

一阶线性系统的调参随机共振研究*

田祥友 冷永刚[†] 范胜波

(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

(2012年5月31日收到; 2012年8月10日收到修改稿)

分析了一阶线性系统在正弦和白噪声信号作用下的输出功率谱和信噪比. 研究表明, 加性噪声作用下的线性系统不存在传统意义上的随机共振, 但却存在输出信噪比随系统参数非单调变化的调参广义随机共振现象. 针对任意频率信号, 分析了不同采样频率下的调参共振谱特性, 得出适当增大采样频率有利于特征信号识别的结论.

关键词: 线性系统, 随机共振, 微弱信号, 系统参数调节

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.62.020505

1 引言

在信号分析与处理中, 噪声所表现的积极作用主要体现在随机共振现象上. 自上世纪 80 年代 Benzi 等人^[1] 研究古气象冰川问题时提出随机共振 (SR) 理论后, SR 技术在信号处理的理论和实验研究上都有了很大发展, 尤其是在强噪声背景中提取弱信号方面得到广泛关注^[2-5]. 起初研究者普遍认为随机共振现象只能出现在由周期信号和噪声驱动的非线性系统中, 并据此得出了一些很重要的结论^[4,5]. 近年来一些学者开始研究线性系统中是否会出现类似于非线性双稳系统中才出现的随机共振现象^[6-8], Berdichevsky 等^[6] 对乘性色噪声驱动的线性系统进行研究, 发现了广义上的随机共振现象, 信噪比随噪声强度单调变化, 但随系统的其它参数诸如信号频率、振幅等非单调变化. 周玉荣等^[8] 研究了偏置信号调制噪声和加性噪声驱动线性系统的随机共振, 得出系统输出信噪比是系统衰减常数、调制信号偏置参数和加性噪声强度等的非单调函数.

以上关于线性系统随机共振现象的研究中, 都

是尝试改变信号与噪声的作用形式, 或者引入不同类型的噪声等. 而由周期加白噪声驱动的一阶线性系统中, 是否会出现随机共振现象的研究却很少见. 本文根据线性系统理论, 推导了加性噪声驱动的线性系统输出功率谱密度表达式, 并通过仿真验证得出, 周期加白噪声驱动的一阶线性系统不存在输出信噪比随噪声强度非单调变化的传统随机共振现象, 但却存在输出信噪比随系统参数非单调变化的广义随机共振现象. 随后针对任意频率信号情况, 分析了不同采样频率下的输出频谱特性, 探讨了采样频率与信号频率的比值对系统输出特征信号谱值的影响规律.

2 输出功率谱密度函数和信噪比

2.1 线性系统的输出功率谱密度函数

一阶线性系统动力学模型

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \text{sn}(t), \quad (1)$$

式中 a 是系统参数, 输入信号 $\text{sn}(t) = A \sin(2\pi f_0 t) + \sqrt{2D}\xi(t)$, $A \sin(2\pi f_0 t)$ 是频率为 f_0 、幅值为 A 、相位为 0 的正弦信号, $\sqrt{2D}\xi(t)$ 是功率谱密度为 $2D$

* 国家自然科学基金 (批准号: 51275336) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn

的噪声, 其中 $\xi(t)$ 是均值为 0, 方差为 1 的高斯白噪声.

当输入信号仅为正弦 $sn(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ 时, 方程 (1) 变为

$$\frac{dx}{dt} = -ax + A \sin(2\pi f_0 t). \quad (2)$$

由线性微分方程的理论解出,

$$x = \frac{A}{\sqrt{a^2 + (2\pi f_0)^2}} \sin(2\pi f_0 t + \varphi),$$

得输出功率谱密度函数

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4[(2\pi f_0)^2 + a^2]} \times [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)], \quad (3)$$

其中 $\delta(f)$ 为单位脉冲函数, (3) 式表明确定的正弦信号经过线性系统后, 系统输出在功率谱图上表现为两根谱线.

当输入信号仅为白噪声 $sn(t) = \sqrt{2D}\xi(t)$ 时, 方程 (1) 变为

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \sqrt{2D}\xi(t). \quad (4)$$

因一阶线性系统的传递函数为 $H(j2\pi f) = \frac{1}{j2\pi f + a}$, 当输入谱密度为 $S(f) = 2D$ 的白噪声时, 系统输出功率谱密度为

$$S_X(f) = |H(f)|^2 \cdot S(f) = \frac{2D}{(2\pi f)^2 + a^2}. \quad (5)$$

可以看出, 仅输入白噪声时, 输出功率谱密度函数的分布与噪声强度 D 和系统参数 a 有关, 且功率谱随频率 f 变化呈现洛伦兹分布关系.

而当输入为正弦与噪声的混合信号 $sn(t) = A \sin(2\pi f_0 t) + \sqrt{2D}\xi(t)$ 时, 方程 (1) 变为

$$\frac{dx}{dt} = -ax + A \sin(2\pi f_0 t) + \sqrt{2D}\xi(t). \quad (6)$$

根据线性系统的叠加原理, 可得到系统的输出功率谱密度函数为

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4[(2\pi f_0)^2 + a^2]} \times [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{2D}{(2\pi f)^2 + a^2}. \quad (7)$$

由 (7) 式可知, 在系统输出端, 代表信号与噪声的表达式相互叠加, 周期信号与白噪声是独立作用于线性系统的, 输出信号与噪声无关.

2.2 系统输出信噪比

研究噪声驱动的一阶线性系统目的是从混杂噪声的信号中提取出有用信息, 衡量提取信号有效程度的一个重要指标就是输出信噪比 SNR_{out} . SNR_{out} 越高, 表明系统输出中有用信号成分所占比重越大, 信号越容易分辨出.

关于随机共振系统输出信噪比的定义主要有两种方式^[9-16], 一种是在随机共振近似解析解推导过程中广泛使用的信噪比定义, 即系统输出端信号总功率与信号频率处背景噪声平均功率之比^[9-11]

$$SNR = \frac{S(f_0)}{S_N(f_0)}, \quad (8)$$

式中 $S(f_0)$ 为输出端 f_0 频率处信号的总功率, $S_N(f_0)$ 为输出端 f_0 频率处噪声平均功率.

另一种是在信号处理及通信等工程实际中常用的信噪比定义, 即系统输出端信号总功率与噪声总功率之比^[12-16]

$$SNR = \frac{S(f_0)}{\int_0^\infty S_N(f) df}, \quad (9)$$

式中 $S_N(f)$ 为输出端噪声功率谱密度.

两种信噪比定义方式的不同之处在于噪声功率的选取不同, 前一种只考虑信号频率处的局部噪声功率, 后一种采用全局噪声功率^[13]. 对于周期信号加白噪声作用的线性系统, 由前知信号与噪声是独立作用于系统的, 线性系统改变的只是输出信号与噪声的分布, 不存在信号与噪声之间的相互作用. 这样 (9) 式中全局噪声的定义能更全面考虑信号与噪声经过系统后的变化关系, 另外输入端信噪比一般采用 (9) 式的定义^[2], 输出与输入端信噪比可以相互比较, 反映经过线性系统后信号与噪声的功率对比关系. 因此, 本文采用 (9) 式的信噪比定义.

由方程 (7) 知, 输出功率谱中信号的总功率为

$$P_{st} = \frac{A^2}{4[(2\pi f_0)^2 + a^2]}, \quad (10)$$

这里只取正频率. 噪声的输出总功率可以通过噪声功率谱密度函数分布积分得到

$$\begin{aligned}
 P_{nt} &= \int_0^{+\infty} \frac{2D}{(2\pi f)^2 + a^2} d(2\pi f) \\
 &= \frac{2D}{a} \arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right) \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{\pi D}{a}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

于是由(10)和(11)式可定义输出信噪比^[12-16]

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{nt}}} = \frac{A^2}{4\pi D \left(a + \frac{(2\pi f_0)^2}{a}\right)}. \tag{12}$$

由输出信噪比表达式(12)可以清楚地看出, SNR_{out} 随噪声强度 D 单调递减变化, 表明周期与加性噪声驱动的一阶线性系统中不会出现传统意义上的随机共振现象. 这一点(7)式也可说明, 输出端信号与噪声无关, 因此输出信噪比就不可能随噪声强度的变化而非单调变化. 取参数 $A = 0.1$, $a = 0.2$, $f_0 = 0.01$, 得到 SNR_{out} 随噪声强度 D 的变化曲线, 如图1.

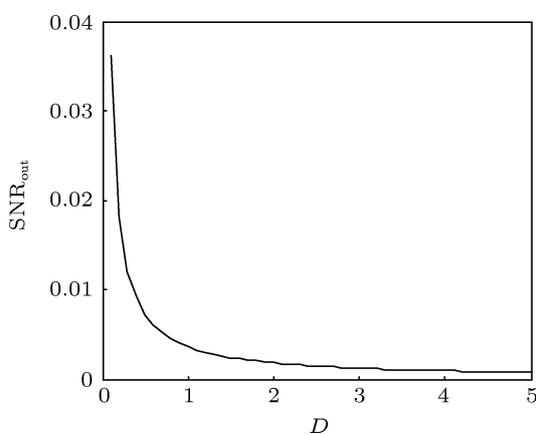


图1 输出信噪比 SNR_{out} 随噪声强度 D 变化曲线 (参数值: $A = 0.1$, $a = 0.2$, $f_0 = 0.01$)

3 一阶线性系统的广义随机共振现象

3.1 理论分析

一阶线性系统模型(1)中可以调节改变的参量只有一个系统参数 a , 系统参数对系统输出信噪比的影响可以根据推导出的输出信噪比表达式(12)分析. 由于式中因子 $a + \frac{(2\pi f_0)^2}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{(2\pi f_0)^2}{a}} = 4\pi f_0$ ($a = 2\pi f_0$ 时等号成立), 故取参数 $a = 2\pi f_0$, 系

统输出信噪比取得极大值 $\text{SNR}_{\text{max}} = \frac{A^2}{16\pi^2 f_0 D}$, 即当输入信号的频率与系统参数取得某种协同匹配关系时, 系统输出能够达到共振状态. 这种输出信噪比随系统参数非单调变化的现象称之为广义随机共振. 取参数 $A = 0.1$, $f_0 = 0.01$, $D = 0.8$, 做出 SNR_{out} 随参数 a 变化曲线, 如图2. 由图2可以看出, SNR_{out} 随参数 a 非单调变化, 在 $a = 2\pi f_0$ 时, 输出信噪比取得极大值.

为综合理解输出信噪比随系统参数 a 和噪声强度 D 变化的规律, 图3给出了 SNR_{out} 随 a 和 D 变化的三维图. 为便于看图, 参数 a 取 0.01—0.5, 噪声强度 D 取在 0.5—1.5 之间. 三维图清楚表明, 输出信噪比随噪声强度 D 单调变化, 但随参数 a 变化出现共振峰.

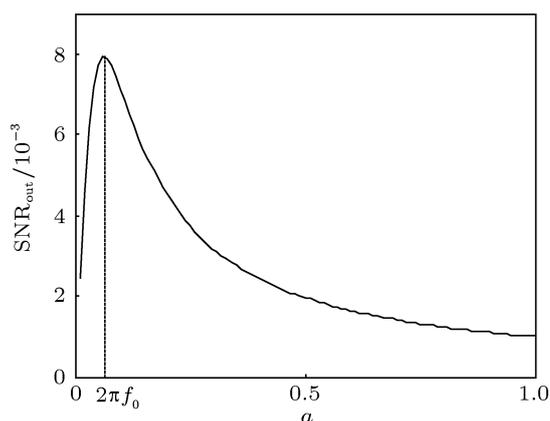


图2 输出信噪比 SNR_{out} 随参数 a 变化曲线 (参数值: $A = 0.1$, $D = 0.8$, $f_0 = 0.01$)

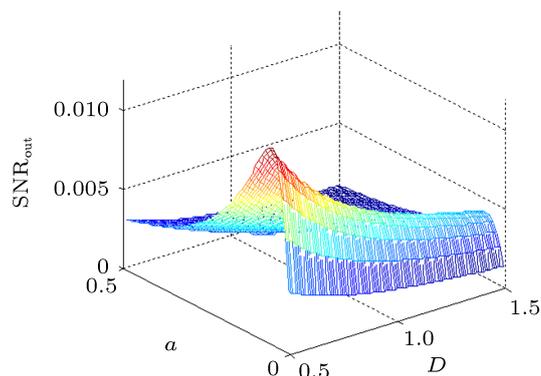


图3 输出信噪比 SNR_{out} 随 a 和 D 变化的三维图 (参数值: $A = 0.1$, $f_0 = 0.01$)

3.2 仿真实验

设定一组仿真参数: $A = 0.1$, $f_0 = 0.01$, $D = 0.8$, 采样频率 $f_s = 5$, 计算数据点数 $N = 4000$. 用四

阶 Runge-Kutta 方法 (以下同) 对方程 (1) 进行数值计算, 计算结果如图 4. 算法中的输出信噪比定义为 [12,13,16]

$$\text{SNR}_{\text{out}} = 10\lg(P_{\text{st}}/P_{\text{nt}}), \quad (13)$$

(13) 式是给定计算数据点数条件下的信噪比, 其中 P_{st} 表示输出功率谱中信号总功率, P_{nt} 表示输出功率谱中噪声总功率. 计算时, P_{st} 取输出功率谱中信号频率处的谱值, P_{nt} 取输出功率谱中除去信号频率处谱值后, 其余各频率点谱值的代数和. 作为比较, 在此给出系统输入端信噪比 SNR_{in} , 其定义为在给定数值分析长度条件下, 信号总功率与噪声总功率之比.

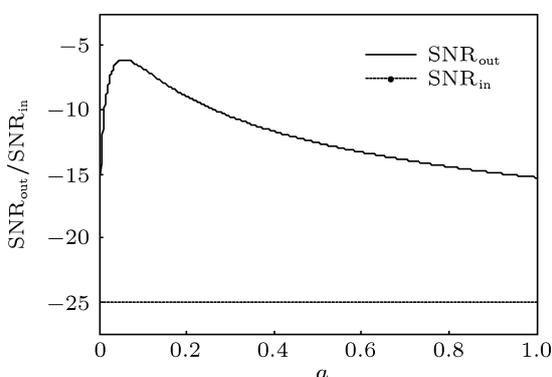


图 4 输出和输入信噪比随参数 a 变化的数值分析曲线 (参数: $A = 0.1, D = 0.8, f_0 = 0.01$)

仿真图 4 表明, SNR_{out} 随 a 值的变化曲线中存在明显的共振峰, 即输出信噪比随 a 的变化是先增后减, 这与理论推导 (12) 式相符, 而 SNR_{in} 随 a 的变化保持不变, 始终稳定在 -25 dB 左右. 另外, (12)

式得到的最大输出端信噪比在 $a = 2\pi f_0$ 处, 而仿真得到的最大 SNR_{out} 值在 $a \approx 0.061$ 处, 与 $2\pi f_0$ 十分接近, 仿真结果与理论推导相符合.

以上理论和仿真分析均表明, 周期加白噪声驱动的一阶线性系统存在输出信噪比随系统参数非单调变化的情况, 也即通过参数 a 的调节可得到 SNR_{out} 最大值的广义随机共振现象.

4 任意频率信号调参随机共振谱特性研究

4.1 信号频率增大时的输出频谱

在周期加白噪声驱动的一阶线性系统中, 当系统参数 a 与输入信号的频率达到匹配 $a = 2\pi f_0$ 时, 输出信噪比达到最大. 根据这一特性, 可以通过调节系统参数 a 使信号谱峰凸显出来, 达到检测噪声中微弱信号的目的. 例如给定一组仿真参数

$$\begin{aligned} A &= 0.1, \quad f_0 = 0.01, \quad D = 0.8, \\ N &= 4000, \quad f_s = 5, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 f_s 为采样频率, N 为计算数据点数. 对方程 (1) 进行数值计算, 得到输入与输出频谱, 如图 5. 在输入谱中信号被噪声淹没无法识别, 但是经过一阶线性系统后, 在输出谱中当系统参数 $a = 2\pi f_0$ 时, 可以清楚看到信号在 0.01 Hz 频率处有一最大的谱峰值.

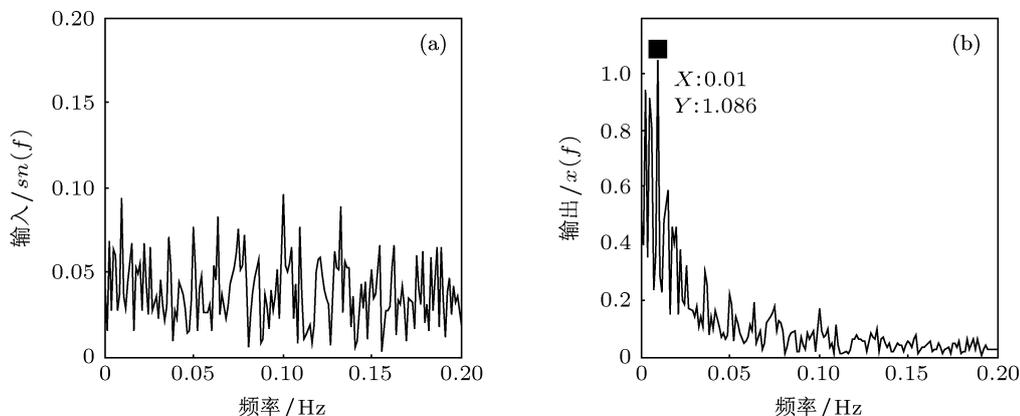


图 5 特征信号一阶线性系统的输入与输出频谱 ($f_0 = 0.01, f_s = 5$) (a) 输入谱; (b) 输出谱

如果增大输入信号频率,如取 $f_0 = 0.1$,其他参数同(14)式,那么当 $a = 2\pi f_0$ 时得到图6结果,此时从输入与输出频谱图上均不能识别出特征信号的频率.这表明,当 f_0 增大时,系统依靠调节参数 a 检测噪声中弱信号的能力会逐渐减弱,这一点可以从(7)式得到解释.随着 f_0 的增大,系统输出达到共振的相应参数 a 值也增大,于是信号与噪声在系统输出端的幅度均变小.但是随着 f_0 的增大,信号表达式的分母比噪声表达式的分母增大得快,故信号幅度要比噪声幅度减小的快,因此信号逐渐淹没在噪声中而无法识别.

如果增大输入信号频率的同时也等比增大采样频率,即保持信号频率对采样频率的归一化不

变^[17],如取 $f_0 = 1, f_s = 500$,其他参数同(14)式,那么当 $a = 2\pi f_0$ 时输出结果如图7,可知在采样频率与信号频率比值不变的情况下,图7与图5几乎相同,只是图7(b)中的谱值与图5(b)相差100倍.这一点从(7)式也不难理解,在信号频率 f_0 增大的同时,如果保持信号频率对采样频率的归一化不变,即 $f_s/f_0 = \text{常数}$,那么(7)式中 f_0 和 f 同时扩大相同倍数,于是信号的分母项和噪声的分母项也同比增大相同倍数,其输出频谱形状不变而仅仅是谱值同比缩小.图7表明,尽管频谱幅值随着 f_0 的增大而减小,但只要保持信号频率对采样频率的归一化尺度不变,依靠调节参数 a 仍然能够检测出特征信号.

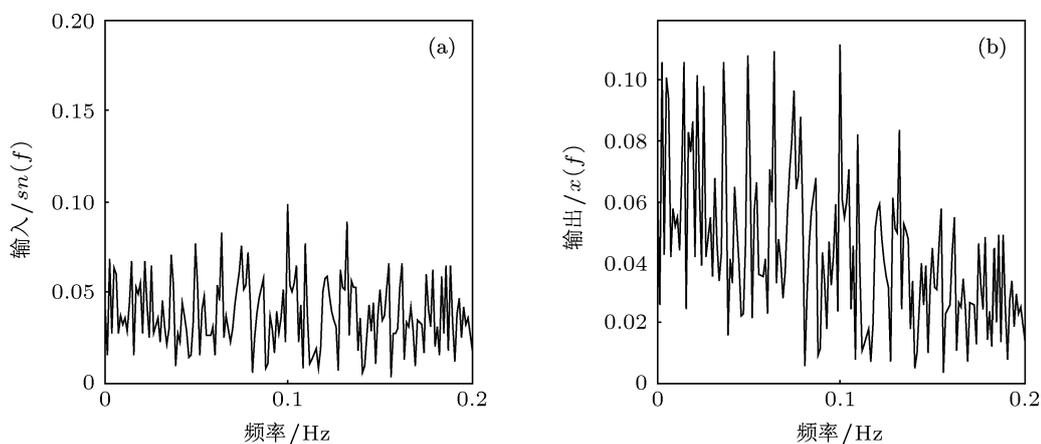


图6 信号频率增大时一阶线性系统的输入与输出频谱 ($f_0 = 0.1, f_s = 5$) (a) 输入谱; (b) 输出谱

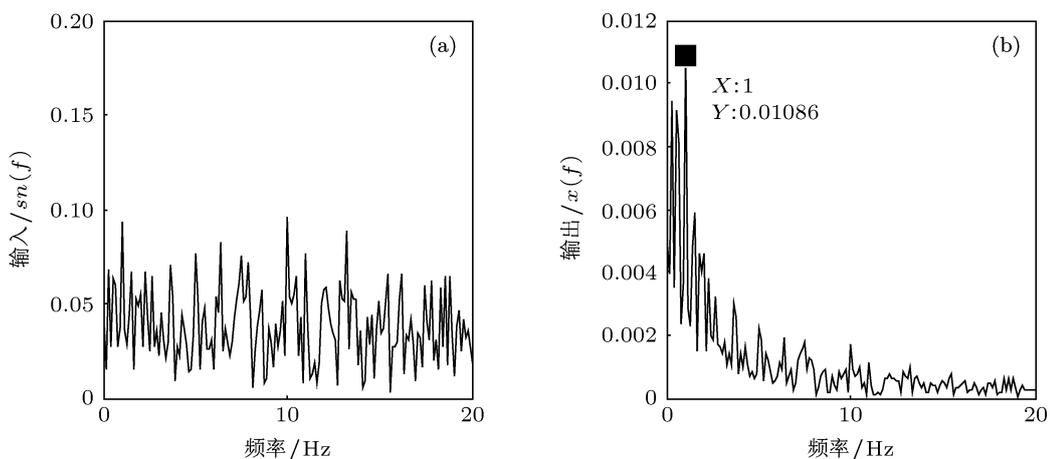


图7 保持信号频率对采样频率的归一化(特征信号一阶线性系统的输入与输出谱, $f_0 = 1, f_s = 500$) (a) 输入谱; (b) 输出谱

比较图 5、图 6、图 7 可知,应用调参随机共振的方法检测微弱信号不受信号频率大小的限制,可以检测任意频率的信号,但采样频率与信号频率的比值对系统输出频谱的谱值大小和分布形状有很大影响.图 6 中 $f_s/f_0 = 50$,信号特征频率淹没在噪声中无法识别,而图 5 和图 7 中 $f_s/f_0 = 500$,从输出频谱图上可以清楚得到特征信号.故在 $a = 2\pi f_0$ 的共振条件下,比值 f_s/f_0 与系统输出频谱上特征信号的可识别性有关.

4.2 采样频率与信号频率比值对系统输出频谱的影响

以图 7 参数为基准,保持 $A = 0.1, D = 0.8, N = 4000, f_0 = 1$ 不变,系统参数 $a = 2\pi f_0$.令采样频率 f_s 与驱动信号频率 f_0 的比值为 $k = f_s/f_0$.可以看出,若 f_0 固定,则 k 的变化相当于取不同的 f_s ,这实际上就是观察不同采样频率 f_s 下,信号经调参共振处理后的输出频谱变化规律(这也可理解为不同频率 f_0 的信号在同一采样频率 f_s 下经调参处理后的输出频谱变化规律).让 k 从 $10 \rightarrow 500$ 的范围内变化,其变化步长 $\Delta k = 1$.对方程 (1) 进行数值计算,得到不同 k 值(或 f_s) 的输出谱图.在每一输出谱图中度量 f_0 处的谱峰高度 h ,得到 $h-k$ 关系曲线,如图 8.

从图 8 可看出,随采样频率与信号频率比值 k 的增大(f_s 增大或 f_0 减小),谱高 h 呈快速振荡变化,当 k 较大时, h 随 k 振荡变化越来越缓慢.曲线在若干离散频率点处出现较大的值.

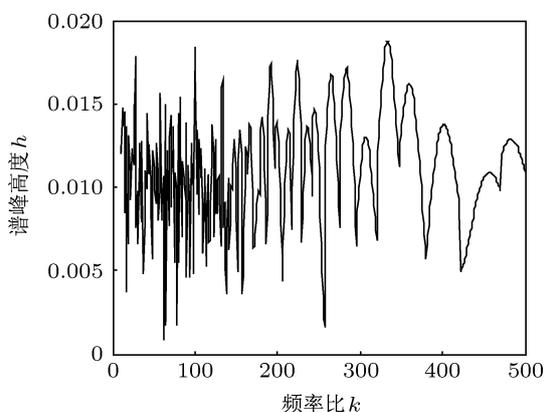


图 8 调参共振后信号谱峰高度 h 随频率比 k 变化曲线

图 8 仅表示不同 k 值下输出信号谱值的变化规律,但它并没有反映出特征信号在对应谱图上的可辨识度.这里设计一种比较方法来鉴别频谱图上特征信号的可辨别程度,即提取输出谱图上信号频率处的峰值 h ,将其与整个谱图上除去信号频率谱值后其余谱值中最大的一个谱值 h_r 作比较,比值越大,表明信号的可辨别性越好,将这个比值定义为辨别率 $r = h/h_r$.显然要使信号在整个谱图上清晰可辨,应使信号谱峰成为整个谱图的最大峰值,即 $r > 1$.下面给出图 8 参数条件下辨别率 r 随采样频率与信号频率比值 k 的变化曲线,如图 9.

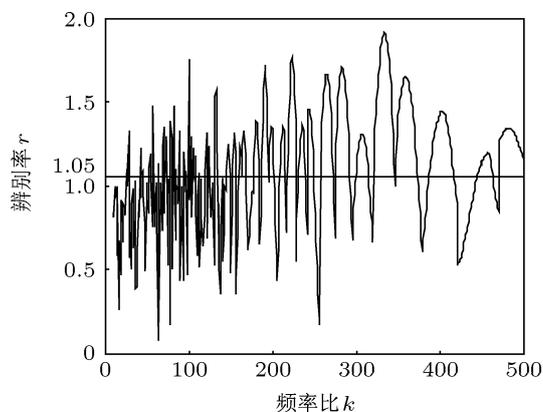


图 9 特征信号辨别率 r 随频率比 k 变化曲线

为使输出谱图上特征信号的可辨识度较好,这里规定 $\frac{h-h_r}{h} \geq 5\%$,即 $r \geq 1.05$ 时,特征信号在谱图上就可以识别出来.这样由图 9 可得信号能够识别的频率比 k 的区间,用 1 代表可识别的点,用 -1 代表不可识别的点,得图 10 结果.

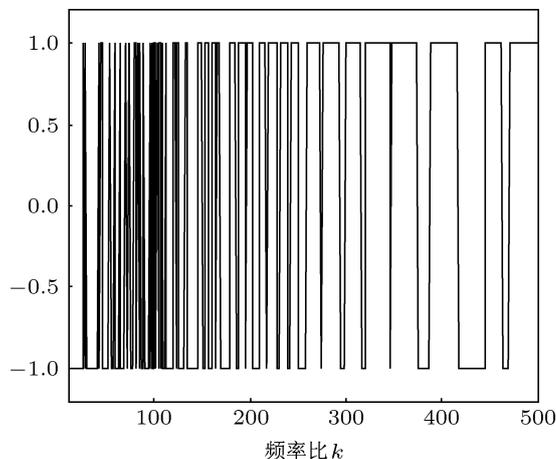


图 10 随频率比 k 变化的可识别区间

从图 10 可明显看出, 当采样频率与信号频率比值 k 较小时, 特征信号的可识别性会随频率比的变化而起伏波动, 识别的稳定性较弱. 而当频率比值 k 逐渐增大, 如大于 200 后, 特征信号的可识别性会稳定下来, 出现可识别特征信号的连续 k 值, 不会因为信号频率或采样频率的略微变化而引起特征信号的不可识别. 在实际采样分析时, 可根据特征信号频率的估值, 选择可辨识特征信号的频率比 k 值区间, 即选择合适的采样频率范围. 在条件允许时应尽量取较大的 k 值, 这样可减小因 k 值选择不当而使输出特征信号谱值无法识别的概率.

5 结论

本文针对一阶线性系统在正弦信号与加性噪

声作用下的输出特性进行了理论分析和仿真研究, 结果表明: 由于信号和噪声对一阶线性系统的作用是各自独立的, 系统响应是二者各自响应的线性叠加, 因此系统响应不存在传统意义上的随机共振现象. 然而, 通过系统输出信噪比的研究可以发现, 系统输出信噪比随系统参数非单调变化, 即一阶线性系统中存在调参广义随机共振现象. 当系统参数等于输入信号频率的 2π 倍时, 输出信噪比达到最大值.

为在实际中应用本文方法, 本文分析了不同采样频率下任意频率信号的调参共振输出谱特性及其检测性, 给出了实际采样分析时采样参数的选取规律, 即对于特征信号频率的估值, 应尽量取较大的采样频率来达到识别特征信号的目的.

-
- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
 - [2] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* (Shanghai: Shanghai Science & Technology Education Press) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
 - [3] Dykman M I, Luchinsky D G, McClintock P V E, Stein N D, Stocks N G 1992 *Phys. Rev. A* **46** R1713
 - [4] Leng Y G, Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇 2003 物理学报 **52** 2432]
 - [5] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
 - [6] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
 - [7] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
 - [8] Zhou Z R, He Z Y 2011 *Journal of Vibration And Shock*. **30** 171 (in Chinese) [周玉荣, 何正友 2011 振动与冲击 **30** 171]
 - [9] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
 - [10] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
 - [11] Zhou T, Moss F 1990 *Phys. Rev. A* **41** 4255
 - [12] Mitaim S, Kosko B 1998 *Proceedings of the IEEE* **86** 2152
 - [13] Wan P, Zhan Y J, Li X C, Wang Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040502 (in Chinese) [万频, 詹宜巨, 李学聪, 王永华 2011 物理学报 **60** 040502]
 - [14] Cao L, Wu D J 2007 *Physica A* **376** 191
 - [15] Lu Z X, Cao L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110501 (in Chinese) [陆志新, 曹力 2011 物理学报 **60** 110501]
 - [16] Gingl Z, Vajtai R, Kiss L B 2000 *Chaos, Solitons & Fractals* **11** 1929
 - [17] Leng Y G, Leng Y S, Guo Y 2006 *Journal of Sound and Vibration* **292** 788

Parameter-adjusted stochastic resonance of first-order linear system*

Tian Xiang-You Leng Yong-Gang[†] Fan Sheng-Bo

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 31 May 2012; revised manuscript received 10 August 2012)

Abstract

The output power spectrum and signal-to-noise ratio (SNR) of the first order linear system driven by sinusoidal and white noise signal are analyzed. The result shows that the linear system under additive noise does not perform traditional stochastic resonance (SR), but it reveals the parameter-adjusted SR in a broad sense, which means that a resonance peak appears in the curve of SNR versus system parameter. The output spectrum properties under different sampling frequencies are analyzed for a signal with an arbitrary frequency, leading to a conclusion that increasing sampling frequency properly can be beneficial to the detection of the character signal.

Keywords: linear system, stochastic resonance, weak signal, tuning of system parameters

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.62.020505

* Project support by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51275336).

[†] Corresponding author. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn