

平面单位区域内二次曲线混沌特性研究

于万波[†] 杨灵芝

(大连大学信息工程学院, 大连 116622)

(2012年4月16日收到; 2012年8月6日收到修改稿)

研究平面单位区域内的二次函数的混沌特性, 发现标准二次映射是 Li-Yorke 混沌的, 也是 Devaney 混沌的; 在满足一定条件下, 还存在大量的二次函数是混沌的. 一些二次函数可以使用平移与缩放等变换化为标准二次函数, 其混沌特性不变; 同时, 对单位区域上的非标准二次函数进行了初步的研究. 通过计算 Lyapunov 指数以及绘制分岔图等对二次曲线的混沌特性进一步分析, 其中参数变化的分岔图以及混沌曲线控制点的区域分布图等有一定的研究价值. 另外研究表明, 使用多个二次曲线交叉迭代能够产生较好的混沌序列, 该混沌序列可以应用于图像加密等一些实际应用领域.

关键词: 混沌, 二次函数, 平面单位区域

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.020503

1 引言

20 世纪 80 年代以来, 在混沌领域中关于动力系统的研究已经很深入, 特别是一维情形的研究时间较长, 得到的结果很多^[1-13], 但是尚未发现有文献对单位区域内的二次函数混沌特性进行深入研究. 本文研究平面单位区域内二次函数(二次标准单位函数)的混沌特性. 二次连续函数如果最大值是 1, 最小值为 0; 自变量的取值范围也是在 0 与 1 之间, 自变量取值为 0 时, 函数值为 0, 自变量取值 1 时函数值为 0, 称这样的二次函数为标准单位函数.

单位区域在混沌形成的过程中有着重要的作用. 著名的 Logistic 映射

$$f(x) = \mu x(1-x). \quad (1)$$

当 $\mu = 4$ 的时候, 就是标准单位函数. 另外一些著名的混沌映射, 例如流体力学中, 无穷动力系统的 Navier-Stokes 方程简化后得到映射

$$f(x) = 1 - 2x^2.$$

该映射的函数值与自变量都在 -1 到 1 之间变化, 所以可以通过缩放(横轴纵轴缩放相同的倍数)

与平移, 变换成(1)式所示的单位区域上的 Logistic 映射, 变换前后, 映射得到的混沌序列的混沌特性不变, 事实上, 该混沌序列也进行了相同的缩放与平移.

从几何直观角度来解释, 容易理解单位区域的作用, 点在一个单位区域内迭代运算, 被压缩在单位区域内, 在这个区域内折叠震荡, 即不收敛也不发散, 就有了产生混沌的可能. 理论上已经证明, 空间中正则非退化返回扩张不动点(回归排斥子)导致 Devaney 和 Li-Yorke 意义下混沌^[5], 单位区域的作用就是使产生回归排斥子成为可能.

Chen 等提出的用于系统混沌化的迭代取余方法, 就是实现了映射的中心化、区域化^[6,7]. 文献[8]中给出的一些多项式混沌判定方法也与单位区域有直接关系, 其中一些定理的条件就是把多项式映射限定在一个单位区域内.

关于 Li-Yorke 混沌有下面引理:

引理 1(Li-Yorke 定理^[9])

$F: J \rightarrow J$ 是区间 J 上的连续映射, 如果有一点 $a \in J$ 使得 $b = f(a), c = f^2(a)$ 与 $d = f^3(a)$, ($d = f^3(a)$ 表示 $d = f(f(f(a)))$) 并且满足 $d \leq a < b < c$ (或 $d \geq a > b > c$), 那么 F 就是 Li-Yorke 混沌的.

[†] 通讯作者. E-mail: yuwanbo@dlu.edu.cn

关于 Devaney 混沌有下面定义 [3]:

定义 1 称一有界闭域 (X, d) 上的映射 $f: X \rightarrow X$ 是混沌的, 如果它满足下面条件:

1) 它是初值敏感的, 即存在 $\delta > 0$, 使得对于任何 $x \in X$ 与 x 的任何一个邻域 B , 存在 $y \in B$ 和自然数 k , 满足

$$|f^k(x) - f^k(y)| > \delta;$$

2) 它是拓扑传递的, 即对于任何的两个开集 $U, V \subseteq X$, 存在自然数 k , 使得

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset;$$

3) 它在 X 中有稠密的周期轨道.

Banks 等证明了条件 1) 和 2) 一起可以推出条件 3) [10], 此外在特定意义下可以验证 Devaney 混沌强于 Li-Yorke 混沌.

2 单位区域上二次曲线 Li-Yorke 混沌研究

二次曲线包括抛物线、椭圆、双曲线与相交直线等, 为了研究方便, 可以用下式所示的二次有理贝塞尔曲线参数方程表示所有的二次函数:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{w_0(1-t)^2x_0 + 2w_1t(1-t)x_1 + w_2t^2x_2}{w_0(1-t)^2 + 2w_1t(1-t) + w_2t^2}, \\ y(t) &= \frac{w_0(1-t)^2y_0 + 2w_1t(1-t)y_1 + w_2t^2y_2}{w_0(1-t)^2 + 2w_1t(1-t) + w_2t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

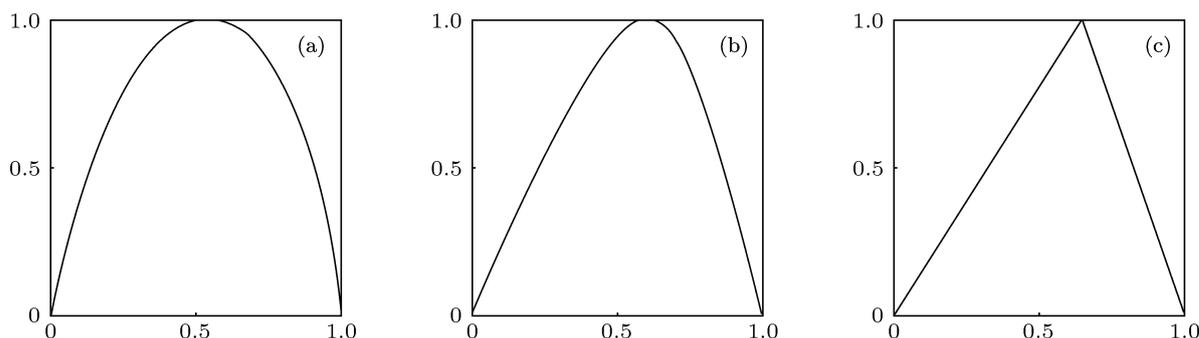


图 1 单位区域内的各种标准二次曲线 (a) 椭圆; (b) 双曲线; (c) 近似相交直线

在图 1(a) 中, $w_0 = 2, w_1 = 1, w_2 = 2, x_1 = 0.65, y_1 = 3$, 该曲线是椭圆, 最大值为 1. 在图 1(b) 中, $w_0 = 2, w_1 = 5, w_2 = 2, x_1 = 0.65, y_1 = 1.4$, 该曲线是双曲线, 最大值为 1. 在图 1(c) 中, $w_0 = 0, w_1 = 15, w_2 = 0, x_1 = 0.65, y_1 = 1.013$, 是两条近似的相交直线.

其中, t 为参数, w_0, w_1, w_2 是需要给定的系数, 这三个系数可以决定曲线的类型; 设 $k^2 = \frac{w_0w_2}{w_1^2}$, 当 $k = 1$ 时, (2) 式确定的曲线是抛物线, 当 $k > 1$ 时, 曲线是椭圆, 当 $k < 1$ 时, 曲线是双曲线.

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 称为控制点, 能够控制曲线的形状, $(x_0, y_0), (x_2, y_2)$ 分别是曲线的始点与终点, (x_1, y_1) 控制曲线凸起与凹陷的高度.

为了把曲线压缩到单位区域, 令 (2) 式中的 (x_0, y_0) 为 $(0, 0)$, (x_2, y_2) 为 $(1, 0)$, (2) 式简化为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2w_1t(1-t)x_1 + w_2t^2}{w_0(1-t)^2 + 2w_1t(1-t) + w_2t^2}, \\ y(t) &= \frac{2w_1t(1-t)y_1}{w_0(1-t)^2 + 2w_1t(1-t) + w_2t^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

这样曲线的下面两个端点就被固定在 X 轴上, 一个在坐标原点, 一个在单位区域的右下角顶点 $(1, 0)$ 上.

当 $t = 0.5$ 时, (3) 式所示的二次函数有最大值, 最大值为 $y(t) = \frac{2w_1y_1}{w_0 + 2w_1 + w_2}$. 令最大值 $y(t) = 1$, 该二次函数即为标准单位映射函数, 这样可以解出 y_1 与 w_0, w_1, w_2 的关系, 即

$$y_1 = \frac{w_0 + 2w_1 + w_2}{2w_1}. \quad (4)$$

所以, 当 y_1 与 w_0, w_1, w_2 满足 (4) 式的条件, t 从 0 变化到 1 时, 该函数是标准单位映射函数.

图 1 给出了三个标准单位映射函数 (及其参数等).

当 $k^2 = \frac{w_0w_2}{w_1^2}$ 趋近于 0 时, 双曲线接近于两条相交直线, 这样就可以近似的构造出帐篷映射, 如图 1(c) 所示.

根据引理 1, 很容易证明标准单位二次函数是 Li-Yorke 混沌的.

下面使用引理 1 进行分析, 当 w_0, w_1, w_2, x_1, y_1 满足什么条件时, (3) 式所表示的映射是 Li-Yorke 混沌的.

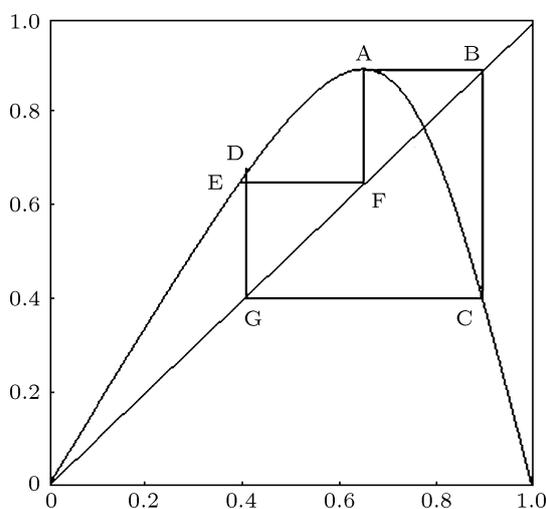


图 2 近似标准单位二次曲线的混沌分析

如图 2 所示, A 点的横坐标就是 E 点的纵坐标, A 点经过两次映射到 D 点, 根据引理 1, 如果 D 点的纵坐标大于 E 点的纵坐标, 那么就是 Li-Yorke 混沌的.

首先计算曲线的最大值的 A 点坐标, 把 $t = 0.5$ 代入到 (3) 式中, 即可计算出曲线的最大值坐标 (x_{\max}, y_{\max}) :

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \frac{w_1 x_1 + 2w_2}{w_0 + 2w_1 t + w_2}, \\ y_{\max} &= \frac{2w_1 y_1}{w_0 + 2w_1 + w_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

接下来计算函数值时需要把参数方程转化为显式方程. 把 x_{\max} 赋值给 E_y (E 点纵坐标), 利用曲线的显式方程, 把 y_{\max} 作为横坐标代入到曲线方程中计算出 C_y , 把 C_y 作为横坐标代入到曲线方程中计算出 D_y , 最后比较 D_y 与 E_y 的大小, 以确定是否是 Li-Yorke 混沌.

使用上面方法对 Logistic 映射 $f(x) = \mu x(1-x)$ 进行分析计算, 可以得知, 如果满足 $\frac{3}{16}\mu^4 \left(1 - \frac{3}{16}\mu^3\right) < \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 2\mu}}{2\mu}$, 那么映射是 Li-Yorke 混沌的, 通过该式计算得到 μ 的最小值在 3.5 附近.

对更多的单位区域内的二次曲线进行分析, 计算结果通过绘图方式显示, 控制点坐标 (x_1, y_1) 如果位于类似图 3 所示的区域中, 映射是 Li-Yorke 混沌的.

从椭圆到抛物线再到双曲线, 混沌控制点的区域逐渐增大, 这与三种曲线的切线倾斜程度 (即导数) 有关.

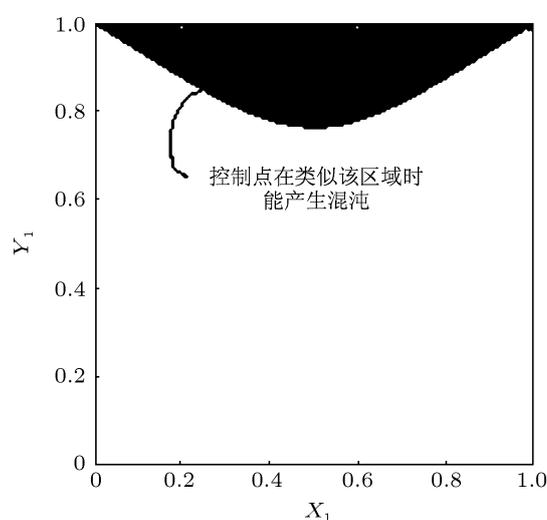


图 3 能够产生混沌的二次函数控制点区域

3 单位区域上二次曲线 Devaney 混沌研究

下面讨论二次标准单位函数是否是 Devaney 混沌的, 不失一般性, 这里讨论一个特例. 设函数的各个参数为

$$y_1 = 2, 0 \leq x_1 \leq 1, w_0, w_1, w_2 \text{ 都为 } 1.$$

把系数等代入 (3) 式所示的方程, 得参数方程为

$$\begin{aligned} x(t) &= 2x_1 t(1-t) + t^2, \\ y(t) &= 4t(1-t). \end{aligned}$$

下面讨论初值的敏感性:

先令其导数的绝对值大于 1, 即

$$\left| \frac{dy(t)}{dx(t)} \right| = \left| \frac{2-4t}{x_1 - 2x_1 t + t} \right| > 1.$$

计算导数大于 1 时, t 的取值范围, 解得: 当 $1-2t > 0$ 时 $t < \frac{2-x_1}{5-2x_1}$ (记为 M_1); 当 $1-2t < 0$ 时, $t > \frac{2+x_1}{3+2x_1}$ (记为 M_2).

分两种情况讨论, 第一种情况是 x 对应的 t 值满足 $t < M_1$ 或者 $t > M_2$, 对于任何 $x \in X$ 与 x 的任何一个邻域 B , 取 $x_0 \in B$, 使得 x_0 对应的 t 值也满足 $t < M_1$ 或者 $t > M_2$, 令 $\delta = |x - x_0|$, 此时函数的导数绝对值大于 1, 所以只需 $k = 1$, 迭代一次后, 就可

以有

$$|f^k(x) - f^k(x_0)| > \delta.$$

第二种情况是当 x 对应的 t 值满足 $M_1 < t < M_2$ 时, 一定存在 x_0 对应的 t 值也满足 $M_1 < t < M_2$, 迭代两次后, x 与 x_0 便被赋值到 $t < M_1$ 或者 $t > M_2$ 的区域中, 所以当 $k = 2$ 时, 就可以有

$$|f^k(x) - f^k(x_1)| > \delta.$$

关于 Devaney 混沌的第 2 条, 当迭代次数增加

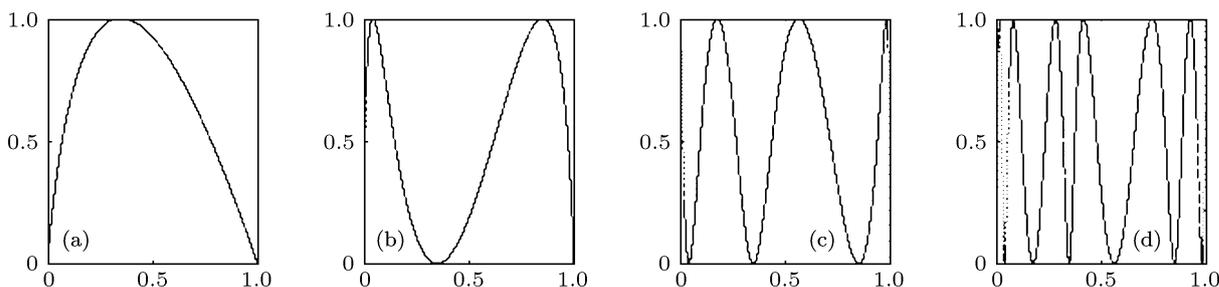


图 4 迭代 1, 2, 3, 4 次后的函数图像 (a) $f(x)$; (b) $f^2(x)$; (c) $f^3(x)$; (d) $f^4(x)$

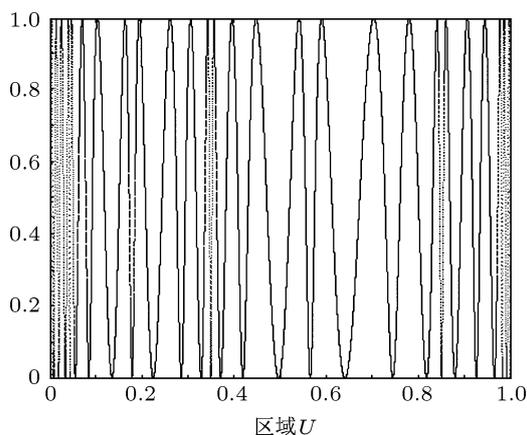


图 5 迭代 6 次后的二次单位标准函数图像

其实, 之所以出现零点稠密, 是由于函数的最大值等于 1, 该最大值 1 作为 x 再迭代就会等于 0 的缘故, 当然出现 Devaney 混沌和二次函数的凸性也有关系.

对于非标准二次函数, 当始于 $(0, 0)$ 点, 终于 $(1, 0)$ 点的二次函数最大值大于 1 时, 迭代序列发散, 不会出现混沌. 至于二次函数最大值小于 1 的情形, 有待于进一步分析.

综合上面讨论充分说明当最大值是 1 时, 二次曲线具有较好的混沌特性. 实际上, 还可以通过 Lyapunov 指数来分析单位区域二次函数混沌序列

后, 其零点都在 X 轴上, 区间 $[0, 1]$ 之间, 最大值点都在单位区域的上边界上, 随着迭代次数的增加, 最大值点可以填充任意小的区域, 如图 4 与图 5 所示. 这样对于事先给定的一个区域 U 来说, 其对应的函数值可以是 0 到 1 之间的所有值, 自然有 V 中的值. 所以对于给定的两个开集 (区间) $U, V \subseteq X$, 一定会存在自然数 k , 使得

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

的混沌程度.

4 二次曲线映射的 Lyapunov 指数与分岔图

图 6(a) 所示的标准帐篷映射函数在每一点的导数的绝对值都为 2, 所以其 Lyapunov 指数为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln 2^n = \ln 2 \approx 0.6931 > 0.$$

图 6(b) 所示的帐篷映射函数左部斜率为 $1/0.65$, 右部斜率为 $1/0.35$, 迭代时点落在左部的概率约是 0.65, 落在右部概率约是 0.35, 所以图 6(b) 所示函数的 Lyapunov 指数约为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left[(1/0.65)^{0.65n} (1/0.35)^{0.35n} \right] \right\} \\ = 0.65 \ln(1/0.65) + 0.35 \ln(1/0.35) \\ \approx 0.6474 > 0. \end{aligned}$$

通过计算可知图 6(b) 所示函数的 Lyapunov 指数大于 0, 但是小于图 6(a) 所示函数的 Lyapunov 指数. 由于迭代多次后, 有些二次曲线近似变为直线段, 所以有些情形下, 图 6(d) 函数与图 6(b) 函数具有接近的 Lyapunov 指数.

图 6(c) 中有两个函数, 一个是帐篷映射函数 (相交直线段), 一个是抛物线函数 (方程为

$f(x) = -3.6x^2 + 3.6x$, 导数是 $f'(x) = -7.2x + 3.6$, 帐篷映射函数的 Lyapunov 指数是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln 1.8^n =$

$\ln 1.8 \approx 0.5878 > 0$. 通过数值计算, 图 6(c) 中的抛物线 Lyapunov 指数约为 1.9.

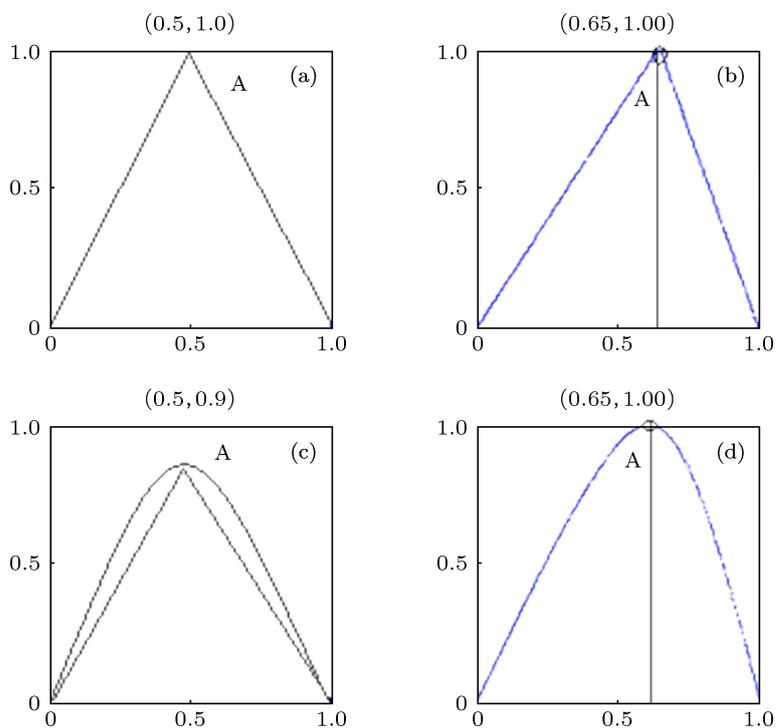


图 6 几个二次函数以及帐篷映射图像 (a) 正帐篷映射; (b) 斜帐篷映射; (c) 非标准二次函数; (d) 标准二次函数, 其最大值点为 (0.65, 1)

当 A 点高度小于 0.5 时, 图 6(c) 所示的帐篷映射 Lyapunov 指数不再大于 0; 当 A 点高度小于 0.89 时, 图 6(c) 所示的抛物线 Lyapunov 指数不再大于 0.

图 7 所示的图形是当 (3) 式中 $w_1 = w_2 = w_3 = 1, 0 < x_1 < 1, y_1 = 1.95$ 时的 Lyapunov 指数图.

图 8 是当 (3) 式中 $w_1 = w_2 = w_3 = 1, 0 < x_1 < 1, y_1 = 1.95$ 时的分岔图.

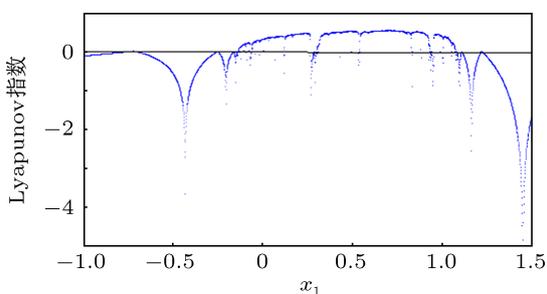


图 7 固定 y_1 , 当 x_1 变化时的 Lyapunov 指数图

其是否是混沌的. 二次曲线的参数为 $w_1 = w_2 = w_3 = 1, -0.5 < x_1 < 1.2, 1.75 < y_1 < 2$; 初始值取 $x = 0.6$; 控制点横坐标 x_1 从 -0.5 增加到 1.2 , 间隔为 0.001 , 控制点的纵坐标 y_1 从 1.75 变化到 2 , 间隔是 0.0001 . 区域中的每一个控制点 (x_1, y_1) 对应着一个混沌的二次曲线, 图 9 代表着一族混沌的二次曲线.

根据图 9, 在使用二次曲线参数方程构造混沌序列时, 可以在随机产生控制点后, 根据其所在区域进行初步筛选. 图 9 所示的黑色区域中, 有白色的条带, 这些白条内的控制点产生的序列不是 (或者不是性质很好的) 混沌序列.

5 一些其他情形的二次曲线讨论

对于 $f(x_1) = f(x_2), x_2 > x_1$, 存在一个 $\xi \in [x_1, x_2]$ 使得 $f(\xi) = x_2 - x_1$ 这种情形, 可以使用平移变换以及横轴纵轴相同倍数的变换, 变换为标准单位上的二次函数, 变换前后其混沌特性保持不变.

图 9 展示了二次曲线的控制点位置可以决定

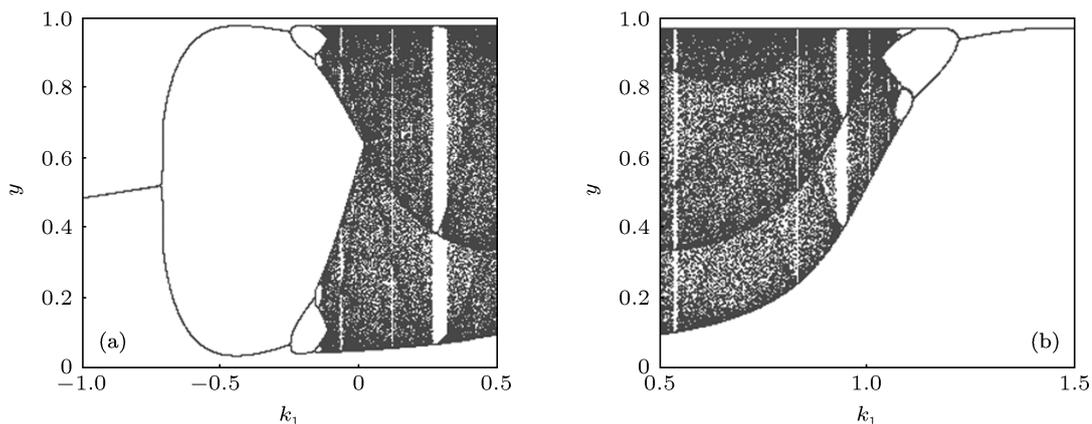


图8 固定 y_1 , 当 x_1 变化时的分岔图 (a) $-1 < x_1 < 0.5, y_1 = 1.95$; (b) $0.5 < x_1 < 1.5, y_1 = 1.95$

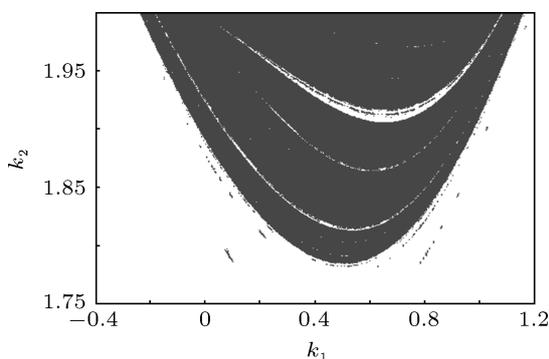


图9 一族二次曲线的 Lyapunov 指数大于 0 的控制点分布情况

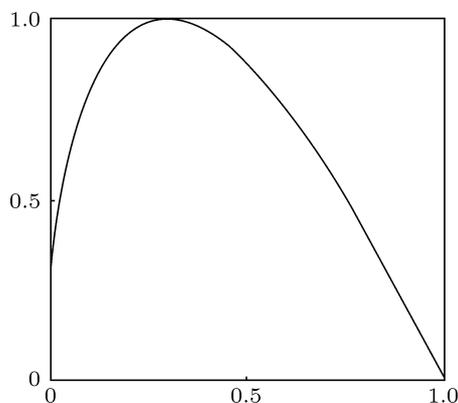


图10 单位区域内的非标准二次函数

对于 $f(x_1) = f(x_2), x_2 > x_1$, 存在一个 $\xi \in [x_1, x_2]$ 使得 $f(\xi) \neq x_2 - x_1$ 这种情形, 可以先在纵轴方向上乘以一个系数, 然后再变为标准单位上的二次函数, 虽然混沌特性改变了, 但是从模式分类的角度上看, 与变换后的函数相比较, 只是多了一个系数参数.

下面讨论图 10 所示的情形, $f(x_1) \neq f(x_2), x_2 > x_1$, 存在一个 $\xi \in [x_1, x_2]$ 使得 $f(\xi) = x_2 - x_1$, 该函数一样是 Li-Yorke 混沌的, 迭代能够生成混沌

序列, 例如, 在 $w_0 = w_1 = w_2 = 1, x_1 = 0.15, y_0 = 0.2, y_1 = 1.9$ 时, 其函数图象如图 10 所示, 迭代映射轨迹如图 11 所示.

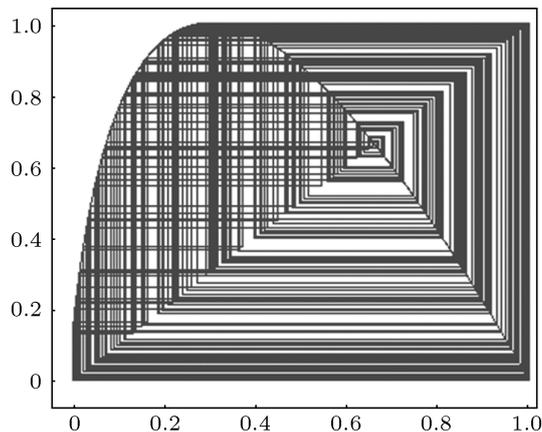


图11 非标准二次函数的迭代映射轨迹

6 结论

前面对单位区域内的二次函数进行了研究, 得到了满足一定条件时, 二次函数是混沌的; 一些二次函数经过变换可以转化为单位区域的二次函数; 有些单位区域内的二次函数虽然不是标准函数, 但是也是混沌的. 本文得到的结果既可以用于进行理论研究, 也可以用于构造混沌序列等, 应用于图像加密等实际工作中.

数值计算结果表明, 多个函数耦合在一起交叉迭代, 能够产生较好的混沌序列. 交叉迭代可以在很大程度上避免序列出现周期现象, 因为交叉迭代相当于把某个曲线的周期附近震荡的点分散到各个曲线迭代序列中, 等再迭代回来时就已经离开原先的周期点位置. 从迭代的意义上讲, 多维混沌, 例如 Lorenz 系统, 实质上是进行了更加广泛的交叉,

也就是计算出新的点后,又重新迭代到每一个式子中;线性 IFS 迭代本质上也是交叉迭代.交叉迭代实现了多个系统之间的耦合,属于一种递归嵌套,使原本简单的系统变得极其复杂.

基于上面对二次曲线混沌特性的分析,根据需要,可以随机生成多个二次曲线参数,交叉迭代构造序列.例如,随机产生 N 组二次曲线的参数与控制点横坐标,即 N 组 w_0, w_1, w_2 以及 x_1 ,随机产生控制点纵坐标 y_1 ,根据这些参数以及 x_1 来判断 y_1 是否在图 6 所示的黑色区域中;随机产生迭代初始值 x ,各组曲线交叉迭代,产生混沌序列.

实验证实二次曲线交叉迭代方法用于图像加密是有效的,从而进一步验证了前面给出的有关二

次曲线的分析结果.如果使用 8 组参数,其自由参数已经达到了 32 个(实际上, w_0, w_1, w_2 中独立参数有两个),其密钥空间已经相当于文献 [14—16] 中的结果.在实际工作中,有必要加入一些其他非二次曲线映射综合在一起构造混沌序列,这样可以增加抗攻击能力.

接下来需要继续研究的问题还有:当单位区域内二次函数的最大值小于 1 时的 Devaney 混沌状况;准确计算二次曲线混沌控制点的区域,研究其分布规律;把二次函数拓展到单位区域内的三次曲线以及一般曲线,并进一步拓展到二次曲面与高次曲面等.

-
- [1] Chen Y C 2008 *Int. J. Bifurc. Chaos* **18** 1825
 [2] Góra P, Boyarsky A 2003 *Int. J. Bifurc. Chaos* **13** 1299
 [3] Lai D, Chen G 2000 *Int. J. Bifurc. Chaos* **10** 1509
 [4] Meng J D, Bao B C, Xu Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010504 (in Chinese)
 [孟继德, 包伯成, 徐强 2011 物理学报 **60** 010504]
 [5] Li C, Chen G 2003 *Chaos, Solitons and Fractal* **18** 807
 [6] Chen X F, Chen G, Yu X 2000 *Chaos, Solitons and Fractal* **10** 771
 [7] Chen G, Huang T, Huang Y 2004 *Int. J. Bifurc. Chaos* **14** 2161
 [8] Zhang X, Shi Y, Chen G 2009 *Int. J. Bifurc. Chaos* **19** 531
 [9] Li T Y, York J A 1975 *American Mathematical Monthly* **82** 985
 [10] Banks J, Brooks J C 1992 *American Mathematical Monthly* **99** 332
 [11] Wang L, Huang G, Huan S 2007 *Nonlinear Anal.* **67** 2131
 [12] Liu H, Wang L D, Chu Z Y 2009 *Nonlinear Anal.* **71** 6144
 [13] Akhmet M U 2009 *Math. Anal. Appl.* **351** 804
 [14] Pisarchik A N, Zanin M 2008 *Physica D: Nonlinear Phenomena* **237** 2638
 [15] Gao T, Chen Z 2008 *Phys. Lett. A* **372** 394
 [16] Huang C K, Nien H H 2009 *Opti. Comm.* **282** 2123

Chaos analysis of the conic in planar unit area

Yu Wan-Bo[†] Yang Ling-Zhi

(School of Information, Dalian University, Dalian 116622, China)

(Received 16 April 2012; revised manuscript received 6 August 2012)

Abstract

In the paper, the chaotic characteristic of the quadratic function in plane unit area is studied, and it is found that the standard quadratic mapping is Li-Yorke chaos, and also Devaney chaos, and that under certain conditions, there are a large number of quadratic functions that are chaotic. Some quadratic functions can transform into the standard quadratic functions by moving and zooming, without changing their chaotic characteristics. In addition, non-standard quadratic function is preliminary studied. The chaotic characteristic of the quadratic curve is analyzed by calculating Lyapunov exponents and drawing the bifurcation diagram of conic. The bifurcation diagram of the parameter variation and the area distributing diagram of parameter control points have certain research value. The study also shows that more conic curve cross iteration can generate a better chaotic sequence, and the chaotic sequence can be used to image encryption and other practical purposes.

Keywords: chaos, conic, plane of unit area

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.020503

[†] Corresponding author. E-mail: yuwanbo@dlu.edu.cn