

## 设计和实现三维空间任意庞加莱截平面电路\*

陈红<sup>†</sup> 吴玲

(黑龙江大学电子工程学院, 哈尔滨 150080)

(2012年2月13日收到; 2012年8月16日收到修改稿)

庞加莱截面法是简化分析复杂动力系统运动状态的有效方法. 为实现在线方便观测复杂系统的状态, 本文设计并实现了三维任意庞加莱截平面电子电路. 文章首先详细分析和研究了设计三维任意庞加莱截平面电路的关键性问题, 然后分类设计和实现了物理电路. 由于蔡氏电路具有丰富的动力学行为, 因此以典型的蔡氏电路作为实验待测动力系统, 对设计的截平面电路进行了大量的物理实验, 测出了蔡氏电路各种状态下的截平面图, 以及同一种混沌状态下选取不同截面的测试实验. 实验中采用了两种双踪示波器(模拟示波器和数字示波器)在线实测了庞加莱截平面映射和状态图. 与此同时, 利用 Matlab 进行了计算机仿真辅助实验. 所有实验结果表明设计的庞加莱截平面电路具有实用性和有效性.

**关键词:** 庞加莱截面, 截平面电路, 蔡氏电路, 示波器

**PACS:** 05.45.-a, 07.50.Ek, 43.66.Yw, 07.07.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.020507

## 1 引言

19世纪末, 法国数学家庞加莱在研究“三体问题”中, 提出了庞加莱截面法. 该方法将系统连续运行曲线(相轨道)的研究简化为对离散点集合的研究, 即在  $n$  维相空间中适当选取一个截面(既可以是平面也可以是曲面), 然后考虑系统的轨迹与此截面相交的一系列交点的变化规律, 这样可以抛开相空间复杂的轨迹, 并能在庞加莱截面上的点集中得到关于系统运动的一些特征信息, 从而可以简化研究的工作. 国内外科学工作者已将庞加莱截面法应用到许多领域中, 如语音基音检测<sup>[1]</sup>, 医学检测<sup>[2-4]</sup>, 工程设计<sup>[5-7]</sup>, 系统特性和状态结构<sup>[8-10]</sup>以及稳定性分析<sup>[11-13]</sup>等, 这些应用大多都是通过计算机软件进行数值分析实现的, 不便于实时在线进行观测. 为了实现实时在线的观测截面, 目前已有许多学者研究和设计出了庞加莱截面的电子电路, 如王琳和彭建华等设计了依靠取样频率实现的可观察  $ax = d$  类型的庞加莱截面电路, 该电路实

现了观测连续系统的分岔图<sup>[14]</sup>; Chai Wah Wu 等在应用一维映射研究混沌系统时, 设计出了示波器实时观察庞加莱映射的电路, 电路实现了观察  $ax + by = d$  截面上的映射<sup>[15]</sup>. 以上的研究都对庞加莱截面的应用起到了推动作用, 但在庞加莱截面选取上都有一定的局限性, 前者是在坐标轴上截取平面; 后者是在坐标轴和面上截取平面. 本文涉及的是关于三维空间里任意庞加莱截平面电路的设计方法及用物理元器件实现的设计电路. 而且, 截面的方向和位置可在线方便地调整.

## 2 设计庞加莱截平面电路的关键问题与解决方法

设计任意庞加莱截平面电路的关键问题之一是如何用电路实现任意平面作为庞加莱截平面, 且在电路上能方便在线调整平面的方向和位置. 在三维相空间中, 设一般形式的平面方程为

$$ax + by + cz = d, \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 61072072)、黑龙江省自然科学基金(批准号: F201249)、黑龙江省教育厅科研项目(批准号: 12521402)和黑龙江省普通高等学校电子工程重点实验室(批准号: DZZD20100021)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: chenhongdeepred@163.com

其中,  $a, b, c$  和  $d$  为平面方程的系数,  $a, b, c$  不能同时为零. 三维空间中的任意平面 (1) 可分成三大类:  $ax = d$  ( $a \neq 0$ ) 类,  $ax + by = d$  ( $ab \neq 0$ ) 类和  $ax + by + cz = d$  ( $abc \neq 0$ ) 类.

$ax = d$  ( $a \neq 0$ ) 类平面 (含  $by = d$  ( $b \neq 0$ ) 和  $cz = d$  ( $c \neq 0$ )): 当  $b = c = 0, a, d$  不为 0 时, 为平行坐标面  $YOZ$  的平面, 其平面的位置决定  $a$  和  $d$ . 同理, 当  $a = c = 0, b, d$  不为 0 时, 或者  $a = b = 0, c, d$  不为 0 时, 为平行坐标面  $XOZ$  或平行坐标面  $XOY$  的平面; 若  $d = 0$  时, 则为过原点的平面.

$ax + by = d$  ( $ab \neq 0$ ) 类平面 (含  $by + cz = d$  ( $bc \neq 0$ ) 和  $ax + cz = d$  ( $ac \neq 0$ )): 当  $c = 0, a, b, d$  不为 0 时, 为平行  $Z$  轴的平面, 其平面的方位决定  $a, b$  和  $d$  的大小. 同理, 当  $a = 0, b, c, d$  不为 0 时, 或当  $b = 0, a, c, d$  不为 0 时, 为平行  $X$  轴或平行  $Y$  轴的平面; 若  $d = 0$  时, 则为过原点的平面.

$ax + by + cz = d$  ( $abc \neq 0$ ) 类平面: 当  $d = 0, a, b, c$  不为 0 时, 为过坐标原点的平面, 不同的  $a, b, c$  取值, 会得到过坐标原点的不同方向的平面; 当  $a, b, c$  和  $d$  均不为 0 时, 不同的  $a, b, c$  和  $d$  值决定不同方向和位置的平面.

综合以上分析, 在三维空间中平面方程 (1) 的系数  $a, b, c, d$  数值不同就会得到不同的平面. 因此设计的任意平面电路要能方便在线分别调整  $a, b, c, d$  的数值.

庞加莱截面截取动力学系统的运动轨迹时, 在截面上会有相应的交点  $p$ , 该交点  $p$  也是该系统上对应的一个点, 所以动力学系统轨迹在穿过截面时, 产生的交点就是庞加莱截面上的映射点, 即截面上的点集是系统状态随时间的演化与截面相交记录下来的映射点. 因此, 系统处于周期运动状态时, 庞加莱截面上出现有限个离散的点; 系统处于准周期运动时, 在截面上有一条闭合曲线; 系统处于混沌状态时, 其庞加莱截面上有沿一段曲线或区域分布的点集.

由图 1 可看到系统的状态轨迹穿过截面, 依次相交于  $p_0, p_1, p_2, \dots$  点, 它们对应时刻为  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , 这些离散点形成了一个庞加莱映射, 它们的对应关系

$$p_{n+1} = T(p_n) = T(T(p_{n-1})) = T^2(p_{n-1}) = \dots$$

如何用电路记录系统轨迹与截平面相交时刻的信息, 并能清晰显示在示波器上是设计本电路的关键问题之二. 设平面方程 (1) 为截平面, 待测动

力系统有三个输出变量  $V_x, V_y$  和  $V_z$  分别对应平面方程 (1) 的  $x, y$  和  $z$  变量. 当待测系统的运行轨迹满足方程 (1) (即  $aV_x + bV_y + cV_z = d$ ) 时, 便构成截面上的映射点. 因此在设计截面电路时, 定义系统穿入截面时为波形的上升沿; 穿出时为波形的下降沿, 即将穿入和穿出平面定义为矩形波的上升沿和下降沿. 然后在上升沿和下降沿处各产生一个窄脉冲, 这些窄脉冲正是系统轨迹穿入平面和穿出平面 (1) 的时刻记录, 如图 2 所示. 窄脉冲  $V_s$  越窄, 记录交点时刻越精确. 图中  $V_s$  为  $aV_x + bV_y + cV_z$ ;  $V_j$  为矩形波, 其前沿和后沿为动力系统穿入和穿出时刻,  $V_s$  为在上升沿和下降沿处产生的窄脉冲.

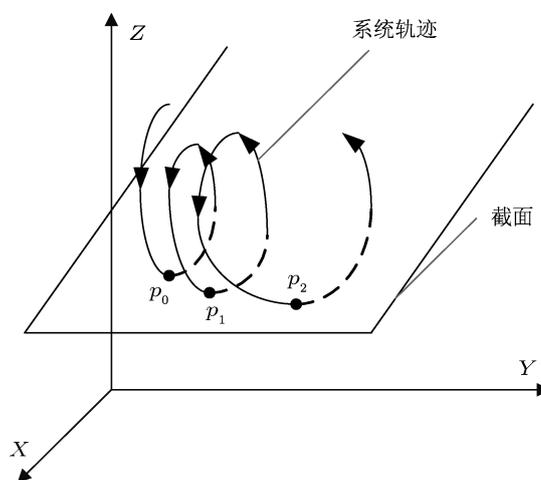


图 1 庞加莱截面

将窄脉冲  $V_s$  作为取样信号, 其作用是获取上升沿和下降沿时刻 (系统轨迹与截面相交的时刻) 的系统运行轨迹的信号, 并将其保持到下一交点时刻. 由于同一个系统内的三个变量反映的是系统运行状态和信息, 因此用同一个窄脉冲  $V_s$  对系统的三个变量输出信号  $V_x, V_y$  和  $V_z$  同时进行取样保持, 就得到三个输出显示信号  $V_{ox}, V_{oy}$  和  $V_{oz}$ . 然后将这些信号两两同时送入示波器的  $X$  轴和  $Y$  轴输入端, 示波器将会在  $Y-X$  方式下显示出对应相平面上的庞加莱截面. 图 3 示出只对系统的两个信号  $V_x$  和  $V_y$  在相交处获取显示信号  $V_{ox}$  和  $V_{oy}$ .

根据上述研究和分析设计了庞加莱截平面整体电路框图, 如图 4 所示. 电路由三部分构成: 庞加莱截平面生成电路、取样信号生成电路和显示信号生成电路. 庞加莱截平面生成电路产生方程 (1) 的平面, 其输出信号为  $V_j$ . 取样信号生成电路将  $V_j$  转换成窄脉冲取样信号  $V_s$ . 显示信号生成电路在取

样信号  $V_s$  的控制下, 对输入信号同时取样保持获得送入示波器的显示信号  $V_{ox}, V_{oy}$  和  $V_{oz}$ . 图 4 中虚线框为待测系统,  $V_x, V_y$  和  $V_z$  为该系统产生的输出信号.

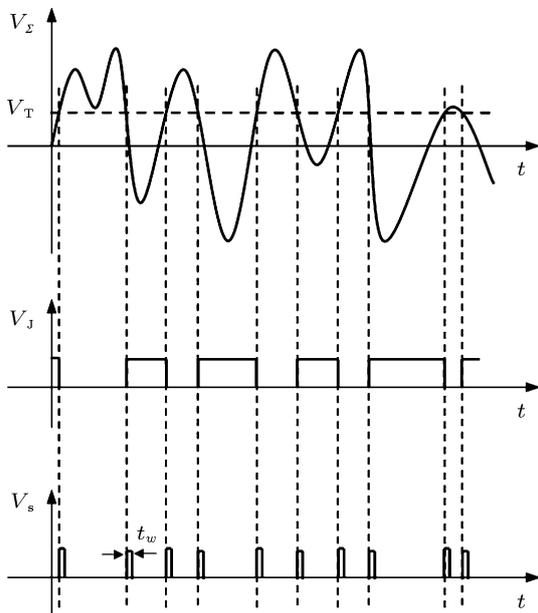


图 2 产生  $V_s$  原理

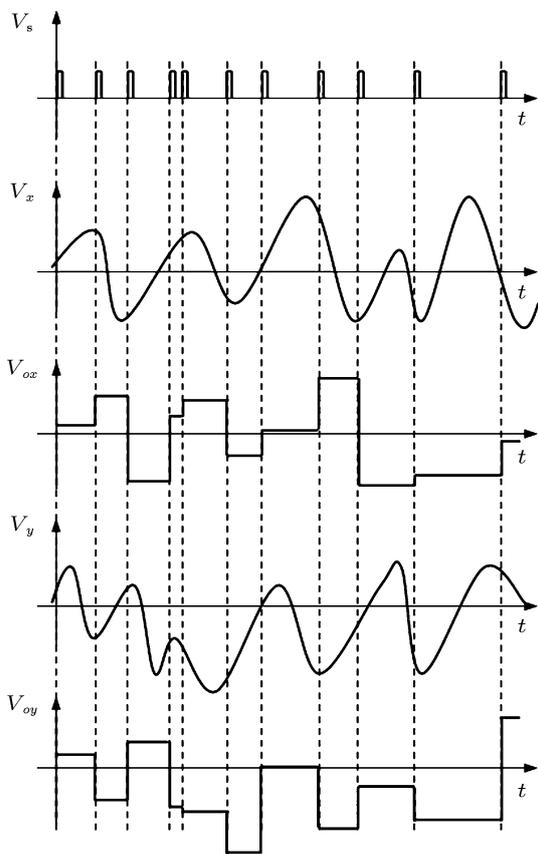


图 3 产生显示信号原理

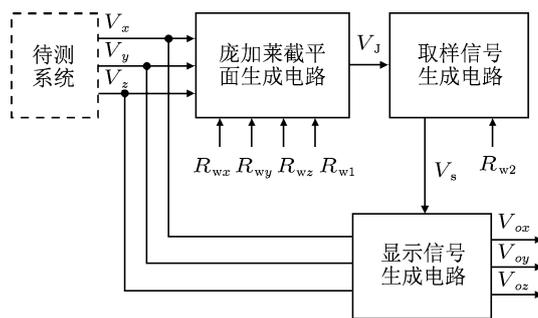


图 4 庞加莱截平面整体电路框图

### 3 庞加莱截平面电路的设计与实现

#### 3.1 截平面电路的设计

在三维相空间中, 本文设计了任意庞加莱截平面生成电路, 如图 5 所示. 电路由一个运算放大器  $A_1$ , 三个双联同轴电位器  $R_{wx}, R_{wy}$  和  $R_{wz}$ , 四对同值电阻  $R_x, R_y, R_z$  和  $R_f$  构成加减混合运算电路, 其输出为  $V_\Sigma$ ; 运算放大器  $A_2$ , 电位器  $R_{w1}$ , 两个参考电压  $V_{R1}$  和  $V_{R2}$  ( $V_{R2}$  为负值), 电阻  $R$  和稳压管  $D_Z$  构成输出 TTL 信号  $V_J$  的比较器. 电路有三对输入端 1 和 1', 2 和 2', 3 和 3' 分别接收待测系统输出信号  $V_x, V_y$  和  $V_z$ . 三维空间的任意平面方程为 (1) 式.

当将图 5 输入端 1, 2 和 3 分别对应接输入信号  $V_x, V_y$  和  $V_z$ , 而 1', 2' 和 3' 同时接地时, 由图 5 可知:  $i_x + i_y + i_z = i_f$  和  $\frac{V_x}{R_x + R_{wx}} + \frac{V_y}{R_y + R_{wy}} + \frac{V_z}{R_z + R_{wz}} = \frac{-V_\Sigma}{R_f}$ , 则得

$$V_\Sigma = -\frac{R_f V_x}{R_x + R_{wx}} - \frac{R_f V_y}{R_y + R_{wy}} - \frac{R_f V_z}{R_z + R_{wz}}, \quad (2)$$

(2) 式与 (1) 式比较得  $a = -\frac{R_f}{R_x + R_{wx}}$ ,  $b = -\frac{R_f}{R_y + R_{wy}}$ ,  $c = -\frac{R_f}{R_z + R_{wz}}$ , 实现了  $a < 0, b < 0, c < 0$ , 它们的取值范围为  $-\frac{R_f}{R_i} \sim -\frac{R_f}{R_i + R_{wi}}$ , 其中  $i$  为  $x, y$  和  $z$ . 调整电位器  $R_{wi}$  可分别调整对应系数  $a, b$  和  $c$  的值.

当输入端 1', 2' 和 3' 分别对应接  $V_x, V_y$  和  $V_z$ , 而 1, 2 和 3 同时接地时, 由图 5 可知  $i'_x + i'_y + i'_z = i'_f$  和  $\frac{V_x - V_p}{R_x + R_{wx}} + \frac{V_y - V_p}{R_y + R_{wy}} + \frac{V_z - V_p}{R_z + R_{wz}} = \frac{V_p}{R_f}$ , 则得

$$V_p = R_p \left( \frac{V_x}{R_x + R_{wx}} + \frac{V_y}{R_y + R_{wy}} + \frac{V_z}{R_z + R_{wz}} \right)$$

$$\text{和 } V_n = \frac{[(R_x + R_{wx}) // (R_y + R_{wy}) // (R_z + R_{wz})] V_\Sigma}{(R_x + R_{wx}) // (R_y + R_{wy}) // (R_z + R_{wz}) + R_f}$$

其中,  $R_p = (R_x + R_{wx}) // (R_y + R_{wy}) // (R_z + R_{wz}) // R_f$ . 由“虚短”得  $V_p = V_n$ , 则

$$V_\Sigma = \frac{R_p R_f}{R_n} \left( \frac{V_x}{R_x + R_{wx}} + \frac{V_y}{R_y + R_{wy}} + \frac{V_z}{R_z + R_{wz}} \right),$$

其中,  $R_n = (R_x + R_{wx}) // (R_y + R_{wy}) // (R_z + R_{wz}) // R_f$ . 由于  $R_p = R_n$ , 则

$$V_\Sigma = \frac{R_f V_x}{R_x + R_{wx}} + \frac{R_f V_y}{R_y + R_{wy}} + \frac{R_f V_z}{R_z + R_{wz}}, \quad (3)$$

(3) 式与 (1) 式比较得  $a = \frac{R_f}{R_x + R_{wx}}$ ,  $b = \frac{R_f}{R_y + R_{wy}}$ ,  $c = \frac{R_f}{R_z + R_{wz}}$ , 实现了  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , 它们的取值范围:  $\frac{R_f}{R_i + R_{wi}} - \frac{R_f}{R_i}$ , 其中  $i$  为  $x, y$  和  $z$ . 调整电位

器  $R_{wi}$  可调整对应的系数值.

图 5 中三对输入端 1 和 1', 2 和 2', 3 和 3' 分别对应决定  $a, b, c$  的符号. 当  $a > 0$  时, 1 接地, 1' 接  $V_x$  输入信号; 当  $a < 0$  时, 1' 接地, 1 接  $V_x$  输入信号. 当  $b > 0$  时, 2 接地, 2' 接  $V_y$  输入信号; 当  $b < 0$  时, 2' 接地, 2 接  $V_y$  输入信号. 同理, 当  $c > 0$  时, 3 接地, 3' 接  $V_z$  输入信号; 当  $c < 0$  时, 3' 接地, 3 接  $V_z$  输入信号. 当  $a = 0, b = 0$  或  $c = 0$  时, 图 5 对应的一对输入端均接地. 截平面系数  $d = V_T = [R'V_{R1} + (R_{w1} - R')V_{R2}] / R_{w1}$ , 其范围是  $V_{R2} - V_{R1}$ , 调整  $R_{w1}$  可以改变  $d$  的大小和符号. 因此, 由图 5 可见:  $V_\Sigma = aV_x + bV_y + cV_z$ , 当  $V_\Sigma \geq d$  时, 则  $V_J$  就会输出低电平; 当  $V_\Sigma < d$  时,  $V_J$  就会输出高电平, 如图 2 所示.

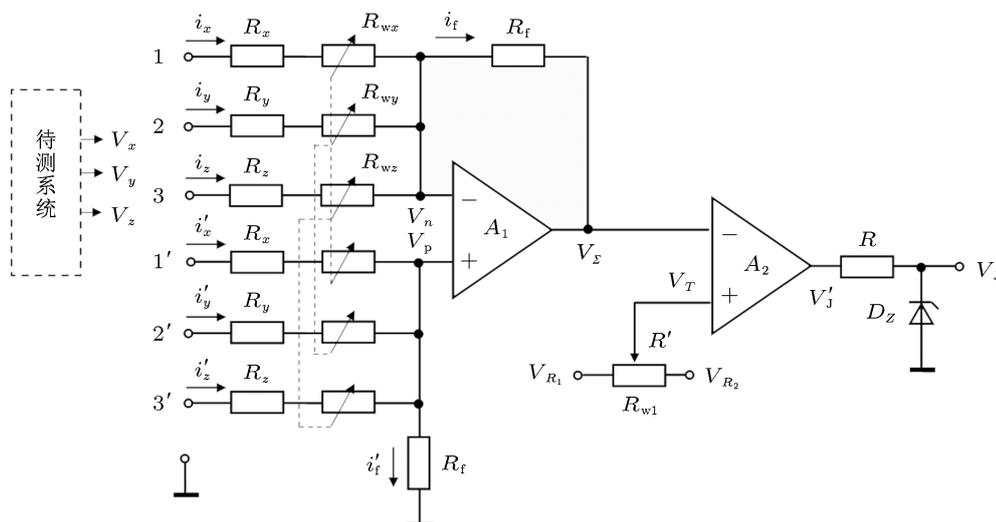


图 5  $ax+by+cz=d$  任意截平面生成电路

由上述分析可知: 通过调整图 5 中双联电位器  $R_{wx}, R_{wy}, R_{wz}$  和电位器  $R_{w1}$  可以灵活改变平面 (1) 的系数, 以及待测信号接入不同的输入端可以改变系数的符号, 即改变平面的方向和位置, 从而获得任意截平面  $V_J$ .

### 3.2 取样信号生成电路和显示信号生成电路的实现

根据第 2 章分析, 设计出取样信号生成电路和显示信号生成电路如图 6 所示, 图 6 的左侧是由两个单稳态触发器、一个双联电位器、两个等值的电容和一个或门构成的, 该电路产生窄脉冲, 即取

样控制信号  $V_s$ .  $V_{Z1}$  是在  $V_J$  的下降沿处产生一个窄脉冲;  $V_{Z2}$  是在  $V_J$  的上升沿处产生一个窄脉冲. 经或门将  $V_{Z1}$  和  $V_{Z2}$  相叠加产生  $V_s$ . 窄脉冲的脉冲宽度  $t_w = \ln 2 C_1 R_{w2}$ , 脉宽越窄示波器显示的点相对越清晰. 调整  $R_{w2}$  可以改变截面上交点的大小. 图 6 的右侧是由三个取样保持电路与三个等值电容构成的显示信号生成电路. 三个电容容量既不能太大又不能太小, 太大输出电压下降慢, 但获取时间变长; 太小获取时间小, 但输出电压下降快. 显示信号生成电路的三个输入端分别接收待测系统的输出信号  $V_x, V_y$  和  $V_z$ , 其另一个输入端接收取样控制信号  $V_s$ . 在  $V_s$  的控制下, 该电路输出  $V_{ox}, V_{oy}$  和  $V_{oz}$  信号.

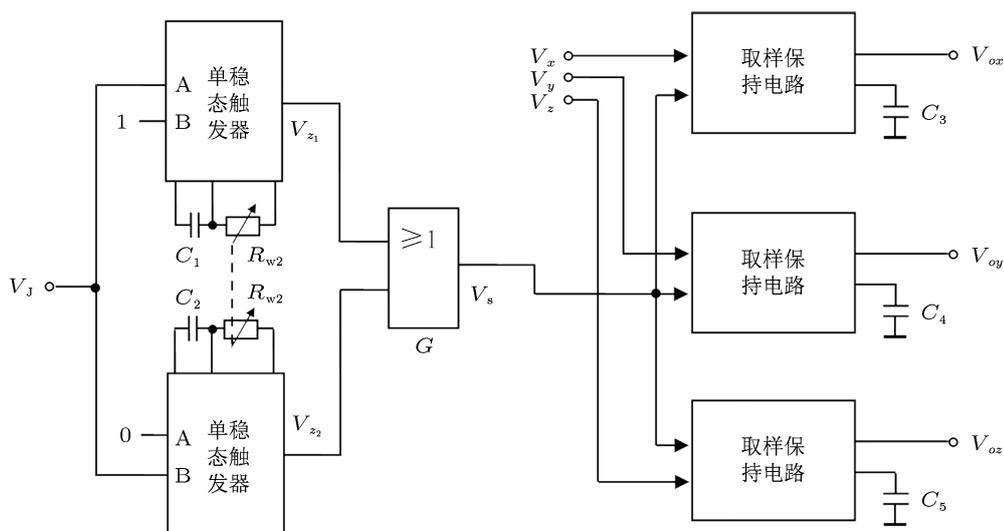


图6 取样信号电路和显示信号电路

#### 4 仿真与物理实验

选择典型的蔡氏电路<sup>[16]</sup>(见图7)作为待测的动力系统,其微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= \frac{V_y - V_x}{RC'} - \frac{g(V_x)}{C'}, \\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{V_x - V_y}{RC''} + \frac{I_z}{C''}, \\ \frac{dI_z}{dt} &= -\frac{V_y}{L}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $g(V_x) = m_1 V_x + 0.5(m_0 - m_1)(|V_x + E| - |V_x - E|)$  为三段折线的蔡氏二极管,  $E$  为折线的折点,  $m_0$  和  $m_1$  为折线内外两个斜率. 蔡氏电路的系统有三个输出变量  $V_x$ ,  $V_y$  和  $I_z$ . 将蔡氏电路系统(4)归一化, 设  $x = V_x/E$ ,  $y = V_y/E$ ,  $z = I_z/(EG)$ ,  $\tau = t/(C''R)$ ,  $A = m_0R$ ,  $B = m_1R$ ,  $\alpha = C''/C'$ ,  $\beta = C''R^2/L$ , 得方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $f(x) = Bx + 0.5(A - B)(|x + 1| - |x - 1|)$ .

选取方程(5)的参数为  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 50/9$ ,  $A = -0.76$ ,  $B = -0.41$ , 初值为:  $x(0) = 0.02$ ,  $y(0) = 0.02$ ,  $z(0) = 0.02$ . 用 Matlab 进行计算机仿真得到三维混沌相图, 如图12所示. 下面在这种条件下对各种类

型庞加莱截面进行仿真和物理实验.

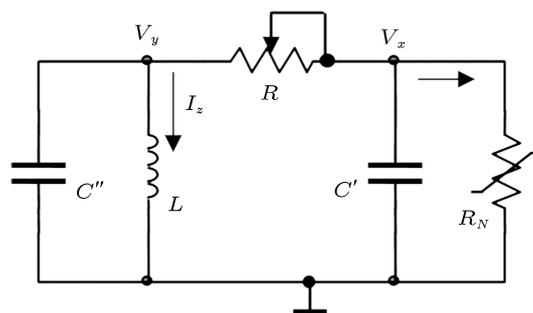


图7 蔡氏电路

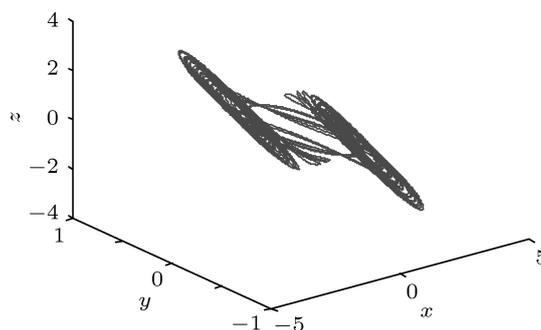


图8 蔡氏系统仿真混沌相图

设计的整个庞加莱截面电路图4主要由电路图5和图6连接构成的(注:将六个输入端分别各接一个电压跟随器以解决阻抗匹配问题.为节省篇幅不再重画电路).蔡氏电路的输出信号  $V_x$ ,  $V_y$  和  $V_z$  可对应送入图5中输入端的1和1'端,2和

2' 端和 3 和 3' 端. 在以下实验中选用运算放大器 TL082, 单稳态触发器 74LS123N、或门 74LS02 和 74LS04, 取样保持电路 LF398N, 电容  $C_1 = C_2 = 10$  nF, 电容  $C_3 = C_4 = C_5 = 1$  nF, 电位器  $R_{w1} = R_{w2} = 10$  k $\Omega$ , 双联电位器  $R_{wx} = R_{wy} = R_{wz} = 100$  k $\Omega$ , 电阻  $R_x = R_y = R_z = 5$  k $\Omega$ ,  $R_f = 15$  k $\Omega$ ,  $R = 0.47$  k $\Omega$ , 参考电压  $V_{R1} = +5$  V,  $V_{R2} = -5$  V.

### 4.1 三类庞加莱截面的实验

蔡氏系统 (5) 的各项参数如上所示, 仿真的混沌仍然是图 8. 取任意庞加莱截面 (1) 系数为  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 0$ , 则得截面为  $y = 0$ . 用 Matlab 对微分方程 (5) 和方程  $y = 0$  仿真得庞加莱截面在  $X-Z$  相平面的映射, 如图 9(a) 所示.

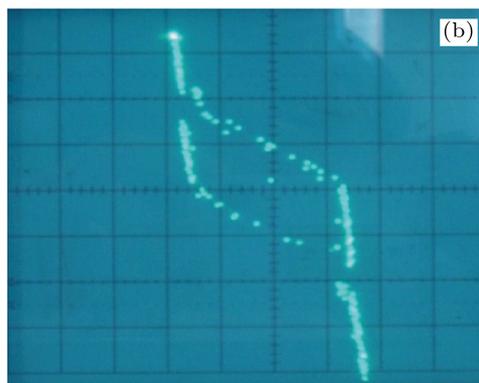
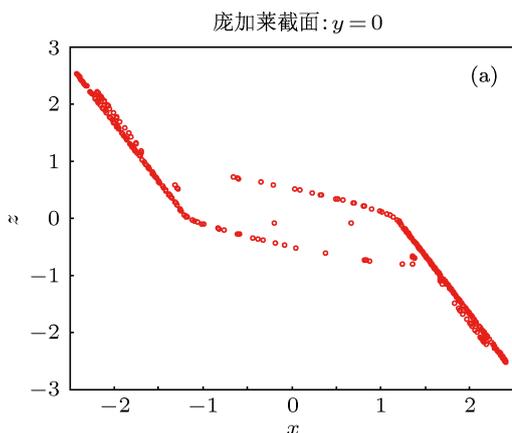


图 9  $y = 0$  庞加莱截面 (a) 仿真结果; (b) 示波器测量结果

将蔡氏电路图 7 中的  $V_y$  接入庞加莱截面电路图 4 的输入端 2', 并将其他五个输入端接地, 调整电位器  $R_{wy}$ 、和  $R_{w1}$ , 使截面系数为  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 0$ , 得截面  $y = 0$ . 用示波器观察庞加莱截面的映射图, 如图 9(b) 所示. 图 9(a) 和图 9(b) 比较表明仿真的结果和实际电路测量的结果在映射点分布形状上基本一致. 由此, 证明了设计的截面电路图 4 对  $ax = d$  ( $a \neq 0$ ) 类截面是有效的.

为:  $x - 2y = 0$ , Matlab 仿真得庞加莱截面在  $X-Z$  相平面的映射为图 10(a) 所示. 将  $V_x$  和  $V_y$  分别接入电路图 4 的输入端 1' 和 2, 其他输入端接地, 调整电位器  $R_{wx}$ ,  $R_{wy}$  和  $R_{w1}$ , 使  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 0$ ,  $d = 0$ , 用示波器测得庞加莱截面在  $X-Z$  面上的映射如图 10(b) 所示. 比较仿真图 10(a) 和实测图 10(b) 可以看出截面上的点集分布形状相同. 由此, 证明了设计的截面电路对  $ax + by = d$  ( $ab \neq 0$ ) 类截面是有效的.

蔡氏系统 (5) 的各项参数如上所示, 混沌仿真仍然是图 8. 取  $ax + by = d$  ( $ab \neq 0$ ) 类庞加莱截面

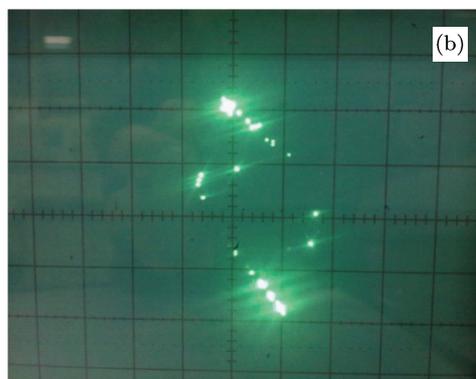
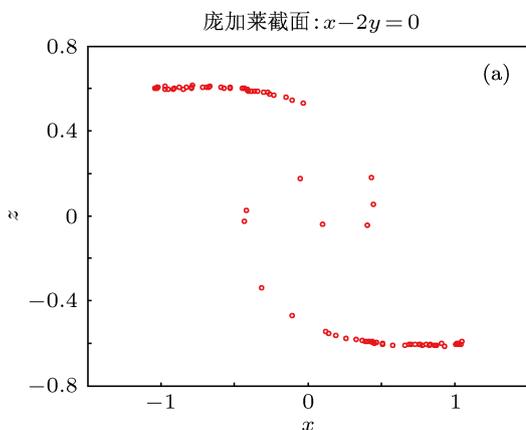


图 10  $x - 2y = 0$  庞加莱截面 (a) 仿真结果; (b) 示波器测量结果

系统 (5) 的各项参数如上所示, 混沌仿真仍然是图 8. 选取  $ax + by + cz = d$  ( $abc \neq 0$ ) 类庞加莱截面为  $0.617x + y + 1.8z = 0$ , 用 Matlab 仿真的庞加莱截面在  $X-Z$  相平面的映射为图 11(a) 所示. 将  $V_x, V_y$  和  $V_z$  分别接入电路 (4) 输入端  $1', 2'$  和  $3'$ , 其他输入端接地, 调整电位器  $R_{wx}, R_{wy}, R_{wz}$  和  $R_{w1}$ , 使  $a = 0.617, b = 1, c = 1.8, d = 0$ , 用庞加莱截面

电路系统图 4 实测的截面, 如图 11(b) 所示. 图 11(a) 和 (b) 比较表明仿真的结果和物理电路测量映射点的分布形状相同, 由此, 证明了设计的截面电路图对  $ax + by + cz = d$  ( $abc \neq 0$ ) 类截面是有效的.

图 9(b), 图 10(b) 和图 11(b) 都是用通用模拟双踪示波器实测后, 再用数码相机拍照下来的.

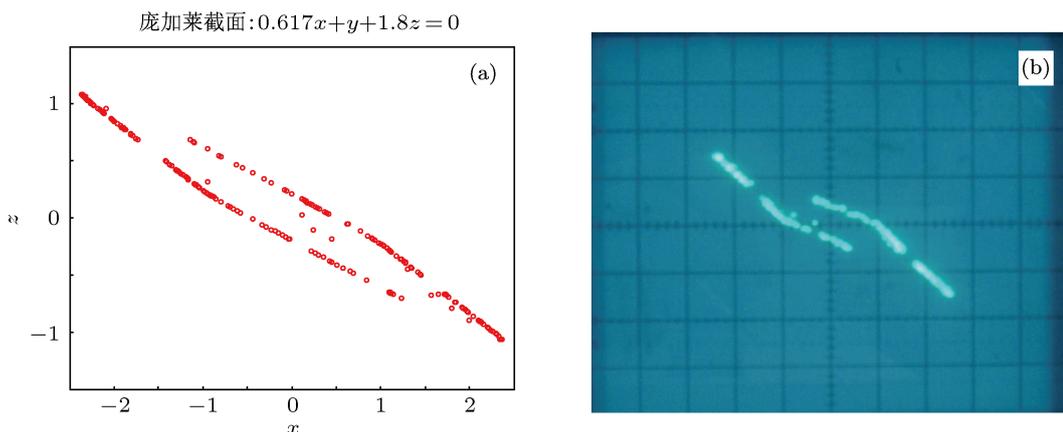
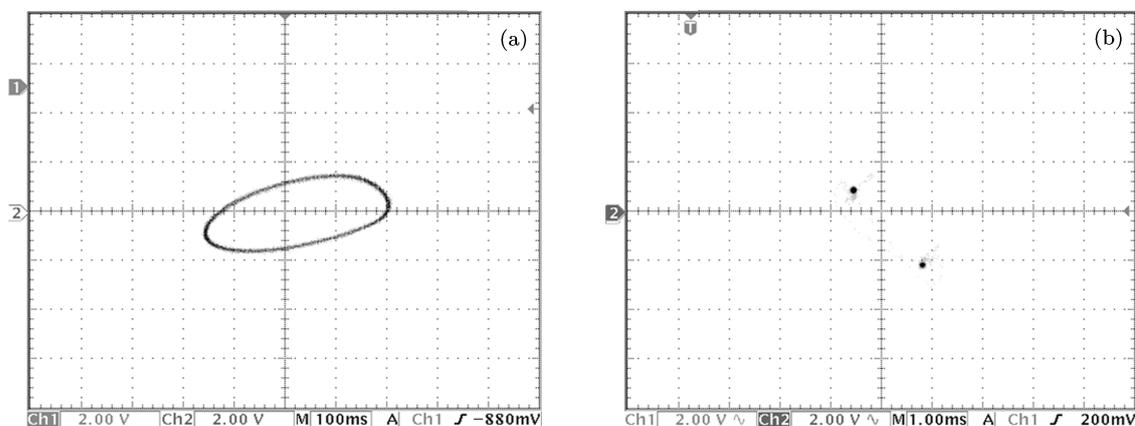


图 11  $0.617x + y + 1.8z = 0$  庞加莱截面 (a) 仿真结果; (b) 示波器测量结果

#### 4.2 蔡氏电路各种状态下的庞加莱截平面实验

蔡氏电路具有丰富的动力学行为, 调整蔡氏电路图 7 中线性电阻  $R$  的阻值时, 蔡氏电路会表现出

不同的状态, 如: 一周期、两周期、三周期、……、单涡混沌、双涡混沌等状态. 本文用所设计的三维任意庞加莱截平面电路 (图 4) 测试蔡氏电路的各种状态, 从而进一步证实庞加莱截平面电路的有效性和实用性.



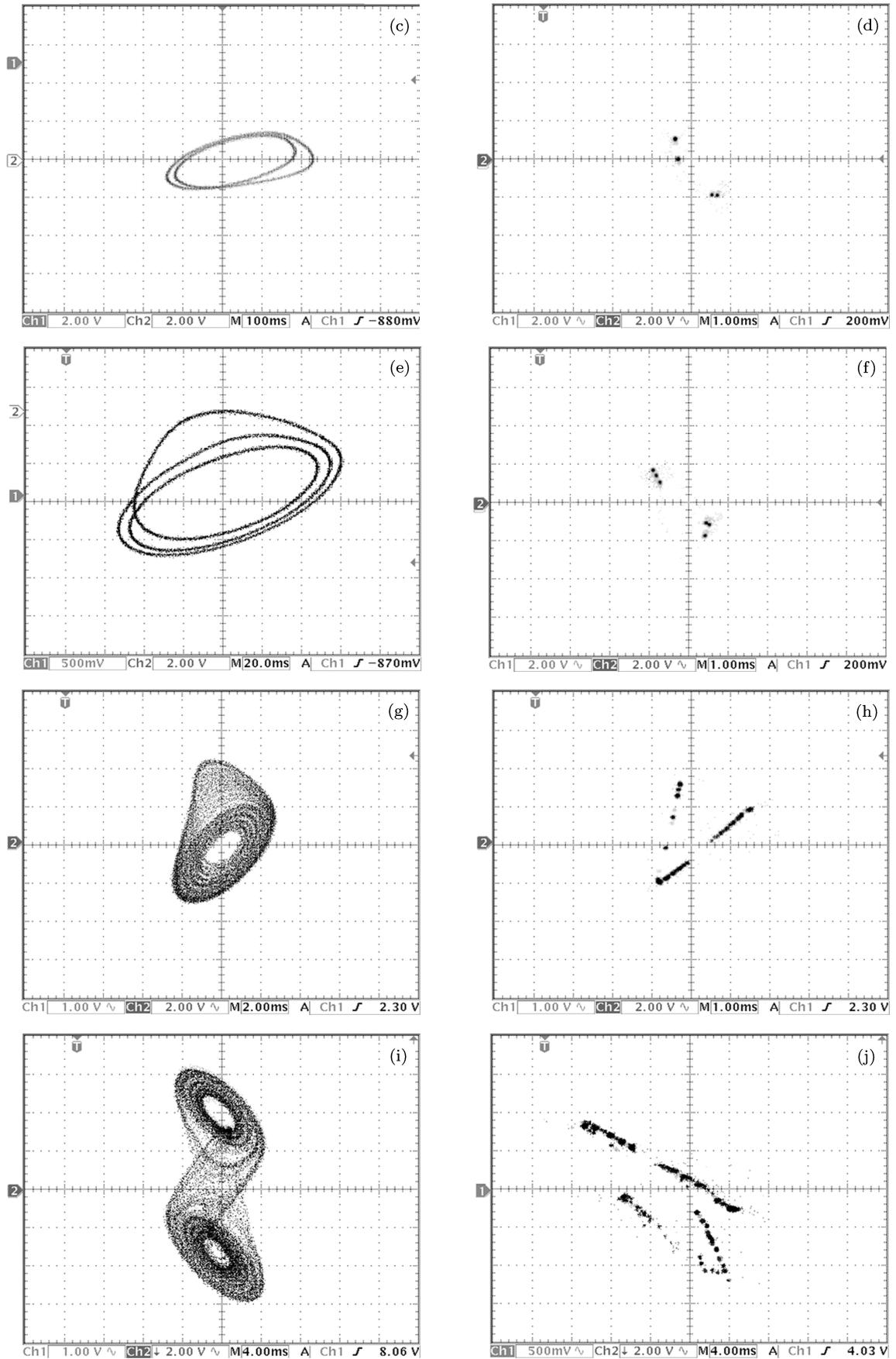


图 12 数字示波器显示蔡氏电路的状态和庞加莱截面图

为了便于观测庞加莱截面和获取完整截面映射图,在观测同时对蔡氏电路的不同状态随时调整电路相关电位器以调整截面方程系数  $a, b, c, d$ . 图 12(a) 为蔡氏电路的一周期相图,对应图 12(b) 是其庞加莱截面的映射图. 该截面上有稳定的两个不动点,表明蔡氏电路系统处于稳定的一周期状态,即轨迹随时间运行穿入和穿出截面时只相交这两点;图 12(c) 为蔡氏电路的两周期相图,对应图 12(d) 是其庞加莱截面的映射图. 该截面上有四个不动点,表明电路系统是两周期的,即轨迹随时间运行时穿入截面时产生两个交点和穿出截面时又产生两个交点;图 12(e) 为蔡氏电路的三周期相图,对应图 12(f) 是其截面的映射图,有六个稳定点,表明系统运行轨迹与截面相交六处;图 12(g) 是蔡氏电路处于单涡混沌状态的相图,对应图 12(h) 该截面上有无数个点沿曲线分布,表明蔡氏系统运动时无数次的沿着该曲线穿越且不重叠(因混沌在相空间运动时,其轨迹不重叠);图 12(i) 是蔡氏电路处于双涡混沌状态的相图,对应庞加莱截面的映射图 12(j),其上有无数的点,并按照特定图案分布的. 由图 12 可以看出设计的庞加莱截面电路能方便地

测量系统所处的状态. 因此,该电路具有实际应用价值. 图 12 中所有图形均为数字双踪示波器在  $Y-X$  方式下测出的.

## 5 结论

文中解决了第 2 章中提出的两个关键问题,研究和设计出了三维任意庞加莱截面电路. 用典型的蔡氏电路作为待测系统,用物理电子元器件实现了任意庞加莱截面电路,并用两种示波器对蔡氏电路的各种状态的庞加莱截面进行了实际测量,同时进行了仿真辅助实验. 文中物理测量的所有庞加莱截面图形均可用通用模拟和数字双踪示波器观测,表明该电路的实用性. 物理测量与计算机仿真测量图形的一致表明设计的庞加莱截面电路在线观测复杂系统运动状态的有效性. 不仅任意截平面的方位可在线通过调整对应的  $a, b, c$  和  $d$  系数的电位器方便调整,而且可根据显示图形的具体情况调整截面上交点的大小. 在本电路的基础上可方便的将三维扩展成更多维,并可应用到更多的工程领域.

- [1] Ma Y, Gu M L 2006 *Audio Engineering* **8** 39 (in Chinese) [马勇, 顾明亮 2006 电声技术 **8** 39]
- [2] Li P, Shen D, Jia X N 2011 *J. Clin Anesthesiol.* **27** 116 (in Chinese) [李佩, 申岱, 贾晓宁 2011 临床麻醉学 **27** 116]
- [3] Zhao J J, Zhang Y 2008 *Adv. Cardiovasc Dis.* **29** 91 (in Chinese) [赵进军, 张颖 2008 心血管病学进展 **29** 91]
- [4] Strumillo P, Ruta J 2002 *IEEE Engineering in Medicine and Biology* **21** 62
- [5] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Wang J P, Jin Y Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010503 (in Chinese) [周国华, 许建平, 包伯城, 王金平, 金艳艳 2011 物理学报 **60** 010503]
- [6] Pan C, Zhang J M 2007 *Journal of spacecraft TT&C Technology* **26** 76 (in Chinese) [潘昶, 张建民 2007 飞行器测控学报 **26** 76]
- [7] Zhang H Q, Li Y J 2011 *The 3rd IEEE International Conference on Advanced Computer Control* Harbin, China, January 18–20, 2011 p417 (IEEE)
- [8] Chen H, Gao M Z 2010 *The Third International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications* Kunming, China, October 29–31, 2010 p221 (IEEE)
- [9] Wu X Z, Li Z X, Zhang Y X, Feng R F, Gu J Z, Zhuo Y Z 2001 *Science in China (Series A)* **44** 923
- [10] Zhou X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100503 (in Chinese) [周小勇 2011 物理学报 **60** 100503]
- [11] Chen D Y, Shen T, Ma X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050505 (in Chinese) [陈帝伊, 申滔, 马孝义 2011 物理学报 **60** 050505]
- [12] Peng S J, Shui H T, Ma H X 2011 *Control Engineering of China* **18** 142 (in Chinese) [彭胜军, 税海涛, 马宏绪 2011 控制工程 **18** 142]
- [13] Zhang J, Hui M 2011 *Journal of Circuits and Systems* **16** 80 (in Chinese) [张皎, 惠萌 2011 电路与系统学报 **16** 80]
- [14] Wang L, Peng J H, Zhang L J 2007 *Journal of Shenzhen University Science and Engineering* **24** 290 (in Chinese) [王琳, 彭建华, 张立静 2007 深圳大学学报理工版 **24** 290]
- [15] Chai Wah Wu, Rulkov N F 1993 *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* **40** 707
- [16] Matsumoto T, Chua L O, Komuro M 1985 *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS* **32** 797

# Design and implementation of an arbitrary Poincaré plane section circuit in three-dimensional space\*

Chen Hong<sup>†</sup> Wu Ling

(*Electronic Engineer College, Heilongjiang University, Harbin 150080, China*)

(Received 13 February 2012; revised manuscript received 16 August 2012)

## Abstract

The Poincaré section method is an effective method to simplify the analysis of complex dynamic system motion state. To achieve online observing system states conveniently, an arbitrary directional Poincaré plane section physical electronic circuit in three-dimensional space is designed and realized. Firstly, the key problems of an arbitrary Poincaré plane section circuit design are analyzed and studied in detail. And then the physical circuit is realized in classification. As Chua's circuit has rich dynamic behaviors, the typical Chua's circuit is chosen as the experimental dynamical system. And then a lot of the physical experiments with this Poincaré plane section circuit are performed in real time. For example, Poincaré plane section diagrams in different conditions of Chua's circuit are measured, and the test experiments in the same kind of chaotic state, with different plane sections chosen, are carried out. All Poincaré section map diagrams and phase diagrams are measured by two double-channel oscilloscopes (analogue oscilloscope and digital oscilloscope). At the same time, computer simulation experiments are conducted by using Matlab. These results show the practicability and effectiveness of the Poincaré plane section circuit.

**Keywords:** Poincaré section, plane section circuit, Chua's circuit, oscilloscope

**PACS:** 05.45.-a, 07.50.Ek, 43.66.Yw, 07.07.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.62.020507

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61072072), the Nature Science Foundation of Heilongjiang Province (Grant No. F201249), the Scientific Research Foundation of the Education Department of Heilongjiang Province China (Grant No. 12521402), and Key Laboratory of Electronics Engineering, College of Heilongjiang Province, China (Grant No. DZZD20100021).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: chenhongdeepred@163.com