

周期切换下 Chen 系统的振荡行为 与非光滑分岔分析*

余跃¹⁾²⁾ 张春¹⁾ 韩修静¹⁾ 姜海波¹⁾ 毕勤胜^{1)†}

1) (江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

2) (南通大学理学院, 南通 226019)

(2012年7月10日收到; 2012年7月30日收到修改稿)

研究了不同参数 Chen 系统之间进行周期切换时的分岔和混沌行为. 基于平衡态分析, 考虑 Chen 系统在不同稳态解时通过周期切换连接生成的复合系统的分岔特性, 得到系统的不同周期振荡行为. 在演化过程中, 由于切换导致的非光滑性, 复合系统不仅仅表现为两子系统动力特性的简单连接, 而且会产生各种分岔, 导致诸如混沌等复杂振荡行为. 通过 Poincaré 映射方法, 讨论了如何求周期切换系统的不动点和 Floquet 特征乘子. 基于 Floquet 理论, 判定系统的周期解是渐近稳定的. 同时得到, 随着参数变化, 系统既可以由倍周期分岔序列进入混沌, 也可以由周期解经过鞍结分岔直接到达混沌. 研究结果揭示了周期切换系统的非光滑分岔机理.

关键词: 周期切换, Chen 系统, Poincaré 映射, 非光滑分岔

PACS: 05.45.-a, 84.30.-r

DOI: 10.7498/aps.62.020508

1 引言

现实世界中如物理、化学、生物以及各种实际工程技术领域的许多实际问题会涉及到不同子系统之间的切换, 如含有双向开关切换的控制电路^[1,2], 反应催化中的自激振荡^[3], 心脏扩张收缩的跳动过程^[4], 复杂网络模型^[5], 机械系统中对摩擦行为的控制^[6], 卫星轨道的变轨^[7]等等. 这些问题的理论模型大都可以由两组或两组以上的微分方程组加上切换条件, 组成切换系统来刻画.

由于切换系统具有广泛的应用背景, 同时在不同的切换系统中存在着大量的特殊非线性行为, 其复杂性分析及其相应的机理研究引起了各国学者的广泛关注, 并开展了大量研究工作. Kousaka, Zhusubaliyev 和吴天一等^[8-10] 讨论了切换电路系统的动力学行为. Andrei 等^[11] 证明了特定线性切换系统的鲁棒稳定性条件. Xie 和 Wang^[12] 分析了

时滞切换系统的稳定性. Cheng 等^[13] 分析了切换控制系统的稳定性. Matthias 和 Pettersson 等^[14,15] 对某些特定切换系统的控制提出了相应策略. 总体而言, 已有的成果大多分析线性切换系统的稳定性及其控制, 对非线性切换系统的各种特殊振荡以及分岔研究较少.

切换系统的状态空间连续, 但系统的向量场不连续, 而是切换条件满足时, 轨线交替受到不同子系统向量场控制, 故其数学模型代表了一类较复杂的非光滑动力系统^[16,17]. 现阶段, 非光滑系统的研究已经取得一定结果. 如 Whiston^[18] 应用现代数学的奇异性理论, 研究了在简谐激励下, 单自由度振子与刚性约束的擦切碰撞引起的 Poincaré 映射奇异性, 及其对碰撞振动系统全局性态的影响. 胡海岩^[19] 分析了分段光滑系统的非光滑向量场, Poincaré 映射可微性以及系统复杂动力学行为. 陆启韶和金俐等^[20] 对具有刚性约束的 n 维非线性动力系统进行了研究, 给出了该系统 Poincaré 映射

* 国家自然科学基金 (批准号: 20976075, 10972091) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

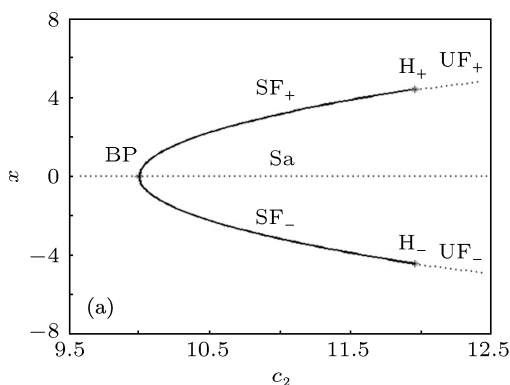
Jacobian 矩阵的计算方法. Leine 等^[21] 对非光滑系统周期解的不连续分岔作了进一步的研究. 已有非光滑问题的研究成果有助于切换系统分岔分析工作的开展.

1999 年, 陈关荣等^[22] 通过混沌系统的反控制发现了一个和著名 Lorenz 系统相似但拓扑不等价的新混沌吸引子——Chen 系统. 近年来, 关于 Chen 系统的动力学特性、控制与同步以及电路实现等被国内外学者广泛研究^[23,24]. 本文就考虑不同参数下的 Chen 系统周期切换生成的耦合系统, 分析参数变化时系统的动力学演化过程, 给出了系统的不同周期振荡行为, 并讨论相应的振荡机理. 研究发现系统的周期振荡行为可以由成对出现的切换点分割成不同部分, 分别受两子系统控制. 为分析系统的非光滑分岔机理, 考虑利用子系统的局部映射构造出整个系统的 Poincaré 映射. 进而讨论了周期切换系统的不动点和 Floquet 特征乘子的数值计算方法. 基于 Floquet 理论, 揭示出系统随着参数变化既可由切换点数目成倍增加, 即倍周期分岔序列进入混沌, 也可以由周期解经鞍结分岔到达混沌.

2 数学模型

两个不同参数条件下的 Chen 系统之间存在周期 T 切换, 相应的数学模型表示

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(y-x), & \dot{y} &= (c_1-a_1)x-xz+c_1y, \\ \dot{z} &= xy-b_1z, & t &\in [2nT, (2n+1)T], \\ \dot{x} &= a_2(y-x), \\ \dot{y} &= (c_2-a_2)x-xz+c_2y, & \dot{z} &= xy-b_2z, \end{aligned} \quad (1)$$



$$t \in [(2n+1)T, (2n+2)T], \quad (2)$$

其中 $n \in N$, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 为参数.

整个系统的向量场在两自治系统之间作周期 T 切换, 导致系统存在一类非光滑点, 即切换点, 连接由两子系统定义的轨道. 不仅是周期切换, 同时两子系统的行为及其分岔模式, 都会影响着系统的动力学演化过程. 因此, 首先分析 Chen 系统的稳态运动及其相应的分岔特性, 进而探讨周期切换下整个系统的动力学行为.

系统 (1) 中固定 $a_1 = 35, b_1 = 3, c_1 = 19$, 此时 Chen 系统有三个平衡点, 分别为 $E_0^1(0,0,0), E_{\pm}^1(\pm 3, \pm 3, 3)$, 其中 E_0^1 为鞍点, E_{\pm}^1 为稳定焦点. 系统 (2) $a_2 = 20, b_2 = 5$, 当 $c_2 > 10$ 时, 平衡点 $E_0^2(0,0,0), E_{\pm}^2(\pm\sqrt{10c_2-100}, \pm\sqrt{10c_2-100}, 2c_2-20)$, 其稳定性由其相应的 Jacobian 矩阵的特征值决定. 图 1(a) 给出了平衡点随 c_2 的变化曲线, 图中实线表示稳定的平衡点, 虚线表示不稳定的平衡点, $H_{\pm}(c_2 = 11.95)$ 表示 Hopf 分岔点, $BP(c_2 = 10)$ 表示 Fold 分岔点. E_0^2 始终为鞍点 (Sa). 当 $10 < c_2 < 11.95$ 时, E_{\pm}^2 均为稳定的焦点 (SF $_{\pm}$). 当 $c_2 = 10$, 平衡点发生 Fold 分岔, 系统只剩下唯一的鞍点 E_0^2 . 当 $c_2 > 11.95$ 时, E_{\pm}^2 同时由稳定的焦点通过超临界 Hopf 分岔演化为不稳定的稳定焦点 (UF). E_{\pm}^2 在参数穿越 Hopf 分岔点时会导致周期振荡解. 图 1(b) 具体给出了 $a_2 = 20, b_2 = 5, c_2 = 11$, 时 Chen 系统的系统结构, 由鞍点 E_0^2 定义的鞍曲面将相空间划分为两个子空间, 子空间的中心区域分别构成稳定焦点 E_{\pm}^2 的吸引盆. 同时注意到 Chen 系统具有自然的对称性, 即它在变换 $(x,y,z) \rightarrow (-x,-y,z)$ 下保持不变, 所以轨线在相空间内关于上述变换对称.

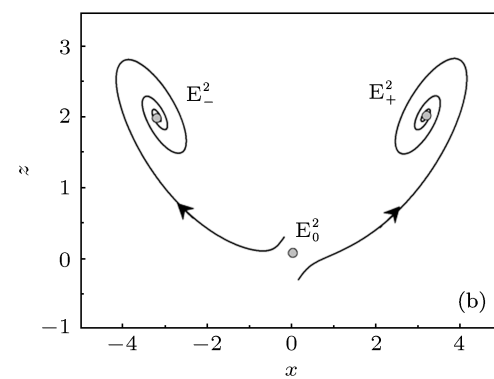


图 1 (a) Chen 系统的平衡点曲线; (b) Chen 系统当 $c_2 = 11$ 时的平衡点结构

3 切换作用下 Chen 系统的复杂振荡行为

3.1 切换系统的动力学演化过程

周期切换系统的 Poincaré 映射是单系统 Poincaré 映射的推广. 在不同的参数条件下, 子系统会呈现出不同的动力特性, 这些特性会对切换系统的行为产生影响. 为揭示稳态解下, Chen 系统

构成的周期切换系统的动力学演化过程, 固定系统初值为 (3, 3, 6), 切换周期 $T = 1.85$, (1) 式中参数 $a_1 = 35, b_1 = 3, c_1 = 19$, (2) 式中 $a_2 = 20, b_2 = 5$, 取 c_2 为分岔参数, 变化范围为 $10 < c_2 < 11.95$, 选取 Poincaré 截面作出整个切换系统的分岔图 (图 2). 由 Chen 系统的平衡点分析可知, 在上述参数条件下, 子系统 (1) 和子系统 (2) 均为稳定的焦点, 切换系统的轨线会以切换周期 T 在两子系统的吸引子上来回变换.

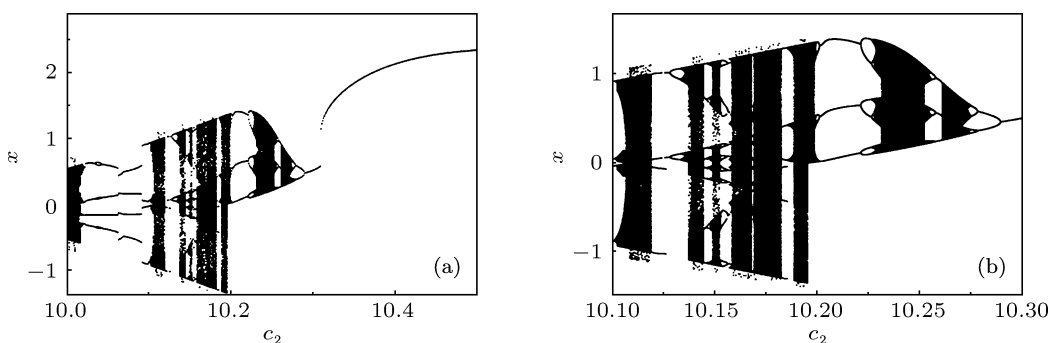


图 2 系统的分岔图 (a) $10 < c_2 \leq 10.5$; (b) $10.1 \leq c_2 \leq 10.3$

当 $c_2 \geq 10.29$ 时, 切换系统表现为稳定的周期解, 其周期由切换周期 T 决定 (见图 2(a)). 同时, 在切换系统的周期轨道上, 明显存在两个不同的切换点 (图 3(a) 中的 A 和 B 点), 分别导致轨线在两子系统之间来回变换. 虽然两子系统均为稳态解, 但是切换系统的轨线不是在两子系统的稳态解之间简单连接, 而是分别趋于两稳态解的过渡过程之间的切换. 这是因为, 当系统在每一子系统时, 轨线将趋于稳态吸引子, 但尚未到达就又因为周期切换条件满足, 轨线即以该点为初始点向另一子系统的稳态解逼近. 当 $c_2 < 10.29$ 时, 此时切换系统周期轨道整体失稳, 产生倍周期分岔 (图 2(b)), 导致周期 2 解, 倍周期分岔序列进一步使得切换系统产生混沌振荡. 随后, 系统又多次出现周期振荡和分岔等非线性现象. 如在 $c_2 = 10.261$ 附近存在周期 3 解直接通往混沌现象; $c_2 = 10.23$ 附近系统出现倍周期分岔.

3.2 周期解的振荡机理

对于周期解 (图 3(a)) 而言, 在该周期解的轨道上存在两个不同的切换点 A 和 B, 分别指向两子系统. 假设周期切换轨道的起点是从子系统 (1) 开始的, 即在 $[0, T]$ 时间内, 系统受系统 (1) 支配, 所以从

起点 A 开始, 轨线将会在 (1) 的向量场作用下运动. 在未到达切换条件时, 轨线将一直在系统 (1) 内运动并趋向焦点 E_+^1 . 但是, 当轨线运动到 B 时, 满足周期切换条件, 即时间 $t = T$, 切换导致系统转向于子系统 (2), 相点受 (2) 的向量场控制, 即以切换点 B 为初值, 进入子系统 (2), 在 $[T, 2T]$ 时间内, 轨线向焦点 E_+^2 逼近. 如果不存在切换, 轨线将最终逼近稳定的焦点. 但是当 $t = 2T$ 时, 周期切换条件重新满足, 此时轨线刚好重新回到点 A, A 即作为第二个切换点. 切换系统再次以 A 为初值, 受子系统 (1) 控制, 趋于焦点 E_+^1 . 上述过程重复进行, 切换点成对出现, 振荡周期为 $2T$.

显然, 两切换点 A 和 B 将切换系统的周期轨道划分为两部分, 分别以 A 和 B 为初值, 受两子系统控制, 趋于两子系统的稳态解. 同时, 由于在此参数条件下, 子系统 (1) 和 (2) 的稳态解均为焦点. 焦点存在相应的趋于该点的衰减过程, 因而当前参数下的周期切换系统的周期轨道会表现出两类不同振荡特性, 也即子系统 (1) 与子系统 (2) 的两种不同衰减振荡的耦合. 由于切换系统两子系统的运行按照周期 T 进行切换, 这种耦合振荡将由一组切换点连接两子过程, 往复交替.

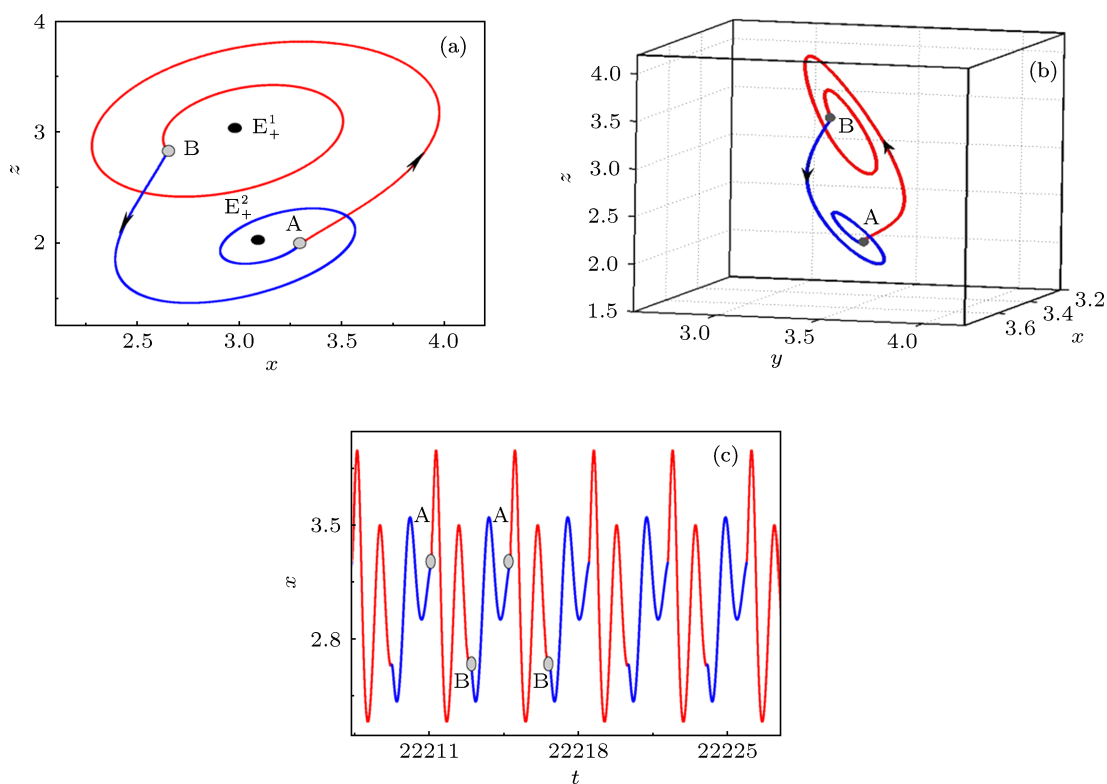


图3 $c_2 = 11$ 时周期解 (a) 平面相图; (b) 空间相图; (c) 时间历程

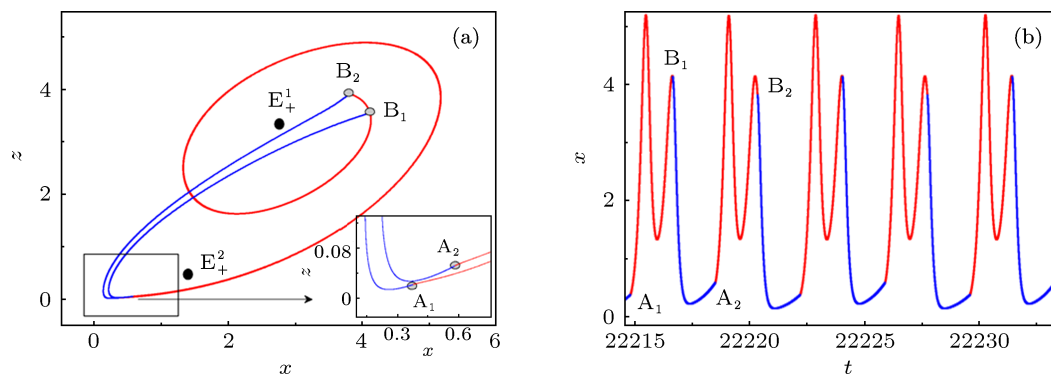


图4 $c_2 = 10.28$ 周期 2 解 (a) 平面相图; (b) 时间历程

3.3 k 周期及混沌振荡机理

当 $c_2 = 10.289$, 系统产生倍周期分岔, 导致具有 4 个切换点的 2 周期解 (图 4(a)), 周期为 $4T$, 切换点由原来的两个变化为四个. 假设切换系统轨迹起点子系统 (1) 的起点 A_1 处, 系统轨迹从 A_1 点开始受系统 (1) 的向量场支配, 向焦点 E_+^1 逼近. 经过时间 T 后, 轨迹运动到 B_1 点, 满足切换条件, 轨迹开始受到子系统 (2) 控制, 以 B_1 点为初值, 进入子系统 (2), 向该系统稳定的焦点 E_+^2 逼近, 直到时刻

$t = 2T$, 发生切换, 重新受子系统 (1) 控制. 但是随 c_2 变化到临界值 10.289 时, 子系统 (2) 的向量场的变化使得在 $2T$ 时刻, 轨迹无法回到初始切换点 A_1 , 也即系统无法做到在 $[0, 2T]$ 时间内在一对切换点上反复振荡, 达到稳态周期 $2T$ 解. 经过 $2T$ 时间, 轨迹到达的是另外一点 A_2 , 并以 A_2 为初始值, 重新受子系统 (1) 控制, 在 $[2T, 3T]$ 时间内, 轨迹趋向焦点 E_+^1 . 由于初值的改变, 在时间 T 内, 从 A_2 出发的朝焦点逼近的轨线, 不会与 $[0, T]$ 时间内的从 A_1 出

发的轨线重合, 即不会在 $t = 3T$ 时到达切换 B_1 , 而是到达新的切换点 B_2 , 并以 B_2 为初值, 趋于子系统 (2) 稳定的焦点 E_+^2 , 并在 $t = 4T$, 轨迹回到 A_1 , 构成切换系统的周期 2 解.

切换系统的周期 3, 周期 4 等 k 周期振荡行为与上述周期 2 解的振荡过程类似. 当 $c_2 = 10.28$, 切换系统的轨道再次失稳, 作周期 4 运动, 随后周期进一步倍化, 通向混沌. 当 $c_2 = 10.21$ 和 $c_2 = 10.261$, 系统均出现周期 3 运动 (图 5(a)), 这意味着切换系统的轨迹在两子系统来回振荡三次. 当 $c_2 = 10.222$ 时, 切换系统将会从周期 3 失稳进入稳定的周期 6 (图 5(b)) 运动, 随后通向混沌 (图 5(c)). 值得注意的

是, Chen 系统具有多个稳定的吸引子 (图 1(b)). 这将导致切换系统轨线在各子系统交替振荡时被不同吸引子吸引而产生丰富的动力学行为. 图 6(a) 给出了系统轨线围绕子系统 (1) 的平衡点 E_-^1 和子系统 (2) 的平衡点 E_-^2 生成的 2 周期解. 图 6(b) 的 4 周期解的轨线则围绕两子系统的两组稳定焦点 E_+^1 和 E_+^2 来回振荡. 图 6(c) 进一步给出围绕多平衡点的混沌吸引子. 这些振荡现象产生的原因是由于周期切换过程中, 切换点的位置随分岔参数改变而变化, 当参数突破某个临界值, 切换点不在子系统原平衡点的吸引域中, 而是被子系统另一平衡点吸引, 产生新的周期或者混沌振荡.

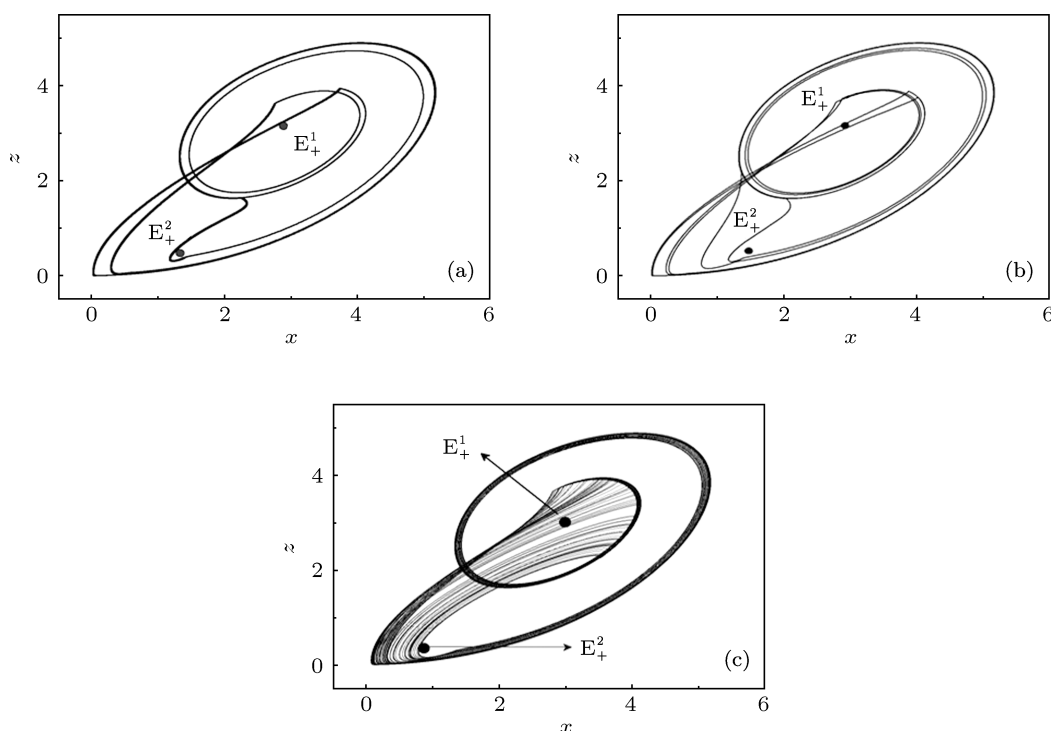


图 5 (a) $c_2 = 10.21$ 周期 3 解; (b) $c_2 = 10.222$ 周期 6 解; (c) $c_2 = 10.232$ 混沌解

4 非光滑分岔分析

4.1 不动点与 Floquet 乘子计算

Chen 系统在周期切换作用下, 由于向量场不连续, 导致系统整体具有非光滑特性, 从而引起非光滑分岔行为. 非光滑系统特有的动力学特性不能用通常光滑动力系统理论处理, 需要专门的理论和方法. 近年来, 非光滑系统的理论和数值方法取得了一定进展. 下面我们就引入局部映射, 构造 Poincaré 映射分析切换系统的不动

点, 给出周期切换系统 Floquet 特征乘子的计算方法.

设 φ_i 为周期切换系统 $\dot{x} = f_i(x, t)$, $x \in \mathbf{R}^3$, $i = 1, 2$ 两子系统的解. 由于切换周期 T 固定, 故我们选取相位面为 Poincaré 截面. 由两子系统的解定义局部映射:

$$P_1 : (x, y, z) \rightarrow \varphi_1(T, x, y, z),$$

$$P_2 : (x, y, z) \rightarrow \varphi_2(T, x, y, z),$$

则整个系统的 Poincaré 映射 P 可表示为上述局部映射的复合, 即

$$P: (x, y, z) \rightarrow \varphi_2(T, \varphi_1(T, x, y, z))$$

即 $P = P_2 \circ P_1$. (3)

Poincaré 映射 P 的不动点对应切换系统的周期解; k 周期不动点对应于系统的 k 周期解; Poincaré 映射的不变环对应于系统的概周期解. 数值上求 Poincaré 映射 P 的不动点, 可以采用 Newton-Raphson 迭代方法来求方程 $P(X) = X$ 的解. 假设 u 为映射 P 不动点的迭代值, 迭代公式为

$$u^{i+1} = u^i - \frac{P(u_i) - u_i}{DP(u_i) - E}. \quad (4)$$

这里 DP 是映射 P 的 Jacobi 矩阵, E 为单位矩阵. 根据复合映射链式求导法则, DP 计算可以借助 P_1, P_2 的 Jacobi 矩阵, 即

$$DP(u_i) = DP_2 \times DP_1(u_i), \quad (5)$$

而 DP_1, DP_2 是矩阵微分方程 (6) 当 $t = T$ 时刻的解, 可通过非光滑非线性分析的打靶法和 Runge-Kutta 算法, 从 0 到 T 数值积分计算其数值解.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_i} \end{bmatrix} = \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_i} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_i} \Big|_{t=0} = E, \quad (6)$$

$$i = 1, 2.$$

在上述不动点计算过程中, 同时得到 Poincaré 映射 P 的 Jacobi 矩阵, 再利用矩阵 QR 法求 DP 的特征值, 得到系统的 Floquet 特征乘子. 基于 Floquet 理论可对切换系统进行分析, 从而判断切换系统周期运动的稳定性和非光滑分岔行为. 下面就以上述方法具体计算周期切换系统在稳定周期运动和出现分岔时的 Floquet 乘子, 揭示周期切换系统的分岔机理.

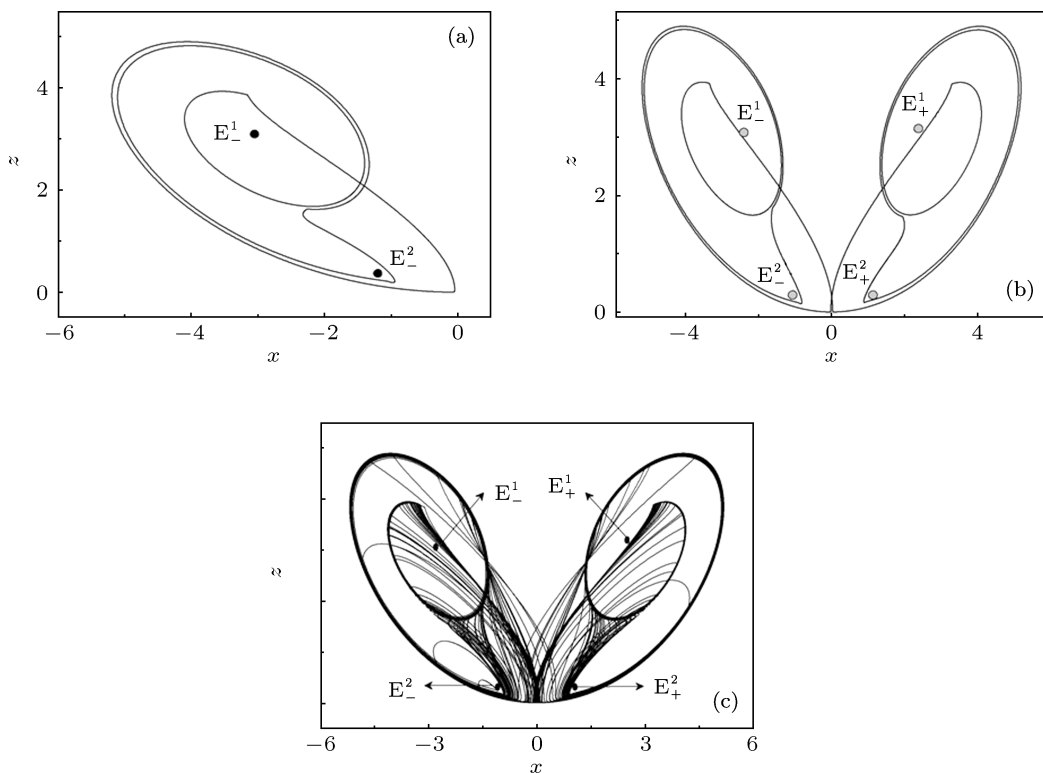


图 6 (a) $c_2 = 10.127$ 周期 2 解; (b) $c_2 = 10.120$ 周期 4 解; (c) $c_2 = 10.115$ 混沌解

4.2 数值分析

当 $10.29 < c_2 < 11.95$ 时, 切换系统所有的 Floquet 特征乘子均在单位圆内, 即特征值的模均小于

1, 根据 Floquet 理论, 系统作稳定的 1 周期运动. 随后, 其中一个特征乘子随 c_2 减小而逐渐减小, 直至通过 -1 穿过单位圆, 如表 1 所列. 由 Floquet 理论, 系统此时发生倍周期分岔, 系统由周期 1 失稳转为

作稳定的周期 2 运动, 此结果与分岔图 2 一致.

表 1 $10.289 \leq c_2 \leq 10.292$ 时切换系统的 Floquet 乘子

c_2	λ_1	λ_2	λ_3
10.292	-0.8828	-0.0001	0
10.291	-0.8829	-0.0001	0
10.290	-0.988	-0.0001	0
10.289	-1.0395	-0.0001	0

当 $10.20 < c_2 \leq 10.221$ 时, 系统的 Floquet 乘子都在单位圆内, 根据 Floquet 理论, 系统作稳定的周期 3 运动. 随着 c_2 增加, 在 $c_2 = 10.222$ 处, 有一个 Floquet 乘子通过 -1 穿过单位圆, 表明系统又出现倍周期分岔, 变为稳定的周期 6 解 (图 5(b)).

表 2 $10.219 \leq c_2 \leq 10.222$ 时切换系统的 Floquet 乘子

c_2	λ_1	λ_2	λ_3
10.219	-0.8034	0	0
10.220	-0.8818	0	0
10.221	-0.9616	0	0
10.222	-1.0423	0	0

在分岔图 (图 2(b)) 中, 我们注意到当 $c_2 = 10.26$ 附近系统出现周期 3 振荡直接通往混沌的现象. 我们在此附近计算系统的 Floquet 乘子, 当 $c_2 < 10.26124$ 时, 系统所有的 Floquet 乘子都在单位圆内, 而在 $c_2 = 10.26124$ 处有一个 Floquet 乘子通过 1 穿过单位圆, 如表 3 所列. 根据 Floquet 理论判断, 系统之前作稳定的周期 3 运动, 而在 $c_2 = 10.26124$ 处发生鞍结分岔, 系统由稳定的周期 3 解经鞍结分岔通往混沌.

表 3 $10.26121 \leq c_2 \leq 10.26124$ 时切换系统的 Floquet 乘子

c_2	λ_1	λ_2	λ_3
10.26121	0.8741	0	0
10.26122	0.9602	0	0
10.26123	0.9920	0	0
10.26124	1.0700	0	0

总之, Floquet 理论可以对周期切换运动的稳定性和分岔行为进行分析, 所得结果与分岔图一致. 数值分析揭示出不同参数下的 Chen 系统之间进行周期切换时得到的周期解是渐近稳定的, 并可通过倍周期分岔和鞍结分岔两种方式通往混沌.

5 结论

不同参数下的 Chen 系统之间通过周期切换导致各种复杂振荡行为. 在不同参数下, 子系统存在不同的稳态解, 切换导致轨线在两子系统之间产生明显的分界点, 产生各种稳定的周期振荡. 子系统平衡点的个数以及吸引盆的结构影响周期解的轨线分布. 而且随着参数变化, 切换点受子系统不同吸引子的吸引, 对应不同的切换振荡解. 参数的变化还会导致切换系统的分岔行为, 通过分析可以得到系统主要通过倍周期分岔和鞍结分岔两种途径进入混沌振荡. 研究表明, Poincaré 映射方法和 Floquet 理论是研究周期切换系统的有效手段. 本文的数值方法和机理分析对于进一步认识非线性切换系统的复杂动力学行为具有一定的理论意义.

- [1] Danièle F P, Pascal C, Laura G 2001 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 916
- [2] Ueta T, Kawakami H 2002 *International Symposium on Circuits and Systems* Tokushima Japan, 2002 May 26–29 II-544
- [3] Putyrski M, Schultz C 2011 *Chem. Biol.* **18** 1126
- [4] Victoriano C, Soledad F G, Emilio F 2012 *Physica D: Nonlinear: Phenomena* **241** 5
- [5] Kim S C, Kim Y C, Yoon B Y, Kang M 2007 *Computer Networks* **51** 606
- [6] Jing Z J, Yang Z Y, Jiang T 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 722
- [7] Santis E D 2011 *Systems & Control Letters* **60** 807
- [8] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2008 *Physics Letters A* **372** 2237
- [9] Kousaka T, Ueta T, Ma Y, Kawakami H 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 1019
- [10] Wu T Y, Zhang Z D, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 070502 (in Chinese) [吴天一, 张正娣, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 070502]
- [11] Andrei A, Yuliy B, Daniel L 2012 *System & Control Letters* **61** 2
- [12] Xie G M, Wang L 2005 *J. Math. Anal. Appl.* **305** 277
- [13] Cheng D, Guo L, Lin Y, Wang Y 2005 *IEEE Transactions on Automatic Control* **50** 661
- [14] Matthias A M, Pascal M, Frank A 2012 *Journal of Process Control* **31** 5
- [15] Chen Y G, Fei S M, Zhang K J, Yu L 2012 *Mathematical and Computer Modelling* **56** 1
- [16] Zhusubaliyev Z T, Mosekilde E 2008 *Physics Letters A* **372** 13
- [17] Ji Y, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7612 (in Chinese) [季颖, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 7612]
- [18] Whiston G S 1992 *Journal of Sound and Vibration* **152** 3
- [19] Hu H Y 1995 *Journal of Sound and Vibration* **187** 3
- [20] Jin L, Lu Q S 2005 *Acta Mechanica Sin.* **37** 40 (in Chinese) [金俐, 陆启韶 2005 固体力学学报 **37** 40]
- [21] Leine R I 2006 *Physica D: Nonlinear: Phenomena* **223** 121

[22] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465

[23] Chen Z Y, Zhang X F, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2327 (in Chinese) [陈章耀, 张晓芳, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 2327]

[24] Jiang H B, Zhang L P, Chen Z Y, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080505 (in Chinese) [姜海波, 张丽萍, 陈章耀, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 080505]

Oscillations and non-smooth bifurcation analysis of Chen system with periodic switches*

Yu Yue¹⁾²⁾ Zhang Chun¹⁾ Han Xiu-Jing¹⁾ Jiang Hai-Bo¹⁾ Bi Qin-Sheng^{1)†}

1) (Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

2) (Faculty of Science, Nantong University, Nantong 226019, China)

(Received 10 July 2012; revised manuscript received 30 July 2012)

Abstract

Complicated behaviors of a compound system with periodic switches between different types of Chen systems are investigated in detail. In the local analysis, the critical conditions such as fold bifurcation and Hopf bifurcation are derived to explore the bifurcations of the compound systems with different stable solutions in the two subsystems. Different types of oscillations of this switched system are observed, of which the mechanism is presented to show that the trajectories of the oscillations can be divided into several parts by the switching points, governed by the two subsystems respectively. Because of the non-smooth characteristics at the switching points, different forms of bifurcations may occur in the compound system, which may result in complicated dynamics such as chaotic oscillations, instead of the simple connections between the trajectories of the two subsystems. By the Poincaré mapping, the location of the fixed point and Floquet characteristic multiplier of switching system are discussed. With the variation of the parameter, the system can evolve into chaos via the cascading of period-doubling bifurcation. Besides, the system can evolve into chaos immediately by saddle-node bifurcations from period solutions. The non-smooth bifurcation mechanism of periodic switching system can be revealed by the research.

Keywords: periodic switches, Chen system, Poincaré mapping, non-smooth bifurcation

PACS: 05.45.-a, 84.30.-r

DOI: 10.7498/aps.62.020508

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 20976075, 10972091).

† Corresponding author. E-mail: qbi@ujs.edu.cn