

# 含关联噪声的空间分数阶随机生长方程 的动力学标度行为研究\*

马靖杰 夏辉<sup>†</sup> 唐刚

(中国矿业大学物理系, 徐州 221116)

(2012年5月14日收到; 2012年8月18日收到修改稿)

为探讨含关联噪声的空间分数阶随机生长方程的动力学标度行为, 本文利用 Riesz 分数阶导数和 Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义方法研究了关联噪声驱动下的空间分数阶 Edwards-Wilkinson (SFEW) 方程在 1+1 维情况下的数值解, 得到了不同噪声关联因子和分数阶数时的生长指数、粗糙度指数、动力学指数等, 所求出的临界指数均与标度分析方法的结果相符合。研究表明噪声关联因子和分数阶数均影响到 SFEW 方程的动力学标度行为, 且表现为连续变化的普适类。

**关键词:** 关联噪声, 空间分数阶, Edwards-Wilkinson 方程, 表面粗糙度

**PACS:** 05.40.-a, 45.10.Hj, 68.35.Fx

**DOI:** 10.7498/aps.62.020501

## 1 引言

近年来, 分数阶微积分理论广泛应用于线性和非线性遗传动力学、非 Newton 流体力学、生物物理学, 反常扩散与随机游走理论、晶体和细菌生长、混沌与湍流、分形理论、材料记忆性质、自相似和多孔结构的动态过程等<sup>[1–5]</sup> 诸多领域, 所以对分数阶微积分的理论研究具有重要的理论意义和广泛的应用前景。

在分数阶生长动力学研究方面, Leith<sup>[6]</sup> 对分数阶生长过程和分数阶扩散过程作了较系统的描述; Burov 和 Barkai<sup>[7]</sup> 通过对分数阶 Langevin 方程的研究, 得到该动力学系统的标度指数; Mann 和 Woyczynski<sup>[8]</sup> 研究了具有自相似跳跃的生长分形界面的表面扩散行为; Katzav<sup>[9]</sup> 采用自洽展开方法研究了含奇异扩散的分形 Kardar-Parisi-Zhang (FKPZ) 方程<sup>[10]</sup> 的表面生长行为; Xia 等人<sup>[11,12]</sup> 研

究了具有记忆效应的时间分数阶动力学生长方程, 并得到了各类临界指数。需要指出的是, 在对表面生长过程的描述中, 唯象连续性动力学生长方程通常是局域模型, 而在实际的生长情况下, 生长系统需要考虑到非局域相互作用<sup>[13,14]</sup>。目前, 在局域生长方程中引入空间关联噪声或空间分数阶导数是两种常用的考虑非局域生长因素的有效方法<sup>[6–12,15–17]</sup>。在本文中, 我们把关联噪声和分数阶导数同时引入到随机动力学学生长方程中, 来研究二者对非局域生长过程的动力学标度行为的影响。

在生长动力学研究中, Edwards-Wilkinson (EW) 方程<sup>[18]</sup> 是第一个专门为描述生长表面的涨落而提出的非平衡连续性生长模型, 可以用来描述生长粒子在表面上随机沉积并且能立即弛豫到最近临位置上所生成表面的涨落过程。对于 1+1 维的情况, EW 方程表示为

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = v \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + \eta(x,t), \quad (1)$$

\* 中央高校基本科研业务经费专项资金(批准号: 2010LKWL04)资助的课题。

† 通讯作者。E-mail: hxia@cumt.edu.cn

式中,  $h(x, t)$  表示生长表面在  $t$  时刻  $x$  格点处的生长高度; 方程右边第一项是扩散项, 用来描述沉积粒子的弛豫过程;  $\eta(x, t)$  是噪声项, 表示生长过程的随机性, 通常情况下,  $\eta(x, t)$  定义为 Gaussian 白噪声. 在本文中, 为了描述非局域生长的影响, 我们把噪声项考虑成具有长程相互作用的空间关联噪声, 满足

$$\langle \eta(x, t)\eta(x', t') \rangle = 2D|x - x'|^{2\rho-d} \delta(t - t'), \quad (2)$$

其中,  $D$  表示噪声强度,  $d$  是空间维数,  $\rho$  表示噪声对空间的关联程度.

在描述表面动力学生长过程中, 一个重要的特征物理量是整体表面宽度(表面粗糙度) $W(L, t)$ , 即生长的某一时刻每个格点的生长高度与所有格点生长高度平均值的均方差, 定义为<sup>[19]</sup>

$$W(L, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left\langle \sum_x [h(x, t) - \bar{h}_L(t)]^2 \right\rangle^{1/2}, \quad (3)$$

其中,  $L$  是生长表面的基底尺寸,  $\bar{h}_L(t) = \sum_x h(x, t)/L$  表示  $t$  时刻在基底  $L$  上所有格点生长高度的平均值.

Family 和 Vicsek<sup>[19]</sup> 认为在基底尺寸为  $L$  的有限系统中进行生长, 表面粗糙度  $W(L, t)$  满足下面的标度规律:

$$W(L, t) = t^\beta f(L/t^{1/z}), \quad (4)$$

当  $x \ll 1$  时, 标度函数  $f(x) \sim x^\chi$ ; 当  $x \gg 1$  时,  $f(x) \rightarrow$  常数. 即:

$$W(L, t) \sim \begin{cases} t^\beta, & t \ll L^z, \\ L^\chi, & t \gg L^z, \end{cases} \quad (5)$$

其中, 生长指数  $\beta$  描述了在表面生长的初始阶段的表面粗糙度  $W(L, t)$  与  $t$  的标度关系; 粗糙度指数  $\chi$  描述了表面生长到饱和时的表面粗糙度  $W_{\text{sat}}(L)$  与  $L$  的标度关系; 动力学指数  $z$  表示表面生长到饱和时的时间  $t_x$  (渡越时间) 与  $L$  之间的标度关系  $t_x \sim L^z$ . 三个标度指数之间满足  $z = \chi/\beta$ .

除了表面粗糙度, 关联函数  $G(r, t)$  也是一个重要的描述表面生长动力学的特征物理量, 它表示在生长的某一时刻  $t$ , 间隔距离为  $r$  的各个格点生长高度差平方的统计平均, 定义为

$$G(r, t) = \overline{\langle (h(x+r, t) - h(x, t))^2 \rangle}, \quad (6)$$

当  $r \ll L$  时,  $G(r, t)$  和  $r$  满足下面的渐近行为:

$$G(r, t) \propto r^{2\chi_{\text{loc}}}, (r \ll L), \quad (7)$$

其中,  $\chi_{\text{loc}}$  称为局域粗糙度指数, 对于正常的自仿射表面, 局域粗糙度指数和粗糙度指数是相等的<sup>[19]</sup>.

## 2 标度分析

空间分数阶 Edwards-Wilkinson (SFEW) 方程是通过用分数阶 Laplacian 算子来代替二阶空间导数(扩散项)而由局域的 EW 方程演化而得到的, 它可以表示为

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = v \frac{\partial^\alpha h(x, t)}{\partial x^\alpha} + \eta(x, t), \quad (8)$$

其中,  $\partial^\alpha h(x, t)/\partial x^\alpha$  采用 Riesz 类型分数阶导数<sup>[1]</sup>, 定义在  $[a, b]$  区间上的函数  $f(x)$  的  $\alpha$  阶 Riesz 分数阶导数表示为

$$\begin{aligned} {}_a^R D_x^\alpha f(x) &= -(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) \\ &= -\frac{1}{2 \cos \frac{\pi \alpha}{2}} [{}_a^G D_x^\alpha f(x) + {}_x^G D_b^\alpha f(x)], \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  ${}_a^G D_x^\alpha$ ,  ${}_x^G D_b^\alpha$  分别为左、右 Grünwald-Letnikov 分数阶导数, 记为

$${}_a^G D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{(x-a)/h} g_k f(x-kh), \quad (10)$$

$${}_x^G D_b^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{(b-x)/h} g_k f(x+kh), \quad (11)$$

其中,  $g_0 = 1$ ,  $g_k = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

需要指出的是, 根据分数阶微积分理论, 分数阶导数有多种定义方法, 目前比较常用的有 Grünwald-Letnikov 分数阶导数、Riemann-Liouville 分数阶导数、Caputo 分数阶导数和 Riesz 分数阶导数等<sup>[1]</sup>. 我们通过以上定义形式分别对 SFEW 方程进行数值模拟, 结果显示以上各个方法均能得到与标度分析结果相一致的临界指数值. 但是模拟结果也显示, 在模拟参数相同的条件下, 采用 Grünwald-Letnikov 分数阶导数和 Riesz 分数阶导数所得数值模拟结果和标度分析结果误差较小, 故在本文中我们采用了以 Riesz 分数阶导数结合

Grümwald-Letnikov 分数阶导数的数值模拟方式来讨论含关联噪声驱动的 SFEW 方程的标度行为。

SFEW 方程的标度指数可以利用标度分析方法求得：对 SFEW 方程中的各个量作相应的变换， $x \rightarrow bx$ ,  $h(x,t) \rightarrow b^\chi h(x,t)$ ,  $t \rightarrow b^z t$ ,  $\eta(x,t) \rightarrow b^{\rho-(d+z)/2} \eta(x,t)$ , 则 SFEW 方程可以标度变换为

$$b^{\chi-z} \frac{\partial h}{\partial t} = v b^{\chi-\alpha} \frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha} + b^{\rho-(d+z)/2} \eta, \quad (12)$$

上式两边同时乘以  $b^{z-\chi}$ , 得到

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v b^{z-\alpha} \frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha} + b^{\rho-z-(d-z)/2} \eta, \quad (13)$$

利用变换过程中的标度不变性, 即上式相对于变量  $b$  是独立的, 可分别得到三个标度指数

$$\chi = \rho + (\alpha - d)/2, \quad (14)$$

$$\beta = (2\rho + \alpha - d)/2\alpha, \quad (15)$$

$$z = \alpha, \quad (16)$$

当  $d = 1$  时, 标度指数为  $\chi = \rho + (\alpha - 1)/2$ ,  $\beta = (2\rho + \alpha - 1)/2\alpha$ ,  $z = \alpha$ ; 在此基础上取  $\alpha = 2$  时, 则得到  $1+1$  维含关联噪声的 EW 方程的标度指数分别为  $\chi = \rho + 1/2$ ,  $\beta = (2\rho + 1)/4$ ,  $z = 2$ ; 当  $\rho = 0$ ,  $\chi = 1/2$ ,  $\beta = 1/4$ ,  $z = 2$ , 即恢复到局域的 EW 模型的精确解。

### 3 数值方法

首先, 我们对空间变量和时间变量进行数值离散, 定义  $x = i\Delta x (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ ,  $t = j\Delta t (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ , 其中  $\Delta x = L/m$  是空间格点步长,  $L$  是空间尺寸,  $\Delta t = T/n$  是时间格点步长,  $T$  是生长时间。我们采用 Riesz 分数阶导数结合移位的 Grümwald-Letnikov 分数阶导数定义方法对 SFEW 方程进行离散 [11,12,20]。根据 (9)–(11) 式, 离散的 Riesz 分数阶导数可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha h(x,t)}{\partial x^\alpha} &= -\frac{1}{(\Delta x)^\alpha 2 \cos \frac{\pi \alpha}{2}} \\ &\times \left[ \sum_{k=0}^{x/\Delta x + 1} g_k h(x - (k-1)\Delta x, t) \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{(L-x)/\Delta x + 1} g_k h(x + (k-1)\Delta x, t) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

式中,  $g_0 = 1$ ,  $g_k = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ ,  $(k = 1, 2, 3, \dots)$ 。

因此, SFEW 方程可以离散化为

$$\begin{aligned} &\frac{h(x,t + \Delta t) - h(x,t)}{\Delta t} \\ &= -\frac{v}{(\Delta x)^\alpha 2 \cos \frac{\pi \alpha}{2}} \\ &\times \left[ \sum_{k=0}^{x/\Delta x + 1} g_k h(x - (k-1)\Delta x, t) \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{(L-x)/\Delta x + 1} g_k h(x + (k-1)\Delta x, t) \right] \\ &+ (\Delta t)^{-1/2} \eta(x,t), \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $\eta(x,t)$  是空间关联噪声, 为了构造一个满足空间关联的噪声  $\eta(x,t)$ , 我们采用 Peng 等人 [15] 的方法, 先产生一个 Gaussian 非关联的噪声  $\eta_0(x,t)$ , 然后对空间变量  $x$  进行 Fourier 变换, 得到  $\eta_0(q,t)$ . 引入噪声关联因子  $\rho$ ,  $\eta(q,t)$  表示为

$$\eta(q,t) = |q|^{-\rho} \eta_0(q,t), \quad (19)$$

再次对上式中的  $\eta(q,t)$  进行 Fourier 变换, 就回到了空间域中满足空间关联的噪声  $\eta(x,t)$ , 在这个过程中用到了快速 Fourier 变换法. SFEW 方程的显式差分格式表示为

$$\begin{aligned} h(x,t + \Delta t) &= h(x,t) - \frac{v \Delta t}{(\Delta x)^\alpha 2 \cos \frac{\pi \alpha}{2}} \\ &\times \left[ \sum_{k=0}^{x/\Delta x + 1} g_k h(x - (k-1)\Delta x, t) \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{(L-x)/\Delta x + 1} g_k h(x + (k-1)\Delta x, t) \right] \\ &+ \sqrt{\Delta t} \eta(x,t), \end{aligned} \quad (20)$$

其中, 初始条件为  $t = 0, h(i\Delta x, 0) = 0 (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ , 边界条件满足  $h(0,t) = h(L,t)$ .

### 4 结果与讨论

在数值模拟过程中, 各个参数分别选取为  $\Delta t = 0.05$ ,  $\Delta x = 1$ ,  $v = 1$  [12,21], 为了考虑噪声关联因子  $\rho$  对 SFEW 方程标度行为的影响, 我们选取  $\rho$  分别为  $0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ .

图 1 为 SFEW 方程表面在生长初期的形貌, 选择的生长时间为  $t = 50$ , 基底尺寸  $L = 128$ , 我们发现在生长初期, 不考虑空间关联 ( $\rho = 0$ ) 的噪声和考虑空间关联 ( $\rho = 0.1, 0.3, 0.5$ ) 的噪声驱动下的 SFEW 表面形貌是十分相似的, 而且它们的表面粗糙度也很相近。生长到饱和阶段时的形貌如图 2 所示, 选取的生长时间为  $t = 8 \times 10^3$ , 我们发现, 和生长初期一样, 无论是否考虑空间关联噪声 ( $\rho = 0$  和  $\rho \neq 0$ ), SFEW 方程表面形貌均呈现自仿射的分形结构, 但是表面粗糙度却有了相应地改变, 随着噪声关联因子的增加, 表面粗糙度也相应地增大。

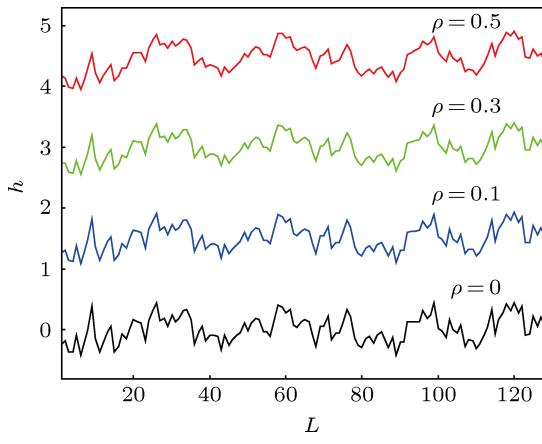


图 1 SFEW 方程 ( $\alpha = 1.9$ ) 在生长初期取不同噪声关联因子的表面形貌

生长指数  $\beta$  由表面生长未达到饱和阶段的表面粗糙度  $W(L, t)$  与时间  $t$  的双对数关系得到, 如图 3 所示, 选取的基底尺寸  $L = 1024$ , 噪声平均为 200 次, 分数阶数  $\alpha = 1.9$ ,  $\rho = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 。从图中可以看出,  $\beta$  随着  $\rho$  的增加而增加, 对于  $\rho = 0$ , 即不考虑空间关联噪声, 得到  $\beta = 0.235 \pm 0.003$ , 和标度分析结果  $\beta = 0.237$  是一致的。将图 3 中各个  $\rho$  值对应的斜率  $\beta$  值求出, 做出生长指数和噪声关联因子的  $\beta$ - $\rho$  关系图, 如图 4(a) 所示, 可以看出, 数值模拟和标度分析结果是相近的。为了得到生长指数和分数阶数的关系, 我们选取一个固定的噪声关联因子  $\rho = 0.2$ , 分数阶数  $\alpha = 1.7, 1.75, 1.8, 1.85, 1.9, 1.95, 2.0$ , 得到  $\beta$ - $\alpha$  关系图 4(b), 从图中可知数值模拟和标度分析结果符合

得很好。

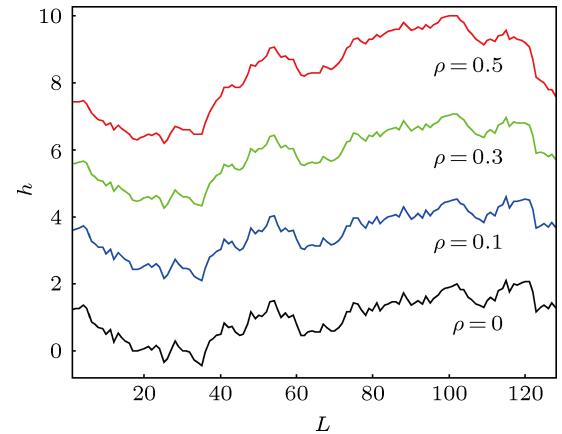


图 2 SFEW 方程 ( $\alpha = 1.9$ ) 在饱和生长阶段取不同噪声关联因子的表面形貌

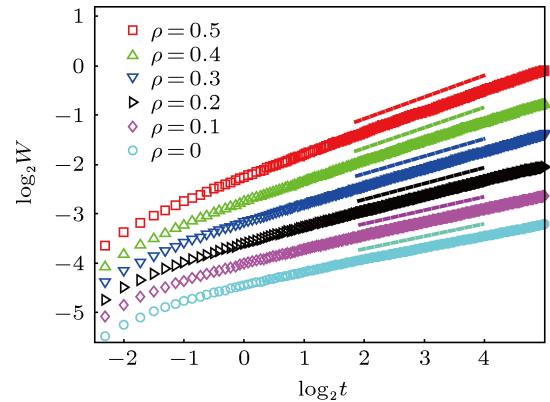


图 3 SFEW 方程 ( $\alpha = 1.9$ ) 在初始生长阶段的  $W$ - $t$  双对数关系

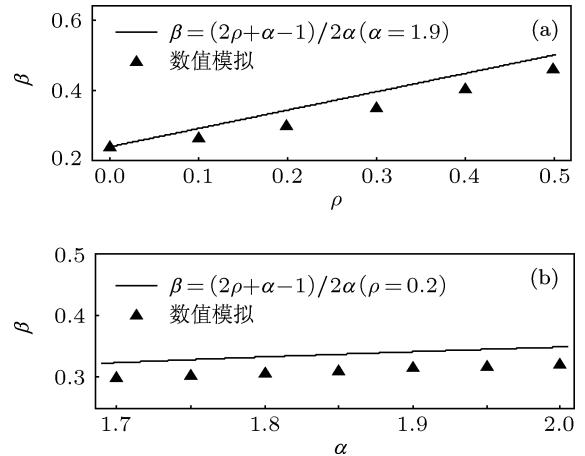
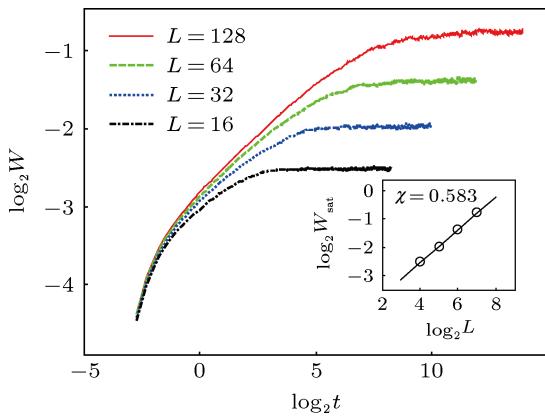


图 4 SFEW 方程的标度关系 (a)  $\beta$ - $\rho$  关系 ( $\alpha = 1.9$ ); (b)  $\beta$ - $\alpha$  关系 ( $\rho = 0.2$ )

对于表面生长到饱和阶段时, 我们通过表面粗糙度与基底尺寸的幂律关系计算出粗糙度指数  $\chi$ 。图 5 给出了表面生长从初期到饱和阶段, 表面粗糙度  $W(L, t)$  和生长时间  $t$  之间的双对数曲线, 其中,

选取的分数阶数  $\alpha = 1.9$ , 噪声关联因子  $\rho = 0.2$ , 基底尺寸分别为  $L = 16, 32, 64, 128$ , 对应的噪声平均分别为 3000, 1700, 1400, 900 次. 从图中可以清晰地看出, 对于不同的基底尺寸  $L$ , 只要有足够的生长时间, 都可以生长到饱和阶段, 此时的表面粗糙度  $W(L, t)$  也达到了一个统计平均值  $W_{\text{sat}}(L)$ , 在图 5 的插图中, 我们做出了  $W_{\text{sat}}-L$  的双对数关系曲线, 通过拟合得到了粗糙度指数  $\chi = 0.583$ . 利用该方法, 我们分别计算出取其他噪声关联因子时, 对应的粗糙度指数值, 并得到  $\chi-\rho$  关系曲线, 如图 6(a) 所示, 可以看出  $\chi$  随着  $\rho$  的增大而增大, 当不考虑空间关联 ( $\rho = 0$ ) 的噪声时, 我们得到  $\chi \approx 0.44$ , 和标度分析结果  $\chi = 0.45$  是相近的, 我们通过对不同尺寸进行模拟发现, 当基底尺寸  $L$  取值不断增大时, 二者之间的误差会越来越小, 所以, 在一定的误差范围内, 数值模拟和标度分析结果是一致的. 图 6(b) 给出的是动力学指数和噪声关联因子的  $z-\rho$  关系, 我们采用关系式  $z = \chi(\rho)/\beta(\rho)$ , 即  $z$  由各个  $\rho$  值所对应的  $\chi, \beta$  值所得到, 如图 4(a) 和图 6(a) 所示. 从图 6(b) 中可以看出, 动力学指数的数值模拟和标度分析结果符合得很好.

图 5 SFEW 方程 ( $\alpha = 1.9, \rho = 0.2$ ) 的  $W-t$  双对数关系

为了进一步研究 SFEW 方程的标度性质, 我们研究了关联函数  $G(r, t)$  与间隔  $r$  的变化规律, 得到了在噪声关联因子  $\rho = 0.2$  和分数阶数  $\alpha = 1.9$  时的局域粗糙度指数. 我们选取一个尺寸为  $L = 1024$  的基底进行生长, 考虑生长过程中 5 个不同时刻的表面生长高度, 得到关联函数和间隔的  $G-r$  双对数关系, 如图 7 所示, 通过拟合  $G(r, t)$  在  $r$  较小区域的

线性斜率, 得到局域粗糙度指数  $\chi_{\text{loc}}$ , 我们发现, 随着时间的增长,  $\chi_{\text{loc}}$  越来越趋近于整体粗糙度指数值  $\chi = 0.583$ .

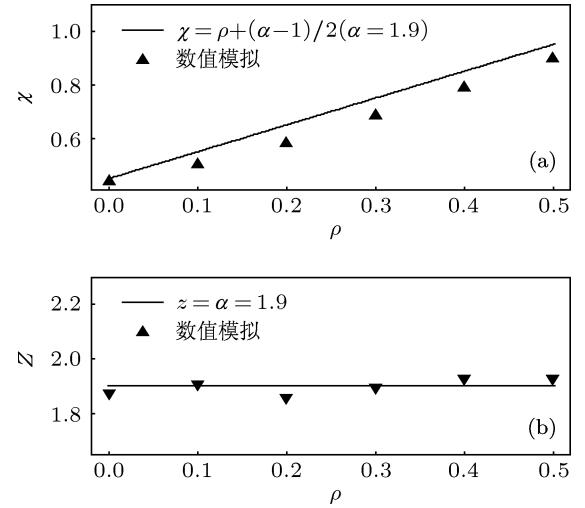
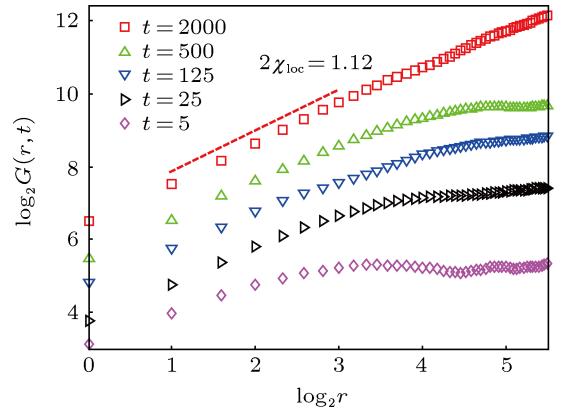
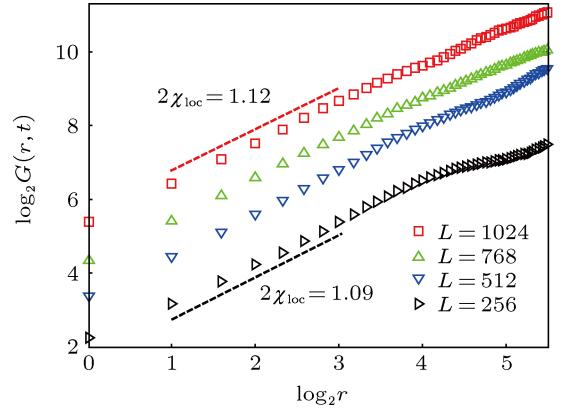
图 6 SFEW 方程 ( $\alpha = 1.9$ ) 的标度关系 (a)  $\chi-\rho$  关系; (b)  $z-\rho$  关系图 7 SFEW 方程 ( $\alpha = 1.9, \rho = 0.2$ ) 在不同生长时刻的  $G-r$  双对数关系图 8 SFEW 方程 ( $\alpha = 1.9, \rho = 0.2$ ) 在不同基底尺寸生长下的  $G-r$  双对数关系

图 8 给出的是选取四个尺寸分别为  $L =$

256, 512, 768, 1024 的基底进行生长, 考虑它们都在一个较长的生长时刻  $t = 2 \times 10^3$  时的表面生长高度, 得到的关联函数和间隔的  $G\text{-}r$  双对数关系, 拟合得到局域粗糙度指数  $\chi_{loc}$ , 我们发现, 在生长时间足够长时, 相对较大的基底尺寸生长得到的  $\chi_{loc}$  和整体粗糙度指数  $\chi = 0.583$  是非常接近的. 因此, SFEW 方程没有出现奇异动力学标度行为, 且不具有明显的有限尺寸效应.

## 5 结 论

本文研究了含长程关联噪声的空间分数阶随机生长方程, 得到了不同噪声关联因子和分数阶数时的生长指数、粗糙度指数、动力学指数等标度指数. 我们发现在生长初期和饱和生长阶段, SFEW 方程的表面形貌均呈现自仿射分形结构; 所得到

的标度指数  $\beta$  和  $\chi$  为分数阶数  $\alpha$  和噪声关联因子  $\rho$  的关系函数, 且均随  $\alpha$  和  $\rho$  的增加而增加. 无论是否考虑空间关联噪声的影响 ( $\rho = 0$  和  $\rho \neq 0$ ), 数值模拟和标度分析结果都吻合得很好; 而对于  $\alpha = 2.0$ , SFEW 方程则恢复到局域的 EW 方程中去. 研究结果表明, 噪声关联因子和分数阶数均影响到 SFEW 方程的动力学标度行为, 且表现为连续变化的普适类. 在选取较大的基底尺寸和较长的生长时间时, 通过对整体和局域粗糙度指数的计算比较, 结果显示  $\chi_{loc} \approx \chi$ , 反映出空间关联噪声驱动下的 SFEW 方程没有出现奇异动力学行为, 仍然遵守 Family-Vicsek 正常标度规律. 我们的研究也表明, Riesz 分数阶导数并结合移位 Grünwald-Letnikov 分数阶导数的方法对随机空间分数阶微分方程的数值模拟是一种行之有效的方法, 对处理分数阶动力学模型的标度行为提供了一个有效的数值方法.

- 
- [1] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York and London: Academic Press)
  - [2] Family F, Vicsek T 1991 *Dynamics of Fractal Surfaces* (Singapore: World Scientific)
  - [3] Chang F X, Chen J, Huang W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1113 (in Chinese) [常福宣, 陈进, 黄薇 2005 物理学报 **54** 1113]
  - [4] Torvik P J, Bagley R L 1984 *Transaction of the ASME* **51** 294
  - [5] Liu F W, Anh V, Turner I, Zhang P H 2004 *ANZIAM Journal* **45** 461
  - [6] Leith J R 2003 *Signal Processing* **83** 2397
  - [7] Burov S, Barkai E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 070601
  - [8] Mann J A, Woyczynski W A 2001 *Physica A* **291** 159
  - [9] Katzav E 2003 *Phys. Rev. E* **68** 031607
  - [10] Kardar M, Parisi G, Zhang Y C 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 889
  - [11] Xia H, Tang G, Han K, Hao D P, Xun Z P 2009 *Eur. Phys. J. B* **71** 237
  - [12] Xia H, Tang G, Ma J J, Hao D P, Xun Z P 2011 *J. Phys. A* **44** 275003
  - [13] Tang G, Ma B K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 851 (in Chinese) [唐刚, 马本堃 2001 物理学报 **50** 851]
  - [14] Hao D P, Tang G, Xia H, Chen H, Zhang L M, Xun Z P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2018 (in Chinese) [郝大鹏, 唐刚, 夏辉, 陈华, 张雷明, 寻之朋 2007 物理学报 **56** 2018]
  - [15] Peng C K, Havlin S, Schwartz M, Stanley H E 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2239
  - [16] Wu M, Billah K Y R, Shinohara M 1995 *Phys. Rev. E* **51** 995
  - [17] Li M S 1997 *Phys. Rev. E* **55** 1178
  - [18] Edwards S F, Wilkinson D R 1982 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **381** 17
  - [19] Family F, Vicsek T 1985 *J. Phys. A* **18** 75
  - [20] Meerschaert M M, Tadjeran C 2004 *J. Comp. Appl. Math.* **172** 65
  - [21] Katzav E, Schwartz M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 052603

# Dynamic scaling behavior of the space-fractional stochastic growth equation with correlated noise\*

Ma Jing-Jie Xia Hui<sup>†</sup> Tang Gang

(Department of Physics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

(Received 14 May 2012; revised manuscript received 18 August 2012)

## Abstract

In order to study the dynamic scaling behavior of the space-fractional stochastic growth equation with correlated noise, we simulate numerically the space-fractional Edwards-Wilkinson (SFEW) equation driven by correlated noise in  $(1+1)$ -dimensional case based on the Riesz-and the Grünwald-Letnikov-type fractional derivatives. The scaling exponents including growth exponent, roughness exponent and dynamic exponent with different noise correlation factors and fractional orders are obtained, which are consistent with the corresponding scaling analysis. Our results show that the noise correlation factors and fractional orders affect the dynamic scaling behavior of the SFEW equation, which displays a continuous changing universality class.

**Keywords:** correlated noise, space-fractional derivative, Edwards-Wilkinson equation, surface roughness

**PACS:** 05.40.-a, 45.10.Hj, 68.35.Fx

**DOI:** 10.7498/aps.62.020501

\* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. 2010LKWL04).

† Corresponding author. E-mail: hxia@cumt.edu.cn