

## 垂直振动激发下颗粒物质的能量耗散\*

彭政<sup>1)†</sup> 蒋亦民<sup>1)</sup> 刘锐<sup>2)</sup> 厚美瑛<sup>2)</sup>

1) (中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

2) (中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2012年7月10日收到; 2012年8月14日收到修改稿)

本文对垂直振动激发下的铜和玻璃珠两种密集颗粒样品, 通过实时测量样品盒的加速度和振台对它的作用力, 研究了样品的平均耗散功率. 实验发现该耗散功率在给定振动强度下随振动频率的变化曲线是一个峰值在几十赫兹的宽峰结构, 在给定频率下随强度的变化具有幂率规律, 其幂值小于简谐受迫振动模型的幂值 2. 这些结果将有助于研究测定颗粒流体和气体的迁移系数, 以及它们在不同运动模式下的能耗差异.

关键词: 颗粒物质, 能量耗散, 垂直振动

PACS: 45.70.-n, 62.40.+i, 46.40.Ff

DOI: 10.7498/aps.62.024502

## 1 引言

大量固体颗粒组成的系统 (例如沙子、谷物等) 在受到机械激发的外部环境下表现有异常丰富的运动行为和物理现象, 如对流卷 (convection)、成堆 (heaping)、激振子 (localized oscillon)、驻波斑图 (standing-wave patterns)、麦克斯韦妖 (Maxwell demon), 等等<sup>[1]</sup>. 这些复杂现象是当前颗粒物理的研究前沿. 由于颗粒之间的碰撞是非弹性的, 运动颗粒系统中存在着一系列复杂的、导致发热 (或熵产生) 的非平衡过程, 长时间维持这些激发状态, 需要连续地输入一定的机械能. 用垂直周期振动的振台作为能量输入设备, 在当前有关颗粒系统的各种非平衡问题的研究中被广泛应用.

在振台的持续激发下, 颗粒系统自振台吸收的机械能与其运动模式会自发地达到一个协调合适的状态, 使得吸收的平均机械能量  $W$  与这个模式的热损失平衡. 在同样的激振强度和频率下的不同颗粒系统有不同的热损失, 实验测量这个能量输入  $W$  的大小和性质将有助于了解与颗粒物质热损失有关的非平衡耗散行为, 以及它与振台提供的动态边界之间的复杂相互作用. 垂直振动激发下的颗粒

系统又称颗粒床, 虽然被广泛应用, 但就我们所知, 有关颗粒样品和振台之间的  $W$  的测量在文献上还未见专门报道. 本文将对铜和玻璃两种颗粒样品, 通过实时测量振台的受力  $F(t)$  和加速度  $a(t)$ , 来初步考察和揭示  $W$  的一些性质和规律.

单个颗粒与正弦振动台组成的力学系统, 简称蹦床, 其  $F(t)$  具有分岔和混沌等复杂动力学行为<sup>[2,3]</sup>. 随着颗粒总数的增加, 相互之间发生碰撞以及与振台发生碰撞的颗粒数目会增多, 受统计平均效应的影响, 振台受力的时间变化行为  $F(t)$  应该从蹦床的复杂模式逐渐趋于简单. 近年来的一些实验研究表明, 即使对样品池直径  $D$  比颗粒粒径  $d$  大 10 倍的系统,  $F(t)$  仍有明显的分岔和混沌动力学现象<sup>[4-6]</sup>. 为避免这个复杂性, 本文采用了  $D/d$  远大于 100 的、由大量粒子组成的颗粒床. 这时在我们所考虑的振台频率和振幅范围里, 观测到的  $F(t)$  在实验误差精度下只有倍周期运动, 其他的高阶分岔和混沌等现象可以忽略不计. 另外大量颗粒组成的样品的热损失比较大, 相应的  $W$  值在每千克样品几十毫瓦到几瓦之间, 容易实验测量. 对  $D/d \leq 10$  的情况, 由于  $W$  太小, 远超出了我们的测量精度范围. 因此与文献 [4—6] 对比, 本文研究观测的能量

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10904175) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: pz177@yahoo.com.cn

性质原则上属于可用连续颗粒介质动力学理论解释的宏观现象, 而后者关注的作用力  $F(t)$  的分岔和混沌等动力学现象, 具有很强的介观尺寸效应, 但在实验装置上除  $D/d$  比值和样品颗粒数目有大的差别外, 两者基本类似.

文献 [7—10] 用金属材料的内耗测量技术研究了颗粒样品与外界的能量交换和力性质. 内耗技术一般使用小振幅 (几十到几百纳米) 的扭摆装置对样品施加以正弦方式变化的扭力矩  $M(t)$ , 并实时测量这个扰动下的扭转角  $\theta(t)$ , 属于“力给定”(stress control) 一类的实验. 由于激振强度低, 样品的大部将处于颗粒固体状态, 只在扭摆附近可能有固液过渡 (或塑性变形) 状态, 扭转角  $\theta(t)$  也像扭力矩那样呈正弦方式变化, 样品与扭摆之间的平均能量交换可用扭力矩与扭转角之间的相位差来表征. 这类测量给出的是颗粒样品在固态区域的耗散性质, 并且可以忽略重力的影响. 与内耗技术对比, 垂直振台与颗粒物质之间的作用在重力的参与和影响下一般很强, 能量交换远大于前者, 样品的大部分处于高度激发的气态或液态状况. 另外这类实验通常令振台做垂直正弦运动, 属于“给定位置或速度”(velocity control) 一类的实验. 由于振幅和能量交换都远大于内耗实验 (振幅通常是毫米级),  $F(t)$  一般不按正弦方式变化, 具体与颗粒流体的耗散性质、流动模式、空气的影响, 等多因素有关. 尽管有这些复杂性, 本文的测量结果显示, 垂直振台系统的能量行为仍表现出一些规律性. 首先, 当给定激振强度  $\Gamma = 4A\pi^2 f^2/g$  时, 能量随振台频率  $f$  的变化在几十到一百赫兹范围里有一个宽共振峰. 注意它比文献 [7—10] 等报道的、用扭摆装置观测的给定振幅下颗粒固体的共振频率低一个数量级以上. 另外对给定的振台频率, 平均能量与激振强度之间呈幂律关系:  $W \propto \Gamma^a$ , 并且指数  $a$  在  $\Gamma$  大约为 4 处有一个明显的跃变, 其原因目前还无法知晓, 可能与样品的对流运动模式发生了变化有关. 利用这些测量结果, 可对系统耗散程度给出笼统的数量级估算, 帮助有关颗粒物质的耗散和边界条件等理论问题的研究, 但由于理论发展的相对滞后, 目前还无法对它们进行定量的分析. 最后值得指出的是, 本文实验包含了空气的影响, 具体程度有待今后考虑真空装置后做进一步研究.

## 2 实验装置和测量结果

实验装置如图 1 所示, 样品池是一个镶嵌在铝合金底座上的圆柱形玻璃管, 圆柱内径 57.8 mm, 高 105.2 mm. 在样品池底座上固定一个加速度传感器 (LANCE LC0402), 用以实时记录样品池底座的加速度  $a(t)$ . 为保持底座的平衡, 在底座的对称位置固定有一个与加速度传感器等质量的配重元件 (图中未标出). 在振动台和样品池中间刚性连接一个力传感器 (LANCE LC0501), 用以实时记录振动台对样品池和其中颗粒材料的作用力  $F(t)$ . 实验采用频率  $f = 20—200$  Hz 的正弦信号, 通过功率放大器驱动振动台运动, 同时将采集的  $F(t)$  和  $a(t)$  信号输入到示波器 (TDS 1012B), 再通过采集软件同步转入计算机存储. 实验采用的样品为球形玻璃颗粒和铜颗粒两种, 粒径范围均为  $d = 0.074—0.1$  mm, 样品的初始填充高度约 45 mm. 当实验样品运动达到动态稳定后, 得到的典型  $F(t)$  和  $a(t)$  信号如图 1 的插图所示, 其中通道一为  $F(t)$  数据, 通道二为  $a(t)$  数据.

图 2 是  $\Gamma = 2$  时测量得到的加速度  $a(t)$  和力  $F(t)$  曲线. 这里值得注意的是, 对 30,40 Hz 的低频大振幅情况, 振台不能完全控制样品反作用力的影响, 从加速度曲线可以看到其运动曲线有比较明显的偏离正弦模式的现象. 这时的实验的样品底部并不是严格的“给定速度”的边界条件. 随着频率的增加, 振幅相应地减小,  $a(t)$  曲线很快地接近正弦模式, 但在 180 和 199 Hz 的高频情况, 偏离正弦现象又再度出现. 因此目前实验室常用的小型振台设备不能完全保证一个严格的正弦模式运动. 为矫正这个样品对振台运动的影响, 我们在下节的能量分析中将使用实际测量的  $a(t)$  值. 仔细观察可见, 所有曲线可以很好地认为有  $2T$  周期性 ( $T$  为振台的激振周期), 表明当颗粒粒径远小于样品池时, 可以忽略文献 [4,5] 中观察到的高阶分岔现象, 只考虑最低阶的倍周期现象就可以了. 倍周期现象在 30,40 Hz 的低频情形可通过仔细观察波形看出, 可能与振台与样品之间的相互作用有关. 对 50—140 Hz 的曲线, 倍周期现象很不明显, 基本观察不到. 180 和 199 Hz 时, 倍周期现象以波峰的强弱交替变化的方式出现, 在力曲线上特别明显, 同时在加速度曲线上也有相应的体现, 表明样品对振台运动有一定的影响.

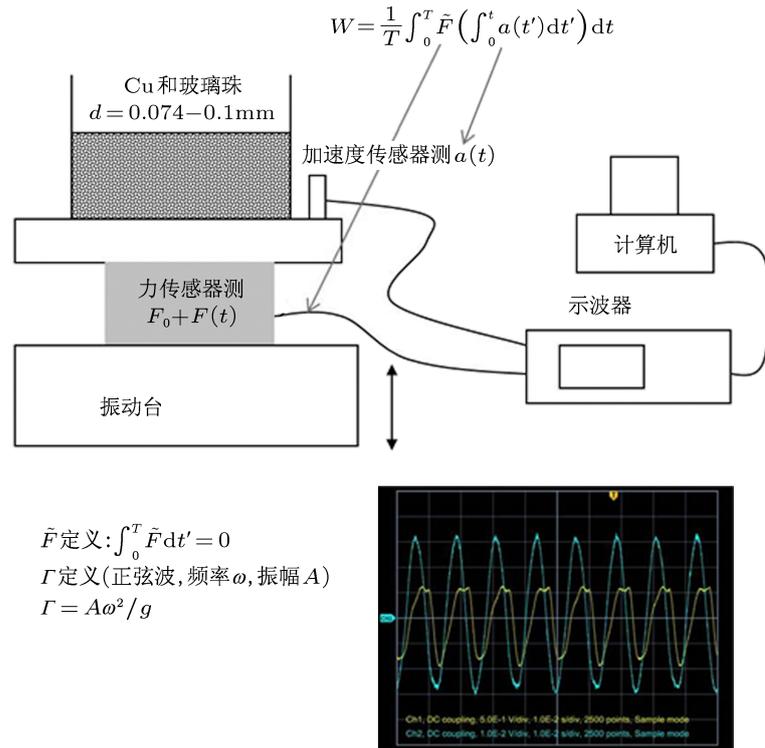


图1 实验装置示意图(右下插图为采集的典型信号, 图示振幅较小的线(黄色)为力信号  $F(t)$ , 振幅较大的线(蓝色)为加速度信号  $a(t)$ )

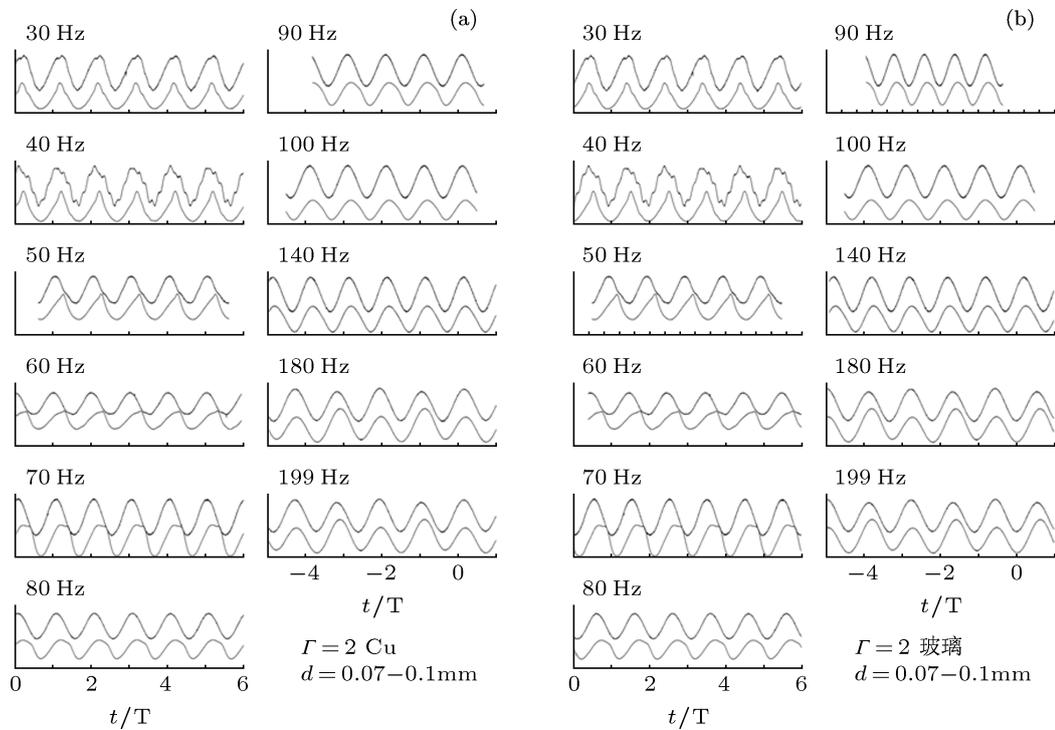


图2 加速度和力(任意单位)随时间变化曲线(上面的曲线是加速度  $a(t)$ , 下面是力  $F(t)$ ) (a) 铜; (b) 玻璃

随着振台激振频率从 30 Hz 变化到 199 Hz, 力曲线的形状除在 90—100 Hz 里与加速度曲线的比较接近外, 其他频率时均偏离正弦形式. 出现偏离正弦的现象主要是因为该系统的动力学有倍周期分岔行为. 加速度曲线偏离正弦是因为振台在颗粒系统的反作用力下不能保持严格的正弦运动. 原则上讲利用大型振台可以有效地减小后者的影响, 使得只有力曲线  $F(t)$  才发生明显偏离正弦形状的行为. 加速度和力时间演化曲线的上述定性行为对铜和玻璃都一样, 表明它们与颗粒样品的材质无关.

对往复振动运动, 时间平均力和平均加速度显然都应该为零. 利用观察到的倍周期现象, 我们对测量的  $a(t)$  和力  $F(t)$  值做了平移微调处理, 使得其满足

$$\int_0^{2T} F(t) dt = 0 \quad (1)$$

和

$$\int_0^{2T} a(t) dt = 0 \quad (2)$$

的归零条件, 以符合这个物理要求. 这个归零处理可以修正实验中可能出现的系统误差, 如由于探测器标定等带来的系统误差等.

### 3 能量耗散功率

利用测量的、满足归零条件 (1), (2) 的加速度

$a(t)$  和力  $F(t)$  数据, 以及下面的公式, 可得到振台向颗粒床进行能量传递的平均功率  $W$ . 根据能量守恒, 它即是颗粒系统的平均能量耗散功率 (忽略空气的影响).

由于系统运动具有振台激振频率的倍周期性质, 我们可将计算时间平均的积分区间取为  $2T$ , 有

$$W = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} F(t) \left( \int_0^t a(t') dt' \right) dt, \quad (3)$$

(3) 式的具体推导如下. 首先在一个单位时间里, 力  $F$  做功的平均值是

$$W = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} F dx, \quad (4)$$

代入  $dx = v dt$ , 有

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} F v dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} F \left( v_0 + \int_0^t a(t') dt' \right) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

其中最后一个等式里的括号部分是速度  $v$  与加速度  $a$  的关系式,  $v_0$  是  $t = 0$  时刻振台的初始速度. 注意由于性质 (1), (5) 式中含  $v_0$  的项对平均功率没有贡献, 因此有 (3) 式成立. 将测量得到的力  $F(t)$  和加速度  $a(t)$  数据代入, 数值计算 (3) 式中的积分, 即得平均功率  $W$ . 这个积分过程可以降低实验系统的随机涨落误差.

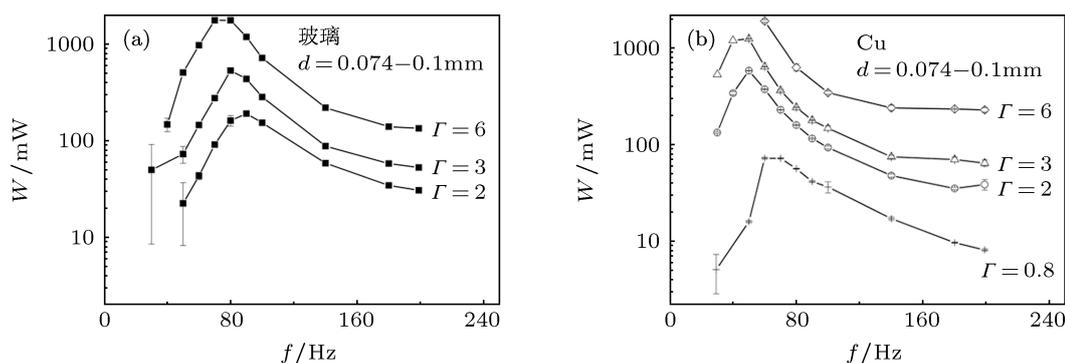


图 3 不同振台振动强度  $\Gamma$  下, 玻璃珠 (a) 和铜颗粒 (b) 的平均功率  $W$  随振台振动频率  $f$  的变化情况. 误差棒是 5 次测量的均方根偏差

对给定的振台振动强度  $\Gamma$ , 平均耗散功率  $W$  在低频极限  $f \rightarrow 0$  和高频极限  $f \rightarrow \infty$  时都应该趋向于零. 前者是准静态极限, 样品处于整体静态缓慢上下移动的情形, 显然没有耗散. 后者表示振幅极小, 颗粒样品不会被激发运动, 不需要相应的能量输入. 图 3 是颗粒尺寸和数目相同时、用玻璃珠和

铜两种样品测得的  $W(f)$  行为, 它们的确有上述极限趋势. 在低频和高频之间, 实验观察到  $W(f)$  有一个宽共振峰, 共振频率大致为几十赫兹, 并随着振动强度  $\Gamma$  的增加呈微弱降低趋势. 玻璃珠样品的共振频率略高于铜样品. 另外由于铜样品的耗散相对较强, 同一振动强度下铜样品的耗散功率值明显比

玻璃样品的高. 值得提到的是, 图 3 反映的能量耗散与文献 [7-10] 报道的内耗实验反映的耗散不属于同一类型. 典型内耗实验样品的样品被激发程度远低于本文的振台实验, 运动模式基本属于阻尼受迫弹性振动类型, 所观测的一般是颗粒固体的弹性共振频率加上固态耗散对其的修正, 并且耗散主要来自颗粒固体弹性的阻尼或塑性效应. 图 3 的样品基本处于没有弹性的颗粒流体或气体状态, 运动模式以对流流动和颗粒之间的碰撞为主, 其能耗主要为碰撞时的热损失, 以及拖曳空气运动带来的损耗. 另外内耗实验结果通常可用  $W \sim \Gamma^2 f^{-2}$  的受迫阻尼振动模型来拟合分析, 它给出的  $\sim f^{-2}$  的衰减趋势与图 3 的高频部分有些类似, 但不能解释低频部分出现的宽共振峰结构.

在给定的振台激振频率下, 本文测量的平均耗散功率与振动强度之间有很好的幂律关系:  $W \propto \Gamma^a$ , 其中  $a < 2$ , 见图 4. 这里的幂律  $a$  随着  $\Gamma$  的增加在大约 3-4 处有一个从小到大的明显变化. 我们目前还不清楚这个幂律变化的原因, 可能与颗粒样品的流动模式发生了变化有关 (但实验未能用肉眼观察到). 另外大激振强度时, 图 4 实验点的幂律行为接近简谐受迫振动的幂律 2 关系. 玻璃珠样品也有类似的幂律性质.

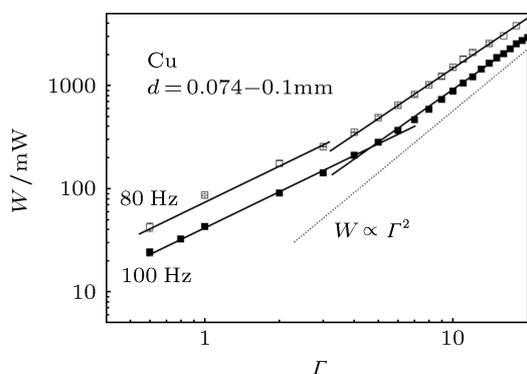


图 4 振台振动频率为 80 和 100 Hz 时, 铜颗粒样品的平均耗散功率  $W$  随振动强度  $\Gamma$  的变化情况 (虚直线是简谐受迫振动耗散功率的幂律 2 关系)

由于目前还不能对这些测量结果进行详细的

理论分析, 我们这里仅对测量的耗散功率做一个简单笼统的数量级估算. 考虑颗粒之间是以均方根速度  $v_{\text{rms}}$  的对心碰撞, 则有每次碰撞的热损失为  $2m(1 - e^2)v_{\text{rms}}^2$ . 再考虑每个颗粒的碰撞频率是  $4\sqrt{\pi/3}d^2nv_{\text{rms}}$  (即与理想气体的类似), 得

$$W = 8\sqrt{\pi/3}md^2(1 - e^2)n^2v_{\text{rms}}^3V, \quad (6)$$

这里的  $m$  和  $d$  是单个颗粒的质量和直径,  $n$  是样品的颗粒数密度,  $e$  是恢复系数,  $V$  是样品体积. 取 (SI 单位)  $m = 10^{-9}$  kg,  $d = 0.087 \times 10^{-3}$  m,  $V = 1.2 \times 10^{-4}$  m<sup>3</sup>,  $e = 0.92$ ,  $n = 6\phi/\pi d^3$ , 其中取体积分数  $\phi = 0.6$ , 有  $W = 3460v_{\text{rms}}^3$  J/s. 对图 3 所示的功率范围, 相应的均方根速度在 1 cm/s 到 10 cm/s 之间, 在数量级上符合文献 [11] 报道的用正电子示踪技术对垂直振台颗粒系统测量的结果.

## 4 结论

本文的测量工作表明, 如果同时对样品盒的加速度和振台对它的作用力进行实时监测, 能得到振台对大量颗粒组成的系统的平均能量输入, 也就是样品盒中密集颗粒样品的总平均耗散功率. 原则上讲, 从它随振台强度和频率的变化曲线 (即耗散功率谱), 可以了解样品的运动模式是否出现与能量有关的突变. 我们对直径约 0.09 mm 的铜和玻璃两种颗粒样品的测量显示, 大体上给定强度下的频率谱线是一个峰值在几十赫兹的宽峰结构, 而给定频率下的强度谱线具有幂率规律. 这一结果将有助于对目前还很不清楚的、颗粒流体和气体的迁移系数的研究和测定, 但具体分析尚有待今后的理论进展. 实验上我们将对这个耗散功率谱做更精密的测定, 研究密集颗粒系统可能发生的不同运动模式及其能耗差异.

[1] Aranson I S Tsimring L S 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 641  
 [2] Luck J M, Mehta A 1993 *Phys. Rev. E* **48** 3988  
 [3] Jiang Z H, Zheng R H, Zhao H F, Wu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3727 (in Chinese) [姜泽辉, 郑瑞华, 赵海发, 吴晶 2007 物理学报 **56** 3727]  
 [4] Jiang Z H, Li B, Zhao H F, Wang Y Y, Dai Z B 2005 *Acta Phys. Sin.*

**54** 1273 (in Chinese) [姜泽辉, 李斌, 赵海发, 王运鹰, 戴智斌 2005 物理学报 **54** 1273]  
 [5] Jiang Z H, Liu X Y, Peng Y J, Li J W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5692 (in Chinese) [姜泽辉, 刘新影, 彭雅晶, 李建伟 2005 物理学报 **54** 5692]  
 [6] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4748 (in Chinese)

- [姜泽辉, 王运鹰, 吴晶 2005 物理学报 **55** 4748]
- [7] Wang W J, Kong X Z, Zhu Z G 2007 *Phys. Rev. E* **75** 041302
- [8] Wang P P, Wang W J, Liu C S, Zhu Z G 2009 *Rock and Soil Mechanics* **30** Supp. 129 (in Chinese) [汪盼盼, 王万景, 刘长松, 朱震刚 2009 岩土力学 **30** 增刊 129]
- [9] Xiong X M, Wang H Y, Zhang J X 2003 *Acta Metall. Sin.* **39** 1223 (in Chinese) [熊小敏, 王海燕, 张进修 2003 金属学报 **39** 1223]
- [10] Zhang J X, Xiong X M 2003 *Acta Metall. Sin.* **39** 1127 (in Chinese) [张进修, 熊小敏 2003 金属学报 **39** 1127]
- [11] Wildman R D, Martin T W, Krouskop P E, Talbot J, Huntley J M, Parker D J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 061301

## Energy dissipation of a granular system under vertical vibration\*

Peng Zheng<sup>1)†</sup> Jiang Yi-Min<sup>1)</sup> Liu Rui<sup>2)</sup> Hou Mei-Ying<sup>2)</sup>

1) (*School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China*)

2) (*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 10 July 2012; revised manuscript received 14 August 2012)

### Abstract

For a vertically vibrating box filled with Cu grains or glass beads, we study power of dissipating energy of the granular system, by measuring acceleration of the box and force acting on it. It is found that for a given vibrating strength the power displays a wide peak structure centered at several tens Hz as vibrating frequency varies, and for a given frequency its variation with the strength obeys a power law, with an exponent smaller than that of a forced harmonic oscillator model 2. The results are considered to be useful for determining magnitudes of transport coefficients of granular liquids and gases, as well as difference in dissipative energy between their different dynamic patterns.

**Keywords:** granular matter, energy dissipation, vertical vibration

**PACS:** 45.70.-n, 62.40.+i, 46.40.Ff

**DOI:** 10.7498/aps.62.024502

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10904175).

† Corresponding author. E-mail: pz177@yahoo.com.cn