一种分数阶非线性系统稳定性判定定理的问题及分析*

李丽香 彭海朋 罗群† 杨义先 刘喆

(北京邮电大学信息安全中心, 北京 100876)

(2012 年 4 月 2 日收到; 2012 年 8 月 16 日收到修改稿)

分数阶非线性系统稳定性理论的研究对于分数阶混沌系统同步控制的应用具有重要价值, 将分数阶非线性系统稳定性判断转化为相应整数阶非线性系统稳定性判断的探讨很有意义. 通过实例表明了: 对于时变系数矩阵, 如果整数阶系统稳定, 其对应的阶次小于 1 的分数阶系统也稳定的判定定理是错误的, 并分析了问题产生的原因.

关键词: 分数阶系统, 稳定性理论, 时变系数矩阵

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.62.020502

1 引言

分数阶微分的发展历时三百余年, 与传统的整数阶微分相比, 分数阶微分可以更好的描述一些实际系统 [1,2], 分数阶微分系统比整数阶微分系统更具普遍性使其理论研究更具广泛的应用价值, 因而备受关注. 随着分数阶微分理论的发展, 近年来将分数阶微分理论应用于分数阶微分系统控制的研究方兴未艾, 而分数阶微分系统的同步控制正是其中的一个热点课题, 引起了学者们的极大兴趣 [3−6]. 由于系统的同步控制在理论上可以转化为同步误差系统的稳定性控制, 所以分数阶系统稳定性理论的研究对于分数阶系统的同步控制有重要的意义.

文献 [7—10] 探讨了阶次小于 1 的分数阶系统的稳定理论 (本文的分数阶系统都指阶次小于 1 的情况). 首先, 文献 [7] 提出了 “基于 Lyapunov 方程的分数阶混沌系统稳定性判定定理”, 并在文献 [8] 将该定理应用到了异结构分数阶超混沌系统的自适应同步, 接着, 文献 [9] 又给出了与文献 [7] 的 “基于 Lyapunov 方程的分数阶混沌系统稳定性判定定理” 等价的另一种形式, 并认为 “基于该理论, 分数阶系统控制器的设计方法也可以类似于整数阶系统控制器的设计方法”. 之后, 在文献 [10] 更进一步认为 “如果整数阶系统稳定, 则该系统的分数阶形式也稳定”. 如果此判定正确, 则 “分数阶系统的控制与同步可以化为整数阶来处理, 这样既可以使分数阶系统的控制与同步问题得到简化, 又可以将整数阶系统的控制与同步方法推广到分数阶混沌系统中”.

本文重点研究了文献 [10] 的分数阶非线性系统稳定性判据的问题, 通过实例指出: 对于时变系数矩阵, 文献 [10] 的判定定理是错误的. 进一步发现文献 [7] 和 [9] 的分数阶非线性系统稳定理论也存在类似的问题, 我们分析了产生问题的原因, 以便引起注意.

2 分数阶非线性系统稳定性判定定理问题

2.1 原结论描述

文献 [10] 将一般的非线性系统表示成如

* 国家自然科学基金 (批准号: 61100204, 61170269) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2012T50209) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: luoqun@bupt.edu.cn

下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统状态变量, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 为包含变量的系数矩阵.

其对应的分数阶形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

其中, 阶数 $\alpha<1$.

文献 [10] 首先给出受控分数阶系统 (2) 稳定的条件作为引理. 该引理为: “对受控分数阶混沌系统 (2), 如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的任意特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)|\geqslant\frac{\alpha\pi}{2}$, 则受控系统稳定”.

然后又证明了定理: “如果系统 (1) 渐近稳定, 则在状态变量 x 的变化范围内 (除去原点外) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的所有特征值的实部都不大于零”.

从而根据引理及定理得出: “如果整数阶系统 (1) 渐近稳定, 则系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的所有特征值的实部都不大于零, 故分数阶系统 (2) 也渐近稳定” 的判定结论.

2.2 几个反例

注意到非线性整数阶系统 (1) 和对应分数阶系统 (2) 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 通常含有状态变量 x, 属于时变矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$, 下面实例说明: 当非线性整数阶系统 (1) 和对应分数阶系统 (2) 的系数矩阵为时变矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 时, 文献 [10] 给出的引理及定理都不正确.

目前, 分数阶系统数值仿真比较有效的算法是改进的预估校正法 [11]. 由文献 [11] 可知, 分数阶微分方程

$$\begin{aligned}&D^{\alpha}y(t)=f(y(t),t),\\&y(0)=y_0,\quad 0<\alpha<1\end{aligned} \tag{3}$$

的解等价于积分方程

$$y(t)=y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(y(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

的解. 在 $[0,t]$ 插入等分点 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}=t$, 其中 $t_{j+1}-t_j=h(j=0,1\cdots,n)$ 是步长, 用改进的预估校正法 [11], 则 (3) 式的数值解为

$$y(t_{n+1})=\begin{cases}y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(f(y^p(t_1),t_1)\\+\alpha\cdot f(y(t_0),t_0)),\\\qquad n=0,\\y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(f(y^p(t_{n+1}),t_{n+1})\\+(2^{\alpha+1}-2)f(y(t_n),t_n))\\+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_jf(y(t_j),t_j),\\\qquad n\geqslant1,\end{cases} \tag{5}$$

其中

$$y^p(t_{n+1})=\begin{cases}y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(y(t_0),t_0)),\\\qquad n=0,\\y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(2^{\alpha+1}-1)\\\times f(y(t_n),t_n))\\+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_jf(y(t_j),t_j),\\\qquad n\geqslant1.\end{cases} \tag{6}$$

且

$$a_j=\begin{cases}n^{\alpha+1}-(n-\alpha)(n+1)^{\alpha}, & j=0,\\(n-j+2)^{\alpha+1}+(n-j)^{\alpha+1}\\-2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1\leqslant j\leqslant n,\\1, & j=n+1.\end{cases} \tag{7}$$

算法可达到精度 $O(h^{\min\{1+2\alpha,2\}})$.

将上述改进的预估校正法用于分数阶微分方程组

$$\begin{aligned}&D^{\alpha}x(t)=f(x(t),y(t),t),\\&x(0)=x_0,\\&D^{\alpha}y(t)=g(x(t),y(t),t),\\&y(0)=y_0,\\&0<\alpha<1,\end{aligned} \tag{8}$$

仍取 h 为步长, 可得 (8) 式的数值解为

$$
\begin{aligned}
&x(t_{n+1})=\begin{cases} x_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(f(x^P(t_1),y^P(t_1),t_1)+\alpha f(x(t_0),y(t_0),t_0)), \quad n=0,\\ x_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(f(x^P(t_{n+1}),y^P(t_{n+1}),t_{n+1})+(2^{\alpha+1}-2)f(x(t_n),y(t_n),t_n))\\ +\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j f(x(t_j),y(t_j),t_j), \quad n\geqslant 1,\end{cases}\\
&y(t_{n+1})=\begin{cases} y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(g(x^P(t_1),y^P(t_1),t_1)+\alpha g(x(t_0),y(t_0),t_0)), \quad n=0,\\ y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(g(x^P(t_{n+1}),y^P(t_{n+1}),t_{n+1})+(2^{\alpha+1}-2)\cdot g(x(t_n),y(t_n),t_n))\\ +\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j g(x(t_j),y(t_j),t_j), \quad n\geqslant 1,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&x^p(t_{n+1})=\begin{cases} x_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(x(t_0),y(t_0),t_0)), \quad n=0\\ x_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(2^{\alpha+1}-1)f(x(t_n),y(t_n),t_n))+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j f(x(t_j),y(t_j),t_j), \quad n\geqslant 1.\end{cases}\\
&y^p(t_{n+1})=\begin{cases} y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}g(x(t_0),y(t_0),t_0)), \quad n=0\\ y_0+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(2^{\alpha+1}-1)g(x(t_n),y(t_n),t_n))+\dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j g(x(t_j),y(t_j),t_j), \quad n\geqslant 1.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

而 $a_j(j=0,1,\cdots,n+1)$ 仍由 (7) 式给出.

例 1 考虑如下分数阶线性时变系统

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{0.95}x_1}{\mathrm{d}t^{0.95}}&=-x_1+10x_2,\\
\frac{\mathrm{d}^{0.95}x_2}{\mathrm{d}t^{0.95}}&=(-1+0.9\sin 3t)x_1+0.95x_2,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中, 系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -1+0.9\sin 3t & 0.95\end{pmatrix}$ 是时变的, 由 $\det(\boldsymbol{A}(t)-\lambda\boldsymbol{I})=0$, 求出特征值

$$
\lambda_{1,2}=\frac{-0.05\pm\sqrt{0.05^2-4(9.05-9\sin 3t)}}{2}.
$$

显然特征值的实部都小于零, 满足文献 [10] 引理的条件: 系统的系数矩阵的任意特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)|\geqslant\dfrac{\alpha\pi}{2}$. 但没有得到文献 [10] 引理的结论. 用改进的预估校正法, 取初值 $(x_1(0),x_2(0))^{\mathrm{T}}=(0.1,0.1)^{\mathrm{T}}$, 步长 $h=0.01$, 按 (7) 式、(9) 式和 (10) 式, 可得系统 (11) 的数值解, 仿真结果如图 1 所示, 发现系统是随时间发散而不是稳定的.

例 2 考虑如下分数阶线性时变系统

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{0.95}x_1}{\mathrm{d}t^{0.95}}&=((-b+a)+a\cos\omega t)x_1\\
&\quad+(b-a\sin\omega t)x_2,\\
\frac{\mathrm{d}^{0.95}x_2}{\mathrm{d}t^{0.95}}&=(-b-a\sin\omega t)x_1\\
&\quad+((-b+a)-a\cos\omega t)x_2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

系数矩阵为

$$
\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}(-b+a)+a\cos\omega t & b-a\sin\omega t\\ -b-a\sin\omega t & (-b+a)-a\cos\omega t\end{pmatrix}.
$$

求得特征值为

$$
\lambda_{1,2}=(a-b)\pm\sqrt{a^2-b^2}.
$$

取 $a=0.75$, $b=1$, $\omega=2$, 显然 $a-b=-0.25<0$, 满足文献 [10] 引理的条件: 系统的系数矩阵的任意特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)|\geqslant\dfrac{\alpha\pi}{2}$. 但也没有得到文献 [10] 引理的结论, 取初值 $(x_1(0),x_2(0))^{\mathrm{T}}=(0.1,0.1)^{\mathrm{T}}$, 步长 $h=0.01$, 按 (7) 式、(9) 式和 (10) 式, 可得系统 (12) 的数值解, 仿真结果如图 2 所示, 系统仍是不稳定的.

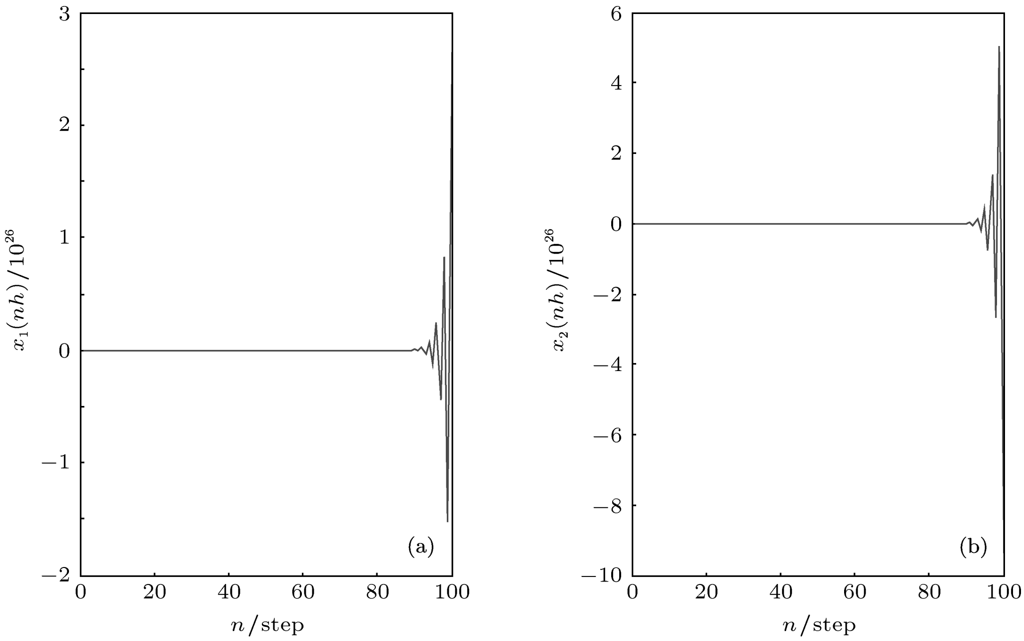

图 1　系统 (11) 状态变化曲线　(a) x_1; (b) x_2

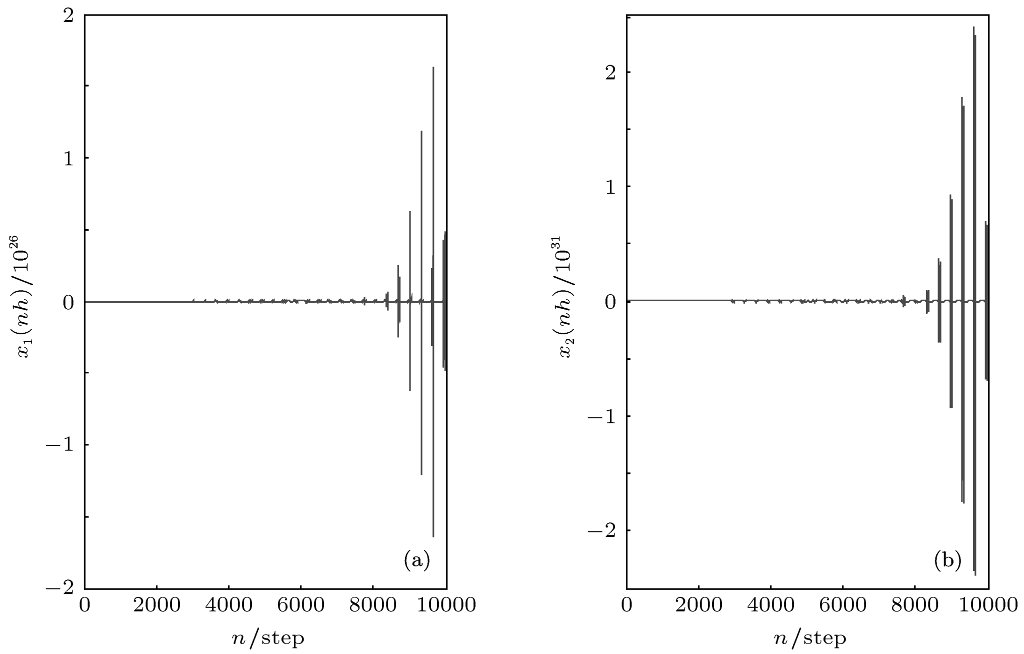

图 2　系统 (12) 状态变化曲线　(a) x_1; (b) x_2

例 3　考虑如下整数阶线性时变系统

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= (-b+a\sin\omega t)x_1 + a(\cos\omega t)x_2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= a(\cos\omega t)x_1 + (-b-a\sin\omega t)x_2.\end{aligned} \tag{13}$$

系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} -b+a\sin\omega t & a\cos\omega t \\ a\cos\omega t & -b-a\sin\omega t \end{pmatrix}.$$

特征值为 $\lambda_{1,2} = -b \pm a$, 根据文献 [10] 的定理, 系统 (13) 渐近稳定时应该系数矩阵的所有特征值的实部都不大于零, 满足 $a < b, a > 0$. 然而事实上, 当 $\frac{3}{5}a < b$, $a > 0$, 就有系统 (13) 稳定 [12]. 比如取 $a = 7.5$, $b = 5.5$, $\omega = 12$, 系统 (13) 渐近稳定, 满足文献 [10] 定理的条件, 但没有得到文献 [10] 定理的结论, 而是由于 $a > b$, 使得系数矩阵有一个特征值的实部大于零.

从以上例 1 和例 2 可以看出文献 [10] 的引理对分数阶线性时变系统不正确, 例 3 又表明文献 [10] 的定理对整数阶线性时变系统也不正确. 所以当非线性整数阶系统 (1) 和对应分数阶系统 (2) 的系数矩阵为时变矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 时, 不附加其他条件下, 根据引理及定理得出的: 如果整数阶系统 (1) 渐近稳定, 则分数阶系统 (2) 也渐近稳定的判定结论不正确.

3 问题分析

3.1 问题产生的基本原因

文献 [7] 和文献 [9, 10] 在证明分数阶系统稳定理论时, 都提到了 Matignon 给出的分数阶线性系统稳定的充要条件 [13], 并在文献 [8, 9] 中将它描述为下面的引理 1.

引理 1 考虑自治系统

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}$, $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$.

1) 系统 (14) 是渐近稳定的, 当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ, $|\arg(\lambda)|>\dfrac{\alpha\pi}{2}$ 都成立;

2) 系统 (14) 是稳定的, 当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ, $|\arg(\lambda)|\geqslant\dfrac{\alpha\pi}{2}$ 都成立.

注意到 “引理 1 给出了分数阶线性系统的稳定性判定定理, 然而对于非线性系统系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中通常含有状态变量, 难于直接通过特征值判断系统的稳定性”[8]. 于是针对这一问题, 文献 [7] 提出了一个 “基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定性判定定理”, 并且在文献 [8, 9] 中作为引理 2 使用. 但是在文献 [7] 证明 “基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定性判定定理” 时和在文献 [10] 的思想一样, 都将引理 1 中的常系数矩阵 $\boldsymbol{A}$, 直接改为包含状态变量的系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 来引用了, 而这正是使文献 [10] 的分数阶非线性系统稳定性判据产生问题的根本原因.

3.2 冻结时间特征值方法的局限

显然, 非线性系统系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 含有状态变量, 意味着非线性系统系数矩阵属于时变矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$. 而引理 1 的 (14) 式中常系数矩阵 $\boldsymbol{A}$, 改为包含状态变量的系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, 更一般地说改为时变系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$, 结论就不一定成立了.

从某种意义上说经典系统是分数阶系统的一种特殊情况, 考虑系统 (14) 的阶数 $\alpha=1$ 且常系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 改为时变系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 时的下式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{15}$$

例 3 已表明: $\boldsymbol{A}(t)$ 的所有特征值实部都小于零, 不是系统 (15) 稳定的必要条件; 下面的例 4[14] 将表明也不是系统 (15) 稳定的充分条件.

例 4 考虑如下整数阶线性时变系统

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&=(-1-9\cos^2 6t+12\sin 6t\cos 6t)x_1\\&\quad+(12\cos^2 6t+9\sin 6t\cos 6t)x_2,\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}&=(-12\sin^2 6t+9\sin 6t\cos 6t)x_1\\&\quad+(-1-9\sin^2 6t-12\sin 6t\cos 6t)x_2.\end{aligned} \tag{16}$$

容易计算系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=-10$ 满足所有特征值实部都小于零, 而直接求出系统 (16) 的通解为

$$\begin{aligned}x_1(t)&=c_1(\cos 6t+2\sin 6t)\mathrm{e}^{2t}\\&\quad+c_2(\sin 6t-2\cos 6t)\mathrm{e}^{-13t},\\x_2(t)&=c_1(-\sin 6t+2\cos 6t)\mathrm{e}^{2t}\\&\quad+c_2(\cos 6t+2\sin 6t)\mathrm{e}^{-13t},\end{aligned}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, 显然系统 (16) 的通解不稳定.

可见, 对于整数阶线性时变系统 (15), 由时变系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的特征方程 $\det(\boldsymbol{A}(t)-\lambda\boldsymbol{I})=0$ 所得到的对每个固定时间的根 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_n(t)$, 姑且称为 “冻结时间特征值”[12], 这 n 个 “冻结时间特征值” 不能像真正固定时间的常系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个常数特征值一样确定系统的稳定性.

究其原因, 从下式可见一斑: $d[a(t)y(t)]/\mathrm{d}t=a(t)\dot{y}(t)+\dot{a}(t)y(t)\neq a(t)\dot{y}(t)$. 一般来说, 函数乘函数的导数不同于常数乘函数的导数.

因此, 在不加约束时, 将整数阶线性系统依据常系数矩阵特征值来判定系统稳定性的结论, 推广到整数阶线性时变系统依据时变系数矩阵的 “冻结时间特征值” 来判定系统稳定性不正确. 而整数阶系统是分数阶系统的特例, 故这一结论也可以适用于分数阶系统.

对于整数阶时变线性系统的稳定性, 文献 [15] 介绍了工程技术中乐于采用的缓变系数线性系统

的经典冻结系数法, 以及放宽要求扩大应用范围的改进经典冻结系数法.

对于分数阶非线性系统的稳定性, 文献 [16] 给出了: 如果自治非线性分数阶方程

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{\alpha}x(t) &= f(x(t),t),\\ x(a) &= x_a, \quad 0<\alpha<1, \end{aligned} \tag{17}$$

有 $f'(x)\in C[a,+\infty)$, 则当 $\lambda=f'(0)<0$ 时, 系统 (17) 的平衡点 $x^*=0$ 是局部渐近稳定的 (即 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall x_a\in\{y:\|y\|<\delta\}$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x(t)\|=0$).

4 结 论

由于不能简单地将分数阶线性系统依据常系数矩阵特征值来判定系统稳定性的结论, 推广到分数阶线性时变系统依据时变系数矩阵的 "冻结时间特征值" 来判定系统稳定性, 故而在没有其他约束条件时, 文献 [10] 的: 如果整数阶非线性系统渐近稳定, 则相应分数阶非线性系统也渐近稳定的判定结论不正确, 这也动摇了文献 [7—9] 的分数阶非线性系统稳定性判据. 在探索分数阶系统的稳定性时, 特征值与 "冻结时间特征值" 对于时变系统稳定性的作用不同, 需要引起我们的足够重视而加以注意.

[1] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press)

[2] Chen W C 2008 *Chao, Solitions and Fractals* **36** 1305

[3] Lu J G 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 519

[4] Wang X Y, He Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1485 (in Chinese) [王兴元, 贺毅杰 2008 物理学报 **57** 1485]

[5] Si G Q, Sun Z Y, Zhang Y B 2011 *Chin. Phys.* B **20** 080505

[6] Zhang R X, Yang S P 2012 *Chin. Phys.* B **21** 030505

[7] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7522 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]

[8] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1441 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 1441]

[9] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2235 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 2235]

[10] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4402 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 4402]

[11] Deng W H 2007 *Journal of Computational Physics* **227** 1510

[12] Zhu J 1992 *System Theory, Proceedings The 24th Southeastern Symposium on and The 3rd Annual Symposium on Communications, Signal Processing Expert Systems, and ASIC VLSI Design* Mar1–3, 1992 p355

[13] Matignon D 1996 *IMACS SMC Proceedings* (Lille: IEEE) p963

[14] Rosenbrock H H 1963 *Journal of Electronics and Control* **15** 73

[15] Liao X X 2010 *Theory Methods and Application of Stability* (2nd Ed.) (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press) p57 (in Chinese) [廖晓昕 2010 稳定性的理论、方法和应用 (第二版) (武汉: 华中科技大学出版社) 第 57 页]

[16] Deng W H 2010 *Nonlinear Analysis* **72** 1768

Problem and analysis of stability decidable theory for a class of fractional order nonlinear system*

Li Li-Xiang Peng Hai-Peng Luo Qun† Yang Yi-Xian Liu Zhe

(*Information Security Center, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing* 100876, *China*)

(Received 2 April 2012; revised manuscript received 16 August 2012)

Abstract

The research on the stability theory of fractional order nonlinear system has an important value for the application of synchronization and the control of fractional order chaotic system. The discussion that the stability discrimination of fractional order nonlinear system is converted into that of corresponding integer order nonlinear system has an important significance. In this paper, through the examples, for time-varying coefficient matrix, we point out the existing mistake of the discrimination theorem that states that if the integer system is stable, then its corresponding fractional system with order less than one is also stable. We also analyze the causes of the mistake.

Keywords: fractional order system, stability theory, time-varying coefficient matrix

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.62.020502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61100204, 61170269), and the China Postdoctoral Science Foundation Funded Project (Grant No. 2012T50209).

† Corresponding author. E-mail: luoqun@bupt.edu.cn