

# 不同周期信号激励下分数阶线性系统的响应特性分析\*

杨建华<sup>†</sup> 朱华

(中国矿业大学, 机电工程学院, 徐州 221116)

(2012年7月8日收到; 2012年8月20日收到修改稿)

研究了含分数阶导数阻尼的一类线性系统在不同周期信号激励下系统的响应问题. 首先在简谐信号的激励下, 利用谐波平衡法得到了系统响应的近似解, 这一结果和已有文献(申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 110505)的结果完全相同, 但本文的求解过程大为简化, 而且本文进一步扩展了分数阶导数阻尼微分阶数的取值范围. 接着, 利用傅里叶级数展开法和线性系统的叠加原理, 求得了一般周期信号激励下系统响应的近似解, 并以周期方波信号和周期全波正弦信号为例进行了说明. 本文的结果表明, 分数阶导数阻尼的微分阶数影响系统响应中各阶谐波的共振频率和共振振幅. 系统响应的幅值与分数阶导数阻尼的微分阶数之间的单调关系主要受外激信号频率的影响. 除解析分析外, 本文还用数值模拟对相关结论进行了验证, 两种结果符合良好, 表明本文的分析方法是可行的.

**关键词:** 分数阶导数阻尼, 周期信号, 谐波平衡法

**PACS:** 45.10.Hj, 33.20.Tp

**DOI:** 10.7498/aps.62.024501

## 1 引言

近年来, 分数阶微积分及其应用的研究引起了不同领域科研人员的广泛关注, 尤其在材料学<sup>[1]</sup>、流变学<sup>[2]</sup>、黏弹性理论<sup>[3]</sup>、电化学<sup>[4]</sup>、生物工程<sup>[5]</sup>、力学<sup>[6]</sup>、自动控制理论<sup>[7]</sup>、信号处理<sup>[8]</sup>、复杂量子系统<sup>[9]</sup>等领域得到了广泛研究. 含有分数阶微积分的系统甚至被称为 21 世纪的系统<sup>[10]</sup>, 由此可见其重要性.

与常规的整数阶微积分系统相比较, 含有分数阶微积分的系统具有更多的优越性, 这也是其得到广泛关注的原因之一, 但是其分析方法也变得更为复杂和困难. 在动力学领域, 对分数阶微积分系统的研究一方面集中在系统的动力学行为方面, 如混沌、分岔等现象的探索<sup>[11-13]</sup>, 另一方面集中在运用各种近似理论对系统响应的近似求解问题上<sup>[14-16]</sup>. 由于分数阶微积分和系统中的非线性项在求解过程中会带来诸多的困难, 因此用解析法

可以求解的非线性系统还是非常有限的. Yang 和 Zhu 用快慢变量分离法研究了双频信号激励下的 Duffing 系统, 得到了系统对高频激励和低频激励响应的近似解, 并基于此研究了系统的振动共振现象, 发现了常规的整数阶 Duffing 系统所不具有的新现象<sup>[14]</sup>. Shen 等人分别研究了简谐信号激励下的 Duffing 系统<sup>[15]</sup>和线性单自由度系统<sup>[16]</sup>, 利用平均法得到了系统响应的幅频特性, 并对分数阶导数阻尼对系统响应的影响作用进行了分析.

处理非线性系统的响应问题, 平均法无疑是一种非常方便且有效的方法, 但对于一般的线性系统, 用谐波平衡法求解有时则更为方便. 本文仍以文献<sup>[16]</sup>中的模型为研究对象, 使用谐波平衡法得到系统响应的近似解. 我们发现, 使用两种方法得到的结果是完全一致的, 且用谐波平衡法使得求解过程大为简化. 另外, 我们还扩展了分数阶阻尼微分阶数的取值范围. 再者, 基于前一部分的结果, 我们还推导得到了系统对任意的非简谐周期信号响应的近似解, 并以周期方波信号和周期全波正弦信号为

\* 中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: 2012QNA21)和江苏省高校优势学科建设工程资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: jianhuayang@cumt.edu.cn

例进行了说明. 通过数值模拟验证表明, 近似解和数值解符合良好, 用本文的方法来分析任意周期信号激励下分数阶线性系统的响应特性是有效的.

## 2 简谐信号激励下系统响应的幅频特性

研究模型为受余弦信号激励的含分数阶导数阻尼的单自由度线性系统, 即

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) + K_1 D^p[x(t)] = F \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中  $m, k, c$  分别表示系统的质量, 线性刚度系数, 线性阻尼系数,  $F$  和  $\omega$  分别表示激励信号的幅值和频率.  $D^p[x(t)]$  为  $x(t)$  关于时间  $t$  的  $p$  阶微分, 表示分数阶导数阻尼,  $K_1$  为分数阶导数阻尼的系数. 关于分数阶微积分的定义较多, 最常用的为 Riemann-Liouville 定义, Caputo 定义和 Grünwald-Letnikov 定义<sup>[17]</sup>. 在一定条件下, 这三种定义是等价的. 为便于数值计算, 本文采用 Grünwald-Letnikov 定义, 即

$$D^p[f(t)] = \frac{d^p f(t)}{dt^p} \Big|_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{p}{j} f(kh - jh), \quad (2)$$

其中  $\binom{p}{0} = 1, \binom{p}{j} = \frac{p(p-1)\cdots(p-j+1)}{j!}, j \geq 1$  为二项式系数. 在工程应用中, 分数阶微分阶数  $p$  的取值范围一般为  $p \in (0, 2)$ , 本文也选取  $p \in (0, 2)$ . 因此, 我们扩展了文献 [16] 中分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  的取值范围.

### 2.1 近似解析解

设方程 (1) 的近似解为

$$x(t) = a \cos(\omega t - \theta), \quad (3)$$

则

$$\dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t - \theta),$$

$$\ddot{x}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t - \theta),$$

$$D^p[x(t)] = a\omega^p \cos(\omega t - \theta + \frac{p\pi}{2}). \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (1) 式, 利用三角公式计算并分别比较方程中等号两侧  $\sin(\omega t - \theta)$  和  $\cos(\omega t - \theta)$  的系数后得到方程组

$$a(k - m\omega^2) + aK_1\omega^p \cos \frac{p\pi}{2} = F \cos \theta,$$

$$a(c\omega + K_1\omega^p \sin \frac{p\pi}{2}) = F \sin \theta. \quad (5)$$

解此方程组得

$$a = \frac{F}{\sqrt{\left(k - m\omega^2 + K_1\omega^p \cos \frac{p\pi}{2}\right)^2 + \left(c\omega + K_1\omega^p \sin \frac{p\pi}{2}\right)^2}},$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{c\omega + K_1\omega^p \sin \frac{p\pi}{2}}{k - m\omega^2 + K_1\omega^p \cos \frac{p\pi}{2}}. \quad (6)$$

(6) 式的结果和文献 [16] 中的结果是完全相同的, 但本文的计算过程大为简化, 由此可见在处理含分数阶导数阻尼的单自由度线性系统响应问题时, 谐波平衡法比平均法更具有优越性. 如果将系统 (1) 中的激励信号换为正弦信号, 即

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) + K_1 D^p[x(t)] = F \sin(\omega t), \quad (7)$$

利用相同的分析方法得到系统响应的近似解为

$$x(t) = a \sin(\omega t - \theta), \quad (8)$$

振幅  $a$  和相位角  $\theta$  仍由 (6) 式来表示.

### 2.2 数值仿真结果分析

利用计算傅里叶系数的方法可以得到系统响应在激励信号频率  $\omega$  处幅值的数值解, 即

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_c^2}, \quad (9)$$

其中  $a_s$  和  $a_c$  分别为系统响应在激励信号频率  $\omega$  处的正弦和余弦傅里叶分量, 其定义为

$$a_s = \frac{2}{mT} \int_0^{mT} x(t) \sin(\omega t) dt,$$

$$a_c = \frac{2}{mT} \int_0^{mT} x(t) \cos(\omega t) dt, \quad (10)$$

$m$  为正整数, 一般要在系统的响应稳定之后再运行

$m$  个周期. 在本文的数值仿真计算中, 选取  $m = 80$ .

我们利用分数阶导数的 Grünwald-Letnikov 定义来离散系统 (1), 得到响应的时间序列  $x(t)$ . 根据分数阶算子的叠加关系  $D^q D^p[x(t)] = D^{q+p}[x(t)]$  将系统 (1) 变形为

$$\begin{aligned} D^p[x(t)] &= y(t), \\ D^{1-p}[y(t)] &= z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{1}{m}[-z(t) - kx(t) \\ &\quad - cz(t) - K_1 y(t) + F \cos(\omega t)]. \end{aligned} \quad (11)$$

选取适当的步长, 将 (11) 式离散化, 通过循环计算可得到  $x(t)$ , 具体的离散及计算过程在文献 [14,17] 中有详细介绍, 此处不再赘述. 在以下的数值仿真过程中, 如无特殊说明, 均参照文献 [16] 将基本参数选取为  $m = 5, k = 10, c = 0.3, F = 2, K_1 = 1.5$ , 以便进行比较.

图 1 给出了系统响应的幅值  $a$  与激励信号的频率  $\omega$  及分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  之间的函数关系. 该图表明, 分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  影响系统的共振频率和共振振幅, 这一点不仅可以在数值模拟结果上观察到, 也可以通过利用对响应幅值  $a$  求极值的方法得到. 图 1(a) 是根据 (6) 式给出的近似解三维图形, 从图上可以看出共振振幅与分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  之间的函数关系. 在区间  $p \in (0, 2)$  共振振幅  $a_{\max}$  与分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  之间并不具有单调性, 而是一种非单调关系, 即随着  $p$  的逐渐增大, 共振振幅先逐渐减小而后再逐渐增大. 文献 [16] 中由于  $p$  的范围限制在  $[0, 1]$  之间, 因此只发现了共振振幅随着  $p$  的增大将逐渐减小这一规律, 本文结果是文献 [16] 中相关结果的补充. 图 1(b)—(d) 给出了近似解和数值解的对比曲线, 两种解基本符合, 因此本文的分析方法是可行的.

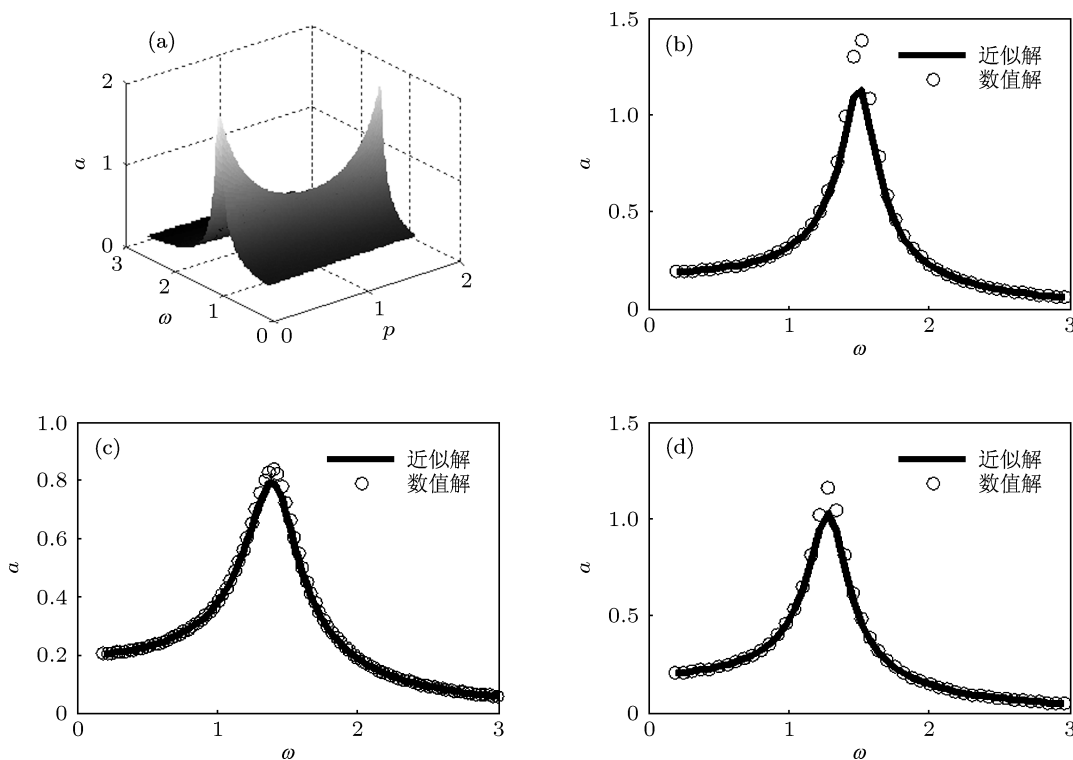


图 1 余弦信号激励下系统响应的幅频特性 (a) 近似解; (b)  $p = 0.5$ ; (c)  $p = 1.0$ ; (d)  $p = 1.5$

图 2 给出了系统响应幅值  $a$  与分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  之间的函数依赖关系. 我们发现, 当  $\omega = 1.25$  时,  $a$  随着  $p$  的增大而单调增大; 当

$\omega = 1.5$  时,  $a$  随着  $p$  的增大而单调减小. 因此, 响应幅值  $a$  随分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  的变化所呈现的单调关系与激励信号的频率  $\omega$  有关.

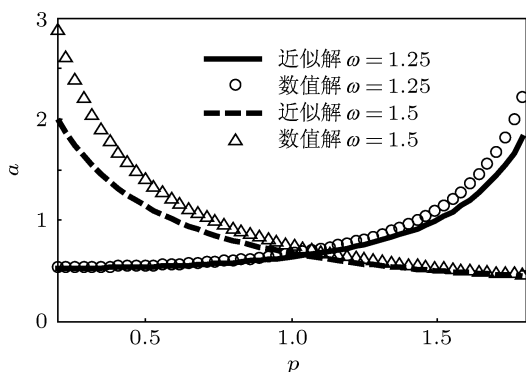


图2 分数阶导数阻尼的阶数  $p$  对响应幅值  $a$  的影响

### 3 非简谐周期信号激励下系统响应的幅频特性

对于任意的周期激励  $F(t)$ , 将  $F(t)$  展开成傅里叶级数

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)], \quad (12)$$

其中傅里叶级数的系数  $a_0, a_n, b_n$  可由下式确定

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin(n\omega t) dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$\omega_n = (2n - 1)\omega,$$

$$a_n = \frac{F}{\sqrt{\left(k - m\omega_n^2 + K_1 \omega_n^p \cos \frac{p\pi}{2}\right)^2 + \left(c\omega_n + K_1 \omega_n^p \sin \frac{p\pi}{2}\right)^2}},$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{c\omega_n + K_1 \omega_n^p \sin \frac{p\pi}{2}}{k - m\omega_n^2 + K_1 \omega_n^p \cos \frac{p\pi}{2}}, \quad (17)$$

$a_1$  表示响应中基频成分的幅值,  $a_n$  表示第  $n$  阶谐波分量的幅值,  $\theta_n$  表示第  $n$  阶谐波分量的相位角.

图 3 给出了响应前三阶谐波幅频特性的解析解和数值解, 两种解吻合良好. 该图表明, 当激励信号的频率较低, 即  $\omega$  取值较小时, 响应中高阶谐波分量的幅值有可能大于低阶谐波分量的幅值; 当激励信号的频率较高时, 响应中低阶谐波分量的幅值大于高阶谐波分量的幅值. 分数阶导数阻尼的微分阶数  $p$  影响响应中各阶谐波的共振频率和共振幅值. 无论  $p$  取何值, 高阶谐波的共振频率和共振幅值均低于低阶谐波的共振频率和共振幅值.

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (13)$$

式中的频率  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  为周期. 根据线性系统的叠加原理, 求得系统对傅里叶级数中一系列谐波信号的响应, 然后进行叠加, 便可得到系统响应的真实解. 以下以周期方波信号和周期全波正弦信号为例进行说明.

#### 3.1 周期方波信号引起的响应

周期方波信号的表达式为

$$F(t) = \begin{cases} F, & (2n-2)\pi/\omega < t < (2n-1)\pi/\omega, \\ -F, & (2n-1)\pi/\omega < t < 2n\pi/\omega. \end{cases} \quad (14)$$

傅里叶级数为

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} F \sin[(2n-1)\omega t]. \quad (15)$$

根据线性叠加原理及 (6) 式和 (8) 式的结果可得到周期方波信号引起的系统响应为

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n-1} a_n \sin(\omega_n t - \theta_n) \right], \quad (16)$$

其中

#### 3.2 周期全波正弦信号引起的响应

周期全波正弦信号的表达式为

$$F(t) = F |\sin(\omega t/2)|. \quad (18)$$

傅里叶级数为

$$F(t) = \frac{2F}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} F \cos(n\omega t). \quad (19)$$

首先求出傅里叶级数中的直流分量引起的系统响应, 根据方程

$$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 + K_1 D^p x_0 = \frac{2F}{\pi}, \quad (20)$$

得到响应中的直流分量为

$$x_0 = \frac{2F}{k\pi}. \quad (21)$$

再根据线性叠加原理及 (3) 式和 (6) 式的结果, 得到

周期全波正弦信号引起的系统响应为

$$x(t) = \frac{2F}{k\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} a_n \cos(\omega_n t - \theta_n), \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_n &= n\omega, \\ a_n &= \frac{F}{\sqrt{\left(k - m\omega_n^2 + K_1\omega_n^p \cos \frac{p\pi}{2}\right)^2 + \left(c\omega_n + K_1\omega_n^p \sin \frac{p\pi}{2}\right)^2}}, \\ \theta_n &= \tan^{-1} \frac{c\omega_n + K_1\omega_n^p \sin \frac{p\pi}{2}}{k - m\omega_n^2 + K_1\omega_n^p \cos \frac{p\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

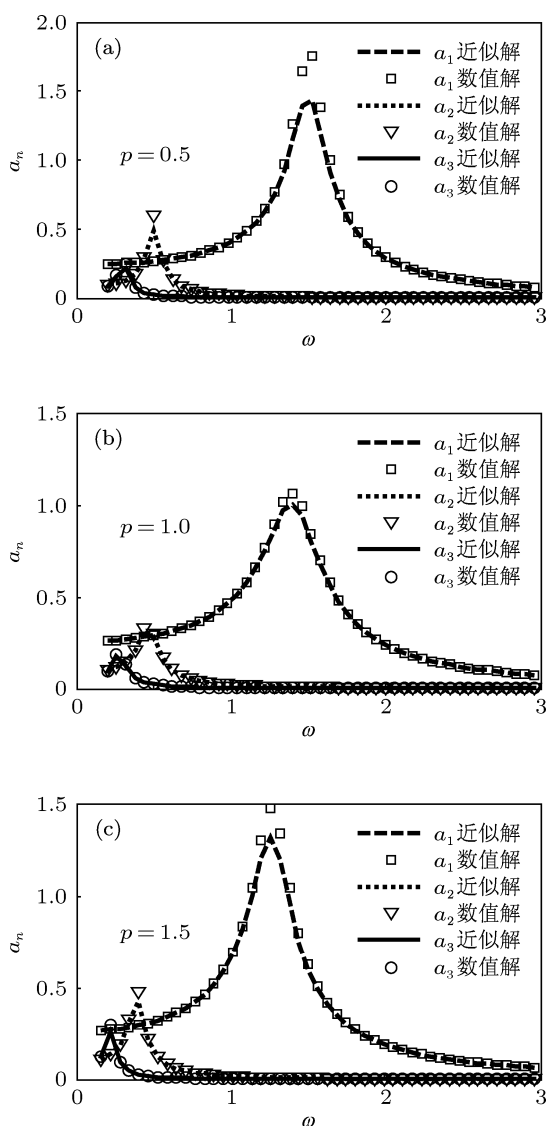


图3 周期方波信号激励下系统响应前三阶谐波的幅频特性

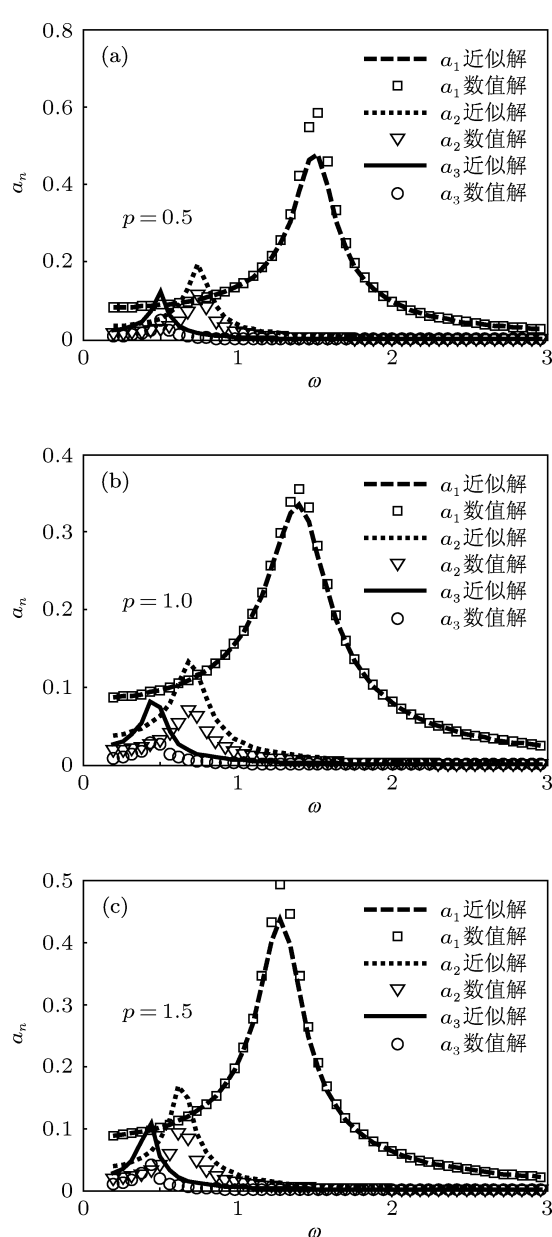


图4 周期全波信号激励下系统响应前三阶谐波的幅频特性

图4给出了周期全波正弦信号激励下, 系统响应的前三阶幅频特性的解析解和数值解, 两种结果

符合良好. 图 4 中的结论和图 3 中的结论相同, 不再赘述.

## 4 结论

本文研究了不同周期信号激励下含分数阶导数阻尼的线性单自由度振子的响应问题. 首先研究的是简谐信号激励下系统的响应问题, 利用谐波平衡法得到了响应的近似解. 本文的结果和文献 [16] 的结果完全相同, 但求解过程大为简化, 而且我们也进一步扩大了微分阶数的取值范围, 使之更接近于工程应用的情况. 接着, 利用傅里叶级数和线性

系统的叠加原理分析了一般的周期信号激励下系统的响应问题, 并以周期方波信号和周期全波正弦信号为例进行了说明. 本文的结果表明, 分数阶导数阻尼的微分阶数影响的是响应中各阶谐波的共振频率和共振幅值. 当分数阶导数阻尼的微分阶数在较大的取值范围内变化时, 系统响应的幅值与微分阶数之间的单调性关系与外激励信号的频率有关. 本文利用数值模拟对解析结果进行了验证, 两种结果吻合良好, 说明本文的分析方法是可行的. 由于本文方法具有简单性和实用性, 可以用来分析一大类含分数阶导数阻尼的线性微分系统的响应问题.

- 
- [1] Torvik P J, Bagley R L 1984 *ASME J. Appl. Mech.* **51** 294
- [2] Yang F, Zhu K Q 2011 *Theor. Appl. Mech. Lett.* **1** 012007
- [3] Mainardi F 2010 *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models* (London: Imperial College Press)
- [4] Oldham K B 2010 *Adv. Eng. Software* **41** 9
- [5] Magin R L 2010 *Comput. Math. Appl.* **59** 1586
- [6] Carpinteri A, Mainardi F 1997 *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, (Wien and New York: Springer)
- [7] Agrawal O P 2004 *Nonlinear Dyn.* **38** 323
- [8] Das S, Pan I 2011 *Fractional Order Signal Processing: Introductory Concepts and Applications* (Berlin: Springer)
- [9] Kusnezov D, Bulgac A, Dang G D 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1136
- [10] Ortigueira M D 2008 *IEEE Circuits Syst. Mag.* **8** 19
- [11] Ge Z M, Ou C Y 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **34** 262
- [12] Cao J, Ma C, Jiang Z 2010 *ASME J. Comput. Nonlinear Dyn.* **5** 041012
- [13] Cao J, Ma C, Jiang Z, S Liu 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 1443
- [14] Yang J H, Zhu H 2012 *Chaos* **22** 013112
- [15] Shen Y, Yang S, Xing H, Gao G 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 3092
- [16] Shen Y J, Yang S P, Xing H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110505 [申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 110505]
- [17] Monje C A, Chen Y, Vinagre B M, Xue D, Feliu V 2010 *Fractional-order Systems and Controls* (London: Springer)

# The response property of one kind of fractional-order linear system excited by different periodical signals\*

Yang Jian-Hua<sup>†</sup> Zhu Hua

(School of Mechanical and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

(Received 8 July 2012; revised manuscript received 20 August 2012)

## Abstract

Under excitations of different periodical signals, the response of a fractional linear system is investigated. First, by the harmonic balance method, the approximate solutions of the fractional-order linear system excited by harmonica signals are obtained. The results in this paper are identified with the existing results obtained by the average method (Shen Y J, Yang S P, Xing H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110505). However, the solving process here is much simpler. Further, the value of the fractional-order is extended in this paper. Then, according to the Fourier expansion and the method of linear superposition, the response of the system to a general periodical signal is obtained, and two examples are given for the case of periodical square wave and modulus of sine wave respectively. The results in this paper show that the value of the fractional-order influences the resonance frequency and resonance amplitude of each order harmonic. The monotonicity between the response amplitude and the value of the fractional-order is influenced mainly by the frequency of the external excitation. Besides the analytical analysis, the numerical simulations are also performed, and the approximate solutions are in good agreement with the numerical ones. Hence, the process of the analysis of this paper is feasible.

**Keywords:** fractional-order damping, periodical signal, harmonic balance method

**PACS:** 45.10.Hj, 33.20.Tp

**DOI:** 10.7498/aps.62.024501

---

\* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. 2012QNA21), and the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jianhuayang@cumt.edu.cn