

非精确交替方向总变分最小化重建算法*

王林元 张瀚铭 蔡爱龙 闫镔[†] 李磊 胡国恩

(国家数字交换系统工程技术研究中心, 郑州 450002)

(2013年6月5日收到; 2013年6月24日收到修改稿)

CT (computed tomography) 系统实际应用当中, 经常会出现扫描数据不满足数据完备性条件的情况. 针对不完全角度重建问题的研究, 是目前迭代型算法研究中的一个热点. 一系列基于带有约束的总变分最小化的重建算法近年来在不完全角度重建中取得了较好的效果, 这其中基于交替方向法 (alternating direction method, ADM) 的重建算法表现出更好的性能. 然而, ADM 方法在求解过程中对矩阵求逆的处理效率不高, 导致极大的计算开销. 本文针对该问题, 使用非精确 ADM 方法, 利用线性近似的方式替换掉计算开销较大的项, 使得矩阵求逆问题可以通过快速傅里叶变换加速实现. 实验结果表明, 本文提出的非精确交替方向总变分最小化重建算法与精确 ADM 重建算法相比, 没有明显的精度损失, 计算时间缩减 30% 左右.

关键词: 不完全角度重建, 总变分最小化, 非精确交替方向法

PACS: 87.59.-e, 42.30.Wb, 81.70.Tx, 07.85.-m **DOI:** 10.7498/aps.62.198701

1 引言

在 CT (computed tomography) 系统中, 图像重建算法通常需要完备的投影数据集^[1,2]. 然而, 在很多实际应用中, 由于受数据采集时间、照射剂量或成像系统扫描的几何位置约束, 无法在 360° 角度范围内充分采集投影数据. 这种情况被称为图像重建中的不完全角度问题^[3]. 对于不完全角度问题, 由于不满足数据完备性条件, 无法使用解析型算法进行重建, 而传统的迭代型算法如 ART (algebraic reconstruction technique)^[3] 也很难对缺失数据严重的情况获得较好的重建效果.

近年来, 提出和发展了基于带有约束的总变分 (total-variation, TV) 最小化的重建算法^[4-7]. 带约束的 TV 最小化的想法源自 Candes 等人提出的 CS (compressive sensing) 理论^[4,5], Candes 等人也基于带约束的 TV 最小化利用 DFT (discrete fourier transform) 的稀疏采样进行了精确重建^[4]. 带约束的 TV 或 l_1 范数最小化算法已经在不完全度重建的研究中取得了令人满意的效果^[6-10].

对于带约束的 TV 最小化模型的求解, 使用基于交替方向法 (alternating direction method, ADM) 的优化算法能够获得较优的求解结果. 这其中最有代表性的两类方法是分裂 Bregman 方法^[11] 和基于增广 Lagrangian 函数的 ADM 算法^[12]. 文献 [13] 和 [14] 均指出, 当约束为线性时, 分裂 Bregman 方法与基于增广 Lagrangian 的 ADM 等价. 2012 年 Li 等^[15] 在原有 ADM 算法基础上加入了非单调线搜索技术, 进一步改善了算法性能. 2011 年, Vandeghinste 等^[9] 将 split Bregman 方法应用于 CT 图像重建中, 并取得了优于 ASD-POCS 算法重建效果. 2013 年, Zhang 等人提出交替方向 TV 最小化方法 (alternating direction total-variation ADTVM)^[16], 并在直线轨迹扫描 CT 的不完全角度重建中取得较好的效果.

尽管基于 ADM 的模型求解方法及其对应的重建算法在重建精度、收敛性能等方面存在明显优势, 特别是加入非单调线搜索技术后, 算法性能进一步得到改善, 但其求解过程中对于一个子问题求伪逆的数值处理带来了极大的计算开销, 严重影响了算法的速度. 本文针对该问题, 对计算开

* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2012AA011603) 和国家自然科学基金 (批准号: 61372172) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: tom.yan@gmail.com

销较大的一项利用线性近似的方法进行替换, 推导了非精确交替方向 TV 最小化 (inexact-ADTVM, IADTVM) 重建算法, 并将其应用于不完全角度重建问题, 验证了算法的有效性.

2 非精确交替方向 TV 最小化算法

2.1 模型描述

大多数迭代型重建算法通常采用线性方程组来描述成像问题, 对成像模型进行离散化之后得到离散模型

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{f}. \quad (1)$$

其中 \mathbf{f} 为被重建物体, \mathbf{p} 表示投影向量, \mathbf{W} 为离散化的投影矩阵. 对于不完全角度重建问题, (1) 式的问题往往是不适定的. CS 理论表明在满足一定稀疏性的条件下, 通过求解如下 l_1 范数最小化问题可以对 (1) 式进行精确求解:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^* &= \arg \min_{\mathbf{f}} \|\Psi(\mathbf{f})\|_1, \\ \text{s.t. } \mathbf{p} &= \mathbf{W}\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (2)$$

在 CT 成像中, 图像的梯度幅度在平坦区域内为 0 而在边缘上非 0, 因此是非常稀疏的. 将 l_1 范数应用于梯度幅度图像得到的正是我们熟知的 TV. 对问题 (1) 进行 TV 正则化, 即得到带有约束的 TV 最小化模型, 这里使用各向异性 TV 的定义方式, (2) 式中令 $\|\Psi(\mathbf{f})\|_1 = \|\mathbf{f}\|_{\text{TV}} = \sum_j \|D_j \mathbf{f}\|_1$. 其中, D_j 表示沿方向 j 的差分算子. 对于二维情况, D_1 和 D_2 分别表示横向和纵向的差分算子.

2.2 交替方向 TV 最小化算法

对于形如 (2) 式的优化问题的求解, ADM 是优化领域目前性能最好的求解方法. 其主要思想是将原问题转化为无约束问题后, 通过变量分离将问题分解成多个子问题交替求解, 由于每个子问题求解形式简单, 使得求解过程中每轮迭代计算速度较快, 通过多轮迭代可获得良好的求解精度. 2013 年, Zhang 等人基于 ADM 提出求解不完全角度的 ADTVM 算法^[16], 下面简单介绍其推导过程.

将 (2) 式的约束优化问题转化为无约束优化问题得

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{W}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \sum_j \|D_j \mathbf{f}\|_1. \quad (3)$$

使用变量代换将问题转化为

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{W}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \sum_j \|z_j\|_1, \\ \text{s.t. } D_j \mathbf{f} = z_j. \end{aligned} \quad (4)$$

上述问题对应的增广 Lagrangian 函数为

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{W}\mathbf{f}\|^2 \\ + \sum_j \left(\lambda \|z_j\|_1 + \frac{\rho}{2} \|D_j \mathbf{f} - z_j^k + u_j^k / \rho\|^2 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

使用交替方向法求解该问题, 即交替求解如下子问题:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{k+1} &= \arg \min_{\mathbf{f}} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{W}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho}{2} \sum_j \|D_j \mathbf{f} - z_j^k + u_j^k / \rho\|^2 \right), \\ z_j^{k+1} &= \arg \min_{z_j} \left(\lambda \|z_j\|_1 + \frac{\rho}{2} \|D_j \mathbf{f} \right. \\ &\quad \left. - z_j^k + u_j^k / \rho\|^2 \right), \\ u_j^{k+1} &= u_j^k + \rho (D_j \mathbf{f}^{k+1} - z_j^{k+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

交替方向 TV 最小化算法的最终迭代形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{k+1} &= \left(\rho \sum_j D_j^T D_j + \mathbf{W}^T \mathbf{W} \right)^+ \\ &\quad \times \left(\mathbf{W}^T \mathbf{p} + \rho \sum_j D_j^T (z_j^k - u_j^k / \rho) \right), \\ z_j^{k+1} &= \max \left\{ \left| D_j \mathbf{f}^{k+1} + \frac{u_j^k}{\rho} \right| - \frac{\lambda}{\rho}, 0 \right\} \\ &\quad \times \text{sgn} \left(D_j \mathbf{f}^{k+1} + \frac{u_j^k}{\rho} \right), \\ u_j^{k+1} &= u_j^k + \rho (D_j \mathbf{f}^{k+1} - z_j^{k+1}), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 M^+ 表示矩阵 M 的 Moore-Penrose 伪逆. 对于这种精确 ADM 方法, 由于每个子问题都有闭式解, 因此求解速度上较以往优化算法具有明显的优势, 而基于此类方法发展的重建算法在运行时间相同的情况下, 能够获得更好的求解精度^[9,16]. 然而, 在每轮迭代中计算伪逆的代价是非常大的, 使用线性化的非精确 ADM^[18-20] 是一种比较好的方式.

2.3 非精确算法

精确 ADM 算法在计算开销中的主要问题, 集中于对含有系统矩阵 \mathbf{W} 的项 $\rho \sum_j D_j^T D_j + \mathbf{W}^T \mathbf{W}$ 求伪逆, 由于系统矩阵 \mathbf{W} 不具有特殊性, 无法将其进行对角化, 导致求逆过程计算代价非常大. 非精确

ADM 算法,主要是对 (7) 式中的 f 子问题中的保真项 $(1/2)\|p - Wf\|^2$, 即含有系统矩阵 W 的项, 利用当前点 f^k 进行线性化近似, 具体方法为

$$\frac{1}{2}\|p - Wf\|^2 \approx \frac{1}{2}\|p - Wf^k\|^2 + g_k^T(f - f^k) + \frac{1}{2\tau}\|f - f^k\|^2, \quad (8)$$

其中 $g_k = W^T(Wf^k - p)$ 表示在 f^k 点的梯度, 参数 $\tau > 0$. f 子问题转化为

$$\arg \min_f \left(\frac{1}{2}\|p - Wf^k\|^2 + g_k^T(f - f^k) + \frac{1}{2\tau}\|f - f^k\|^2 + \frac{\rho}{2} \sum_j \|D_j f - z_j^k + u_j^k/\rho\|^2 \right). \quad (9)$$

对上式关于 f 求导并令其等于 0, 可得

$$\left(\rho \sum_j D_j^T D_j + \frac{1}{\tau} I \right) f = \rho \sum_j D_j^T (z_j^k - u_j^k/\rho) + \frac{1}{\tau} I \cdot f^k - W^T(Wf^k - p). \quad (10)$$

为了方便描述, 这里对二维情况即 $j = 2$ 进行讨论, 三维情况与之完全一致, 可以直接扩展到三维. 令 $D = (D_1; D_2)$, $z = (z_1; z_2)$, $u = (u_1; u_2)$, (10) 式可写为

$$\left(D^T D + \frac{1}{\rho\tau} I \right) f = D^T (z^k - u^k/\rho) + \frac{1}{\rho\tau} I \cdot f^k - \frac{1}{\rho} W^T(Wf^k - p). \quad (11)$$

上式中的 $D^T D + \frac{1}{\rho\tau} I$ 可以通过快速傅里叶变换 (fast Fourier transforms, FFT) 对角化, 因此其求解在计算上变得非常容易. IADTVM 算法的最终迭代形式为

$$f^{k+1} = \left(D^T D + \frac{1}{\rho\tau} I \right)^+ \left(D^T (z^k - u^k/\rho) + \frac{1}{\rho\tau} I \cdot f^k - \frac{1}{\rho} W^T(Wf^k - p) \right),$$



$$z_j^{k+1} = \max \left\{ \left| D_j f^{k+1} + \frac{u_j^k}{\rho} \right| - \frac{\lambda}{\rho}, 0 \right\} \times \text{sgn} \left(D_j f^{k+1} + \frac{u_j^k}{\rho} \right),$$

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \rho (D_j f^{k+1} - z_j^{k+1}). \quad (12)$$

该算法具有全局收敛性, 具体的收敛性证明可参考文献 [18, 20].

3 实验结果

3.1 仿真数据重建

对 IADTVM 算法进行锥束圆轨迹不完全角度采集的仿真实验进行验证, 采集角度选择 360° 范围内均匀分布的 36 个角度. 扫描与重建参数在表 1 中列出.

表 1 仿真实验扫描与重建参数

参数	取值
探测器单元数量	512
探测器单元尺寸/mm	0.127
光源到探测器距离/mm	300
光源到旋转轴距离/mm	600
扫描角度数量	36
重建规模	256×256
像素尺寸/mm	0.127×0.127

在仿真实验中, 仿真物体使用 256×256 的 Shepp-Logan 体模, 探测器探元数目为 512, 36 个角度共采集 18432 条射线, 即系统矩阵的规模为 18432×65536 . 在这种实验条件下 IADTVM 算法与 ADTVM 算法重建结果如图 1 所示, 两种算法迭代轮数均为 500 轮. 两种算法重建结果中水平和垂直方向中心位置的剖面如图 2 所示.



图 1 重建结果 (a) ADTVM 算法重建结果; (b) IADTVM 算法重建结果

本文采用均方根误差 (root mean squared error, RMSE) 对重建质量进行评估. 两种算法重建结果的均方根误差在表 2 中列出. 两种算法的 RMSE 下降曲线如图 3 所示. 从表 2 和图 3 中不难看出, 在 500 轮迭代当中, IADTVM 方法在重建精度上与 ADTVM 保持了相同的量级, 并没有精度损失.

两种算法在不同迭代轮数的运行时间如表 3 所示, 时间统计使用了运行 10 次的平均时间. 表 3 表明 IADTVM 的运行时间较 ADTVM 平均缩短了 30%左右, 两种算法的运行时间之比也相对稳定. RMSE 随时间的下降曲线如图 4 所示. 从图 4 可以看出, 在迭代的初始阶段, 运行相同的时间, IADTVM 能够达到更好的误差水平.

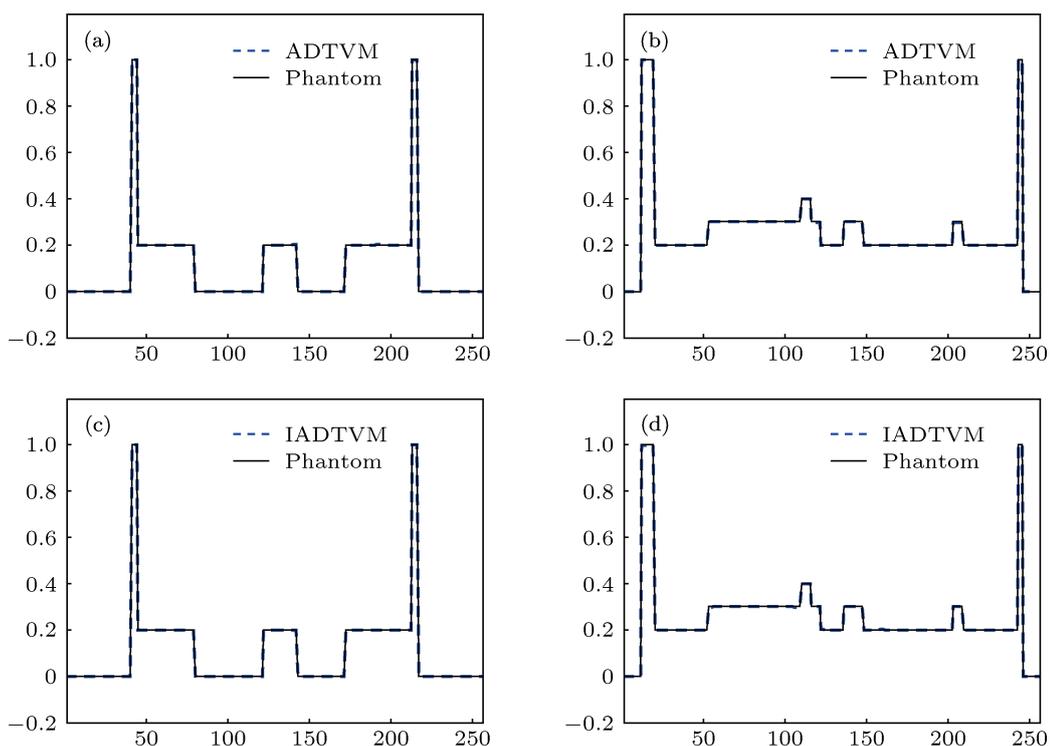


图 2 重建结果剖面图 (a) 图 1(a) 结果水平方向中心位置剖面; (b) 图 1(a) 结果竖直方向中心位置剖面; (c) 图 1(b) 结果水平方向中心位置剖面; (d) 图 1(b) 结果竖直方向中心位置剖面

表 2 重建结果均方根误差比较

迭代轮数	RMSE	
	ADTVM	IADTVM
100	0.002013	0.005921
200	0.0008108	0.0007058
300	0.0004202	0.0003520
400	0.0003328	0.0002704
500	0.0002109	0.0001420

表 3 重建运行时间比较

迭代轮数	运行时间/s	
	ADTVM	IADTVM
100	6.4766	5.7650
200	14.5399	11.5969
300	26.9694	17.2293
400	31.4422	22.8098
500	46.0015	33.9792

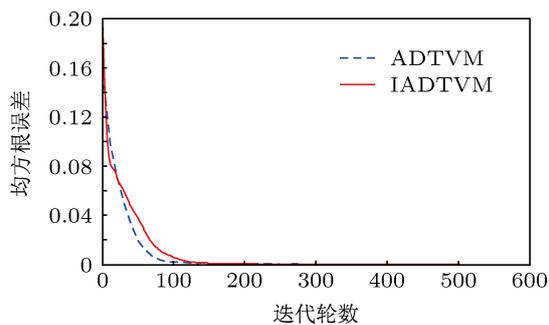


图 3 RMSE 下降曲线图

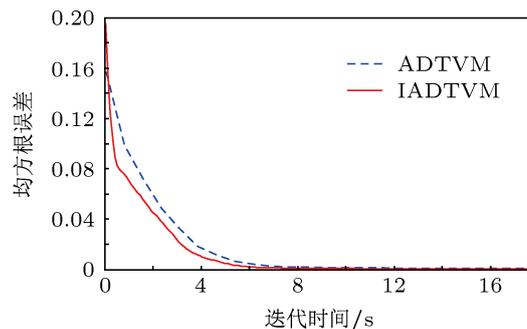


图 4 RMSE 随时间下降曲线图

3.2 真实数据重建

为了更进一步验证算法性能, 本文将 IADTVM 算法用于实际数据不完全角度重建. 被检测物体为一个标准 (成人) 头颅模型, 实际 CT 系统主要由光源 (Hawkeye 130, Thales, France)、高精度 4 轴联动载物台和探测器 (Varian 4030E, USA) 组成, 扫描方式为圆轨迹锥束扫描, 在 360° 范围内均匀采集 72 个角度的数据, 扫描与重建参数在表 4 中列出.

为了方便计算, 本文对 z 轴上的切片进行重建, ADTVM 算法与 IADTVM 算法重建迭代 100 轮的结果如图 5 所示. 从图中结果不难看出, IADTVM 方法在重建精度上与 ADTVM 相比并没有明显的损失.

两种算法在不同迭代轮数的运行时间如表 5 所示, 时间统计使用了运行 10 次的平均时间. 表 5

表明 IADTVM 的运行时间较 ADTVM 平均缩短了 30% 左右, 且两种算法的运行时间之比相对稳定.

表 4 实际实验扫描与重建参数

参数	取值
探测器单元数量	640
探测器单元尺寸/mm	0.635
光源到探测器距离/mm	678
光源到旋转轴距离/mm	1610
扫描角度数量	72
重建规模	300×300
像素尺寸/mm	0.582×0.582

以上所有实验中算法全部采用 C 语言编程实现, 运行软件为 Visual Studio 2012, 运行平台为 AMAX Tesla 工作站: Intel Xeon E5520 CPU 2.27 GHz 和 24 GB 内存. 在算法实现过程中, 部分参考了 Matlab 软件包 “TVAL3”^[21] 和 “IADPM”^[22].

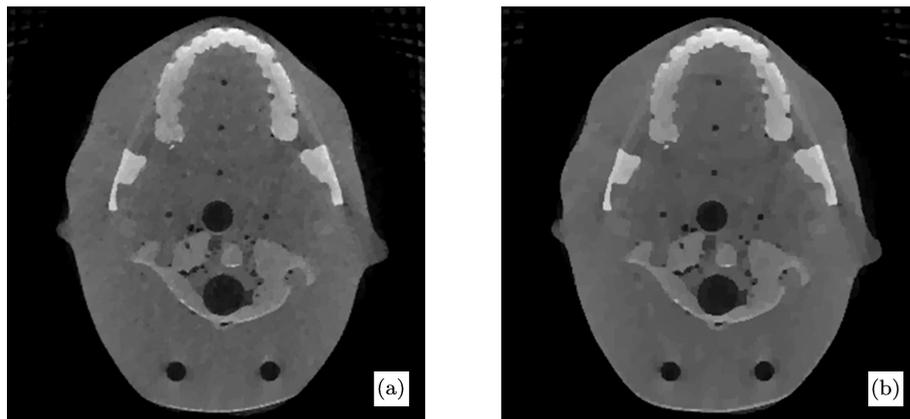


图 5 重建结果 (a) ADTVM 算法重建结果; (b) IADTVM 算法重建结果

表 5 重建运行时间比较

迭代轮数	运行时间/s	
	ADTVM	IADTVM
20	5.2307	4.7529
40	11.2953	8.2425
60	17.0274	11.7845
80	22.9292	15.7125
100	27.4526	18.1887

4 结论

本文针对 ADTVM 算法在大规模问题的求解过程中在计算速度上的不足, 提出了基于非精确

交替方向法的不完全角度重建算法. 实验结果表明, 本文提出的方法在不完全角度问题的重建中没有明显的重建精度损失, 并能够有效提升重建速度. 真实数据的重建结果更进一步说明, 该算法能够得到较好的重建效果, 在一些实际重建问题中, 可以替代 ADTVM 算法, 显著减少重建时间. 与 ADTVM 相比, 由于迭代中存在非精确的近似处理, 该算法在高精度重建中收敛速度存在一定不足, 而其在迭代初始阶段速度和精度都存在一定优势. 因此该算法比较适用于对重建精度要求不十分严格, 而对重建时间有一定要求的实际应用当中. 同时, 该算法也同样适用于各种扫描轨迹, 并可以推广到不同的成像模式.

- [1] Tuy H 1983 *SIAM J. Appl. Math.* **43** 546
 [2] Smith B D 1985 *IEEE Trans. Med. Imag.* **4** 14
 [3] Andersen A H 1989 *IEEE Trans. Med. Imag.* **8** 50
 [4] Candes E, Romberg J, Tao T 2006 *IEEE Trans. Inf. Theory* **52** 489
 [5] Candes E, Romberg J, Tao T 2006 *Commun. Pure Appl. Math.* **59** 1207
 [6] Sidky E Y, Kao C M, Pan X 2006 *J. X-ray Sci. Technol.* **14** 119
 [7] Sidky E Y, Pan X 2008 *Phys. Med. Biol.* **53** 4777
 [8] Wang L, Li L, Yan B, Jiang C, Wang H, Bao S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 088106
 [9] Vandeghinste B, Goossens B, De Beenhouwer J, Pizurica A, Philips W, Vandenberghe S, Staelens S 2011 *Proceedings of 11th International Conference on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Potsdam, Germany, July 11–15, 2011 p431
 [10] Han X, Bian J, Ritman E J, Sidky E Y, Pan X 2012 *Phys. Med. Biol.* **57** 5245
 [11] Goldstein T, Osher S 2009 *SIAM J. Imag. Sci.* **2** 323
 [12] Li C B 2009 *M. S. Thesis* (Houston: Rice University, USA)
 [13] Osher S, Yin W, Goldfarb D 2008 *Siam J. Imag. Sci.* **1** 143
 [14] Esser E 2009 *UCLA CAM Tech. Rep.* 09–31
 [15] Li C, Yin W, Jiang H, Zhang Y 2012 *Rice University CAAM Tech. Rep.* 12–13
 [16] Zhang H, Wang L, Yan B, Li L, Xi X, Lu L 2013 *Chin. Phys. B* **22** 08
 [17] Wen Z, Yin W, Liu X, Zhang Y 2012 *Operations Research Transaction* **16** 49 (in Chinese) [文再文, 印卧涛, 刘歆, 张寅 2012 运筹学学报 **16** 49]
 [18] He B, Liao L, Han D, Yang H 2002 *Math. Program.* **92** 103
 [19] Xiao Y, Yang J, Yuan X 2012 *Inverse Problems and Imaging* **6** 547
 [20] Xiao Y, Song H 2012 *J. Math. Imaging Vis.* **44** 114
 [21] TVAL3, Li C, Yin W, Zhang Y <http://www.caam.rice.edu/~optimization/L1/TVAL3/> [2013-05-31]
 [22] IADPM, Xiao Y, Song H <http://218.196.193.97/szdw/teachers/xyh.htm> [2013-05-31]

Image reconstruction algorithm based on inexact alternating direction total-variation minimization*

Wang Lin-Yuan Zhang Han-Ming Cai Ai-Long Yan Bin[†] Li Lei Hu Guo-En

(National Digital Switching System Engineering and Technological Research Center, Zhengzhou 450002, China)

(Received 5 June 2013; revised manuscript received 24 June 2013)

Abstract

Image reconstruction algorithms implemented in existing computed tomography (CT) scanners require that the projection data should be available in proportional-space. The image reconstruction from the projections viewed from few angles has already been one of the hot problems in the research of iterative reconstruction algorithms. Total variation (TV)-based CT image reconstruction has shown to be experimentally capable of producing accurate reconstructions from sparse-view data. Reconstruction algorithms based on alternating direction method (ADM) show higher performance among these TV-based algorithms. However, computing the pseudoinverse at each iteration is too costly to implement numerically in the exact ADM algorithm. For this problem, then inexact ADM is adopted, which uses linearization and proximal points techniques such that computing the pseudoinverse can be accomplished by fast Fourier transforms. Experimental results demonstrate that the proposed method can accelerate the exact ADM algorithm, with little accuracy loss, and the computing time is approximatively reduced by 30%.

Keywords: sparse-view reconstruction, total variation minimization, inexact alternating direction method

PACS: 87.59.–e, 42.30.Wb, 81.70.Tx, 07.85.–m

DOI: 10.7498/aps.62.198701

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA011603), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61372172).

[†] Corresponding author. E-mail: tom.yan@gmail.com