扰动扩散方程初值问题的近似对称约化*

李吉娜[1)†] 朱晓宁[2)] 程利芳[1)]

1) (中原工学院理学院, 郑州 450007)

2) (河南商业高等专科学校基础教学部, 郑州 450044)

(2012 年 6 月 10 日收到; 2012 年 8 月 23 日收到修改稿)

本文利用近似广义条件对称方法研究一类带有源项的非线性扩散方程的初值问题. 给出所研究方程的分类并将偏微分方程的初值问题约化为常微分方程的初值问题, 通过求解约化后的常微分方程组可得相对应偏微分方程初值问题的近似解.

关键词: 扰动扩散方程, 初值问题, 近似广义条件对称

PACS: 02.30.Sv, 02.30.Jr, 02.30.Ik **DOI:** 10.7498/aps.62.020201

1 引 言

本文主要研究扰动扩散方程

$$u_t = [A(u)u_x]_x + B(u)u_x + \varepsilon Q(u). \tag{1}$$

在具有初值条件

$$\alpha(x;\varepsilon)u_x(t_0,x) + \beta(x;\varepsilon)u(t_0,x) = \gamma(x;\varepsilon) \tag{2}$$

的近似对称约化. 其中 $A(u)$ 是扩散项, $B(u)$ 和 $Q(u)$ 分别是对流项和热源项, 都是关于 u 的光滑函数,ε 是小参数. 对方程 (1) 而言, 当 $\varepsilon = 1$ 时, 作者 [1] 研究了该方程的广义条件对称和精确解; 当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程 (1) 退化为扩散对流方程, 作者 [2] 研究了该方程的分类问题和对称约化. 这些方程产生于一些很重要的应用, 这些应用主要在工程学、物理学、化学和生物学等领域中, 关于非线性热传导问题、等离子问题、岩层中的渗流问题和黏性流问题等. 为了研究扰动方程的性质, 需要寻找近似解, 而扰动分析为求解扰动方程提供了很有用的工具 [3]. 以对称群 [4−6] 为基础的扰动方法有两种, 第一种是 Baikov 等 [7] 提出的近似李点对称方法, 第二种方法是 Fushchich 和 Shtelen[8] 提出的近似对称方法. 在近似李点对称法的基础上, 屈长征等人提出了近似条件对称方法 [9] 和近似势对称方法 [10], 张顺利等人给出了近似广义条件对称方法 [11], Burde 提出了近似李群技术 [12], 楼森岳等人在扰动方法和直接方法的基础上提出了近似直接方法 [13]. 运用这些扰动方法可以构造方程的近似解 [14]. 对称群方法在初边值问题方面的应用最早的工作是在上世纪 60 年代 [15]. Zhdanov 等人利用广义条件对称方法研究初值问题 [16,17] 目前该研究方向受到大家的关注 [18−22]. 本文利用近似广义条件对称方法研究初值问题 (1), (2) 的近似对称约化.

2 近似对称约化的基本原理

考虑 k 阶扰动方程 $[E]$

$$\begin{aligned} &E^{\beta}(x,u,u_{(1)},\cdots,u_{(k)};\varepsilon)\\ &= E_0^{\beta} + \cdots + \varepsilon^P E_p^{\beta}\\ &= O(\varepsilon^{p+1}), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$, $u = (u^1, u^2, \cdots, u^m)$, E_i^{β} 是关于 $x, u, u_{(1)}, \cdots, u_{(k)}$ 的光滑函数, ε 为小参数, $u_{(1)}, u_{(2)}, \cdots, u_{(k)}$ 是各阶导数直到 k 阶导数的集合, 即 $u_i^{\alpha} = D_i(u^{\alpha})$, $u_{ij}^{\alpha} = D_jD_i(u^{\alpha}), \cdots$ 分别是 1 阶和 2

* 国家自然科学基金 (批准号: 11101332) 和河南省自然科学基金 (批准号: 102300410275, 122300410166) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lijina2009@yahoo.com.cn

阶, 直到 k 阶导数, 并且

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+u_{ij}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}+\cdots,$$
$$i=1,2,\cdots,n$$

是关于 x^i 的全导数算子.

特别地, 对 $(1+1)$ 维扰动非线性演化方程

$$u_t=K(t,u,u_1,u_2,\cdots;\varepsilon), \tag{4}$$

有如下定义.

定义 1[11] 演化向量场

$$V=\sum_{i=0}^{\infty}D_x^i\sigma(t,x,u,u_1,u_2,\cdots;\varepsilon)\frac{\partial}{\partial u_i}, \tag{5}$$

或者 $\sigma=\sigma(t,x,u,u_1,u_2,\cdots;\varepsilon)$ 称为方程 (4) 的近似广义条件对称, 当且仅当

$$V\,(u_t-K)|_{[W]\cap[E]}=O(\varepsilon^{p+1}), \tag{6}$$

其中 $u_i=\dfrac{\partial^i u}{\partial x^i}$, $[W]$ 表示 $\sigma=O(\varepsilon^{p+1})$ 关于 x 的所有微分序列的集合, $[E]$ 为方程 (4) 的解空间.

方程 (4) 容许近似广义条件对称当且仅当 $D_t\,\sigma|_{[W]\cap[E]}=O(\varepsilon^{p+1})$.

定理 1[7](稳定性定理) 一阶扰动方程

$$u_t=h(u)u_{xx}+\varepsilon H(t,x,u_x,\cdots,u_n), \tag{7}$$

允许形如 (5) 式的近似对称, 最后趋向于方程 $u_t=h(u)u_x$ 允许一般对称, 其形式为

$$X_0=\eta_0\partial_u+(D_t\eta_0)\partial_{u_t}+(D_x\eta_0)\partial_{u_x},$$

其中 $\eta_0=\eta_0(t,x,u,u_1,u_2,\cdots,u_N)$.

非线性偏微分方程

$$\eta(t,x,u,u_1,\cdots,u_N;\varepsilon)=O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

可看出关于 x 的 N 阶常微分方程, 其通解形式如下:

$$u(t,x)=U(t,x,\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_N(t);\varepsilon), \tag{9}$$

其中 $\phi_j(t)(j=1,\cdots,N)$ 是任意光滑函数. 称 (9) 是在近似广义条件对称 (5) 下不变的拟设.

定理 2 在近似广义条件对称 (5) 下不变的拟设 (9) 式能约化扰动初值条件 (2), 当且仅当下面的条件成立:

1) 方程组 $\eta(t,x,u,u_1,\cdots,u_N;\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$, $\alpha(x;\varepsilon)u_x+\beta(x;\varepsilon)u=\gamma(x;\varepsilon)$ 相容;

2) 上式方程组的解是方程 $\eta=O(\varepsilon^2)$ 作为关于 x 的扰动常微分方程的通解 (9).

考虑如下形式的近似广义条件对称

$$Q=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{D_x^k\left[u_N-\sum_{i=0}^{N-1}(a_i(t,x)+\varepsilon b_i(t,x))u_i\right]\right\}\frac{\partial}{\partial u_k},$$
$$u_0=u. \tag{10}$$

若这样的近似广义条件对称存在, 则 η 是线性的, 通过积分可得

$$u=\sum_{i=0}^{N-1}\psi_i(t,x;\varepsilon)\phi_i(t).$$

3 主要结果

接下来给出方程 (1) 允许形如 (10) 式的近似广义条件对称.

3.1 方程 (1) 的近似分类问题

情形 1 方程 (1) 允许二阶近似广义条件对称

$$Q=\eta\frac{\partial}{\partial u}=\left[u_2-\sum_{i=0}^{1}(a_i(t,x)+\varepsilon b_i(t,x))u_i\right]\frac{\partial}{\partial u}.$$

根据近似广义条件对称的定义, 即 $D_t\eta=O(\varepsilon^2)$, 计算上式, 省略具体的计算过程, 可得方程 (1) 的分类形式如下:

1) $u_t=[(A_1u^2+A_2u+A_3)u_x]_x+(B_1u+B_2)u_x+\varepsilon(Q_1u+Q_2)$,
$\eta=u_{xx}$;

2) $u_t=[(A_1u+A_2)u_x]_x+(B_1u+B_2)u_x+\varepsilon\left(-\dfrac{3}{2}A_1b_0u^2+Q_1u+Q_2\right)$, (11)
$\eta=u_{xx}-\varepsilon b_1u_x-\varepsilon b_0u$; (12)

3) $u_t=[(A_1u+A_2)u_x]_x+(B_1u+B_2)u_x+\varepsilon(-B_1b_1u^2+Q_1u+Q_2)$,
$\eta=u_{xx}-\varepsilon b_1u_x$;

4) $u_t=[(A_1u+A_2)u_x]_x+(-2a_1A_1u+B_1)u_x+\varepsilon(-2a_1b_1A_1u^2+Q_1u+Q_2)$,
$\eta=u_{xx}-(a_1+\varepsilon b_1)u_x, b_1\neq0$,
$\eta=u_{xx}-a_1u_x, b_1=0$;

5) $u_t=A_1u_{xx}+B_1u_x+\varepsilon(Q_1u+Q_2)$,
$\eta=u_{xxx}-[a_1(t,x)+\varepsilon b_1(t,x)]u_x, Q_2\neq0$,

$$\eta = u_{xx} - [a_1(t,x) + \varepsilon b_1(t,x)]u_x - [a_0(t,x) + \varepsilon b_0(t,x)]u, Q_2 = 0.$$

其中 $a_i(t,x), b_i(t,x)(i=0,1)$ 各自满足特定的偏微分方程组, A_i, B_i, a_i, b_i, Q_i 是任意的常数.

情形 2 方程 (1) 允许三阶的近似广义条件对称

$$Q = \eta\frac{\partial}{\partial u} = \left[u_3 - \sum_{i=0}^{2}(a_i(t,x) + \varepsilon b_i(t,x))u_i\right]\frac{\partial}{\partial u}.$$

当且仅当等价于如下形式:

1) $u_t = [(A_1u + A_2)u_x]_x + B_1u_x + \varepsilon(-2b_1A_1u^2 + Q_1u + Q_2)$,

$\eta = u_{xxx} - \varepsilon b_1u_x$;

2) $u_t = A_1u_{xx} + B_1u_x + \varepsilon(Q_1u + Q_2)$,

$\eta = u_{xxx} - [a_2(t.x) + \varepsilon b_2(t,x)]u_{xx} - [a_1(t,x) + \varepsilon b_1(t,x)]u_x$,

$Q_2 \neq 0$,

$\eta = u_{xx} - [a_2(t,x) + \varepsilon b_2(t,x)]u_{xx} - [a_1(t,x) + \varepsilon b_1(t,x)]u_x - [a_0(t,x) + \varepsilon b_0(t,x)]u$,

$Q_2 = 0$.

其中 $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ $(i=0,1,2)$ 各自满足特定的偏微分方程组.

情形 3 方程 (1) 允许形如 (10) 式的四阶和五阶的近似广义条件对称时, 等价于如下形式的线性偏微分方程:

1) $u_t = A_1u_{xx} + B_1u_x + \varepsilon(Q_1u + Q_2)$,

$\eta = u_4 - \sum_{i=1}^{3}[a_i(t,x) + \varepsilon b_i(t,x)]u_i$,

$Q_2 \neq 0$;

$\eta = u_4 - \sum_{i=0}^{i=3}[a_i(t,x) + \varepsilon b_i(t,x)]u_i$,

$Q_2 = 0$.

2) $u_t = A_1u_{xx} + B_1u_x + \varepsilon(Q_1u + Q_2)$,

$\eta = u_5 - \sum_{i=1}^{4}[a_i(t,x) + \varepsilon b_i(t,x)]u_i$,

$Q_2 \neq 0$;

$\eta = u_5 - \sum_{i=0}^{4}[a_i(t,x) + \varepsilon b_i(t,x)]u_i$,

$Q_2 = 0$.

其中 $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ $(i=0,1,2,3,4)$ 各自满足特定的偏微分方程组.

3.2 初值问题近似约化的例子

例子 方程 (11) 的近似对称约化.

首先积分方程 (12), 可得到通解形式:

$$u(t,x;\varepsilon) = \phi_1(t) + \phi_2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon b_1 x}, \tag{13}$$

计算方程 (12) 的近似李对称, 可得方程的初值条件

$$\begin{aligned}&\Big\{C_3x^2 + C_7x + C_8 + \varepsilon\left[\frac{1}{2}(2C_9 - b_1C_7)x^2 + C_{11}x + C_{12}\right]\Big\}u_x(t_0,x)\\&- \left[C_3x + C_4 + \varepsilon\left(\frac{1}{2}b_1C_3x^2 + C_9x + C_{10}\right)\right]u(t_0,x)\\&= C_1x + C_2 + \varepsilon\left(\frac{1}{2}b_1C_1x^2 + C_5x + C_6\right),\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $C_i(i \in Z)$ 是任意常数.

将通解 (13) 代入初值问题 (11) 和 (14), 则转化为如下常微分方程的初值问题:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon[Q_2 + Q_1\phi_1(t) - b_1B_1\phi_1(t)^2],\\ \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon[Q_1\phi_2(t) - b_1B_1\phi_1(t)\phi_2(t) + b_1B_2\phi_2(t)]\\&\quad + [b_1^2A_1\phi_1(t)\phi_2(t) + A_2b_1^2\phi_2(t)]\varepsilon^2,\\ \phi_1(t_0) &= \frac{\varepsilon F_1 + F_2}{\varepsilon F_4 + F_3},\\ \phi_2(t_0) &= 0.\end{aligned}$$

解上述方程组, 解得

$$\begin{aligned}\phi_2(t) &= 0,\\ \phi_1(t) &= \frac{1}{2b_1B_1}\Big\{Q_1 + M\tanh\Big[\frac{M(t-t_0)\varepsilon}{2} - \operatorname{arctanh}\Big(\big((2b_1B_1F_1 + Q_1F_4)\varepsilon + Q_1F_3 + 2b_1B_1F_2\big)\\&\quad\times\big(M(F_3 + \varepsilon F_4)\big)^{-1}\Big)\Big]\Big\},\end{aligned}$$

其中 $M = \sqrt{Q_1^2 + 4Q_2B_1b_1}$, M_i, $F_i(i=1,2,3,4)$ 是任意常数.

将 $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ 代入 (13) 可得初值问题 (11) 和 (14) 的近似解.

4 结 论

来自实际应用中的非线性系统初边值问题的对称群不够丰富, 需要考虑方程和初值条件的兼容性. 而非平凡广义条件对称的存在性是将偏微分方程约化为常微分方程组的充要条件, 也就是说偏微分方程与常微分方程组之间的约化跟广义条件对称联系起来. 本文将非扰动情形初值问题的约化推广到扰动情形的近似约化, 对于扰动情形需要考虑稳定性, 本文所给出的情形 1、情形 2 和情形 3 满足稳定性定理. 本文运用近似广义条件对称方法研究方程 (1) 的分类, 并将分类结果的初值问题约化为常微分方程组的初值问题, 最后得到近似解. 这些近似解为以后研究这些方程提供了重要的信息.

[1] Qu C Z 1999 *Commun. Theor. Phys.* **31** 581

[2] Yung C M, Verburg K, Baveye P 1994 *Int. J. Nonlinear Mech.* **29** 273

[3] Nayfeh A H 2000 *Perturbation Methods* (New York: John Wiley)

[4] Olver P J 1993 *Applications of Lie Group to Differential Equations* (2nd ed)(New York: Springer)

[5] Ovsiannikov L V 1982 *The Group Analysis of Differential Equations* (New York: Academic Press)

[6] Bluman G W, Anco S C 2002 *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations* (New York: Springer)

[7] Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H 1988 *Mat. Sb.* **136** 435

[8] Fushchich W I, Shtelen W M 1989 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **22** L887

[9] Mahomed F M, Qu C Z 2000 *J. Phys.* A: *Math. Gen.*, **33** 343

[10] Kara A H, Mahomed F M, Qu C Z 2000 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **33** 6601

[11] Zhang S L, Wang Y, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 975

[12] Burde G I 2001 *Phys* A: *Math*. *Gen.* **34** 5535

[13] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 040202

[14] Jiao X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **12** 120201 (in Chinese) [焦小玉 2011 物理学报 **12** 120201]

[15] Moran M J, Gaggioli R A 1969 *J. Eng. Math.* **3** 151

[16] Zhdanov R Z 1995 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **28** 3841

[17] Basarab-Horwath P, Zhdanov R Z 2001 *J. Math. Phys.* **42** 376

[18] Hydon P E 2005 *J. Math. Anal. Appl.* **309** 103

[19] Zhang Z Y, Chen Y F 2010 *Physics Letters* A **374** 1117

[20] Cherniha R, Kovalenko S 2009 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **42** 355202

[21] Li J N, Zhang S L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 030201

[22] Li J N, Zhang S L, Su J R 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 28

Approximate symmetry reduction for initial-value problem of perturbed diffusion equations*

Li Ji-Na[1)†] Zhu Xiao-Ning[2)] Cheng Li-Fang[1)]

1) (*College of Science, Zhong yuan University of Technology, Zhengzhou* 450007, *China*)

2) (*Department of General Studies, Henan Business College, Zhengzhou* 450044, *China*)

(Received 10 June 2012; revised manuscript received 13 August 2012)

Abstract

In this paper, the approximate symmetry reduction for the initial-value problem of perturbed diffusion equations with source term is studied by the approximate generalized conditional symmetry. The classification of governing equations is given, and the Cauchy problem of partial differential equations is reduced to initial-value problem of ordinary differential equations. Finally, the approximate solution is obtained by solving the reduced system of equations.

Keywords: perturbed diffusion equation, initial-value problem, approximate generalized conditional symmetry

PACS: 02.30.Sv, 02.30.Jr, 02.30.Ik **DOI:** 10.7498/aps.62.020201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11101332), and the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant Nos. 102300410275, 122300410166).

† Corresponding author. E-mail: lijina2009@yahoo.com.cn