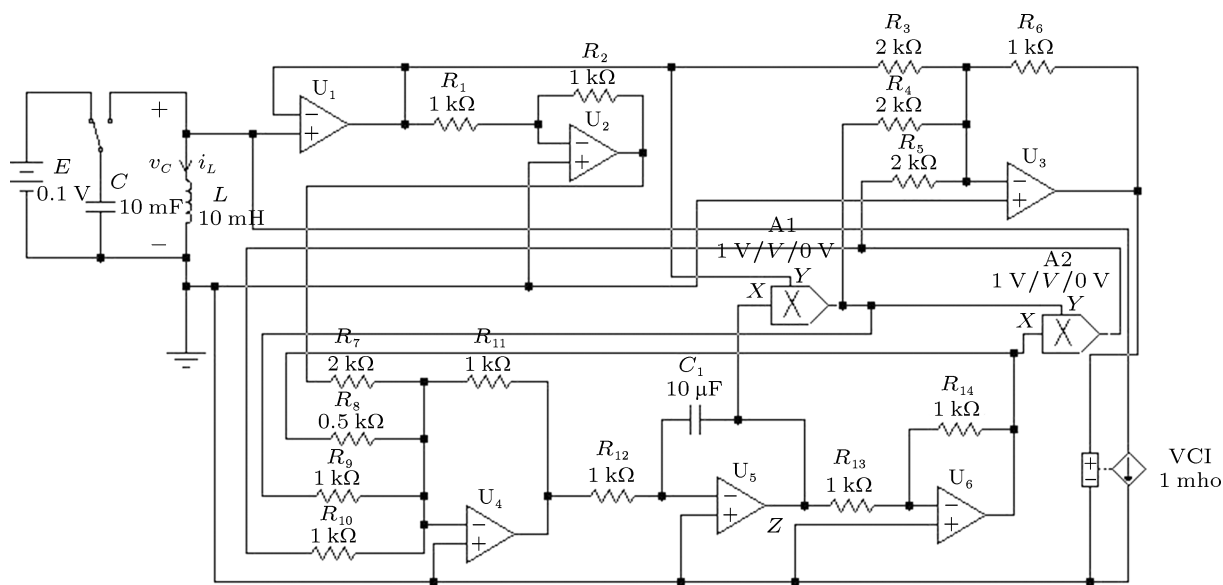


图 11 最简单的并行忆阻器混沌系统实现的电路原理图

$$+ \frac{R_{11}}{R_{10}} \cdot \frac{R_{14}}{R_{13}} v_C z^2 \Big).$$

电路的时间常数是时间尺度变化因子. 通过时间尺度变换因子, 可改变混沌信号在时域中变化的快慢以及混沌信号频谱的分布范围. 因此, 合理选择时间尺度变换因子的大小, 对混沌电路的设计是十分重要的. 为了便于观察, 电路中的电感、电容和电阻的取值如图 11 所示, 实现了时间常数的合理选择, 得到的方程 (5) 的参数是  $k = 100, a = 1, b = 1, c = 0.5$ , 电路的实验结果如图 12 所示, 其结果与图 3 和图 4 中数值仿真的结果一致.

表 1 初始值及其对应的系统动力学行为

初始值	Lyapunov 指数	系统动力学行为
(0,0,0.1)	0.25,0.25,-2	不振荡
(0.1,0,0)	0.112,0,-1.656	混沌振荡
(0.1,0.1,0)	0.110,0,-1.654	混沌振荡
(0,0,10)	0.25,0.229,-2	不振荡
(0,10,0)	0.111,0,-1.658	混沌振荡
(10,10,10)	0.111,0,-1.662	混沌振荡

## 5 结论

本文提出了一种仅由忆阻器、电容和电感构成的最简单的并行忆阻器混沌系统, 系统存在着复杂的混沌动力学行为, 电路仿真实验结果与数值仿真一致. 该系统拓展了对混沌系统、忆阻器混沌系统的研究思路, 在保密通信和混沌密码领域具有潜在的应用价值.

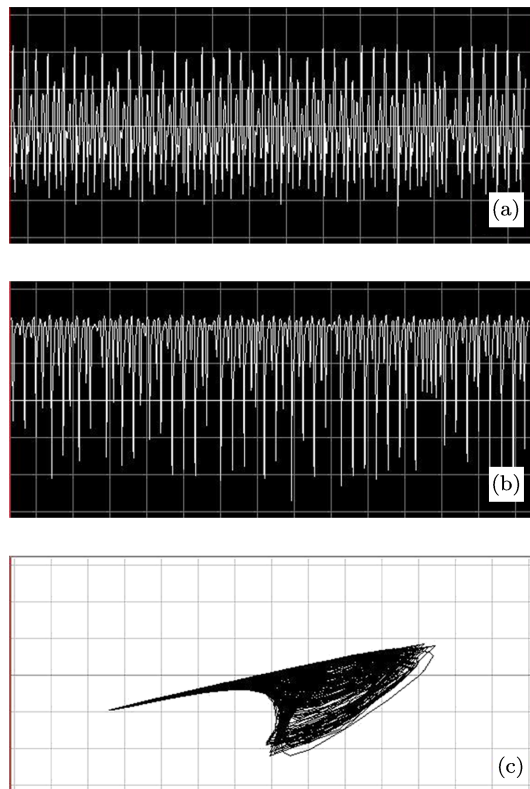


图 12 最简单的并行忆阻器混沌的电路实验图 (a)  $y(t)$  的时域波形; (b)  $z(t)$  的时域波形; (c)  $y$ - $z$  平面相图

- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circ. Theory* **18** 507
- [2] Chua L O, Kang S M 1976 *Proc. IEEE* **64** 209
- [3] Tour J M, He T 2008 *Nature* **453** 42
- [4] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [5] Li H, Liao Z M, Wu H C, Tian X X, Xu D S, Cross G L W, Duesberg G S, Shvets I V, Yu D P 2011 *Nano Lett.* **11** 4601
- [6] Nagata T, Haemori M, Yamashita Y, Yoshikawa H, Iwashita Y, Kobayashi K, Chikyow T 2011 *Appl. Phys. Lett.* **99** 22351
- [7] Joglekar Y N, Wolf S J 2009 *Eur. J. Phys.* **30** 661
- [8] Bao B C, Xu J P, Zhou G H, Ma Z H, Zou L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120502
- [9] Shin S, Kim K, Kang S 2011 *IEEE Trans Nano.* **10** 266
- [10] Muthuswamy B 2010 *Int. J. Bifur. Chaos* **20** 1335
- [11] Itoh M, Chua L O 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 3183
- [12] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3785 (in Chinese) [包伯成, 刘中, 许建平 2010 物理学报 **59** 3785]
- [13] Ivo P 2010 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **11** 57 975
- [14] Itoh M, Chua L O 2010 *Int. J. Bifur. Chaos* **20** 1567
- [15] Bao B C, Shi G D, Xu J P, Liu Z, Pan S H 2011 *Sci. China Ser. E* **41** 1135 (in Chinese) [包伯成, 史国栋, 许建平, 刘中, 潘赛虎 2011 中国科学 E 辑 **41** 1135]

# A simplest parallel chaotic system of memristor\*

Xu Bi-Rong<sup>†</sup>

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China)

(Received 7 June 2013; revised manuscript received 19 June 2013)

## Abstract

Based on a proposed voltage-controlled memristor, a simplest parallel memristor chaotic system is constructed. The dynamical characteristics of the new chaotic system are analyzed, including Lyapunov exponent, Lyapunov dimension, time domain waveforms, portrait diagrams, Lyapunov exponent spectrum, bifurcation diagrams and Poincaré mapping. An electronic circuit of the new system is designed and verified by simulations using the EWB software. Research results show that with the parameter change, the  $i-v$  characteristic of the memristor, instead of keeping inclined 8-shaped, becomes a fan-shape with a tail. The differences between the chaotic system and the magnetic-controlled memristor chaotic system are in two aspects: only one equilibrium point in the chaotic system, and the initial conditions do not affect the state of the system when the system can oscillate. Good matching between numerical simulation and circuit experimental simulation proves the existence and physical realizability of the new chaotic system.

**Keywords:** memristor, chaotic circuit, parallel, dynamical behaviour

**PACS:** 05.45.Ac, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.190506

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2012D127), and the Science and Technology Project of Fujian Provincial Department of Education, China (Grant No. JA11264).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xubirong1@163.com