

## 零维气候系统非线性模式的周期解问题\*

陈丽娟<sup>†</sup> 鲁世平

(南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

(2013年5月23日收到; 2013年7月18日收到修改稿)

运用重合度理论探讨了一个非线性问题的周期解, 然后将其应用于零维气候系统模式的周期解问题的研究, 获得了该模式存在周期解的结果.

关键词: 非线性, 零维气候系统, 周期解

PACS: 02.30.Hq

DOI: 10.7498/aps.62.200201

## 1 引言

气候系统是一个由气体、液体、固体组成的复杂系统, 其中除热力过程外还有动力过程. 它是一个强迫耗散系统, 受到天文因子、地球物理因子的强迫作用. 完整的气候系统可被看作是一个物理系统, 它的活动受控于系统外一组地球物理条件. 而零维气候模式就是将全球气候视作一个点, 气候变量既不随经度、高度而变, 也不随纬度而变. 若将一维气候模式中的变量对纬度再做平均, 就缩为一点. 这样, 地球气候只用一个平均值来表示. 零维气候模式不但就方法论而言有独到之处, 而且对研究地质气候也颇有价值.

文献 [1] 描述了零维气候系统的基本方程

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4C}\mu I_0(1 - \alpha_p) - \frac{\varepsilon}{C}\sigma T^4, \quad (1)$$

其中  $T$  为洋面平均温度;  $C$  为海洋热贮存;  $\varepsilon$  为有效放射率;  $\mu > 0$  为外参数, 用来考虑太阳常数的变化;  $I_0$  为太阳常数;  $\sigma = 5.6687 \times 10^{-7}$  为 Stefan-Boltzmann 常数;  $\alpha_p$  为行星反照率, 是对零维气候至关重要的量, 对  $\alpha_p$  的不同参数化就会导出不同的模式气候.

文献 [2,3] 中, 设行星反照率  $\alpha_p = a - bT$ , 这与 Sellers 所采用的公式类似, 它体现了反照率-温

度-极冰的正反馈机制, 其中  $a > 0, b > 0$ . 为了使气候系统保持稳定, 指定  $\alpha_p = 0.75$  作为它的上界.

令  $\varepsilon = \varepsilon_e(1 - \varepsilon_a)$ , 式中  $\varepsilon_e$  为地面放射率,  $(1 - \varepsilon_a)$  为透射率. 将  $\alpha_p$  代入方程 (1), 得到关于  $T$  的非线性微分方程

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{C}\varepsilon\sigma T^4 + \frac{1}{4C}\mu I_0 b T + \frac{1}{4C}\mu I_0(1 - a). \quad (2)$$

在方程 (2) 中, 令  $\alpha = \frac{\varepsilon\sigma}{C}, \beta = \frac{\mu I_0 b}{4C}$ , 再考虑到实际问题中往往存在扰动, 因此, 建立如下具有一般形式的非线性动力学系统:

$$T'(t) = -\alpha T^4(t) + \beta T(t) + \gamma(t). \quad (3)$$

零维气候系统中的一些机制模式都是非线性的物理过程, 只用一般的线性模式去研究其过程和内在机理是不够理想的. 许多学者在大气物理、海洋气候、动力系统等方面利用数值分析方法研究了一些非线性问题 [4-12].

本文利用 Marwhin 重合度理论及一些分析技巧得到了方程 (3) 周期解的存在性结果. 文献 [13-16] 也曾用这种方法成功地解决了一些非线性问题的周期解问题.

## 2 基本理论

引理 1<sup>[17]</sup> 设  $a > 0, x \in W^{1,p}(R, R)$ , 则对  $\forall t \in R$ ,

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11271197)、江苏省普通高校研究生科研创新计划 (批准号: CXLX13\_502) 和南京信息工程大学科研基金 (批准号: 20090202, 2012r101) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: clj\_99@sohu.com

下面的不等式成立:

$$|x(t)| \leq (2a)^{-\frac{1}{m}} \left( \int_{t-a}^{t+a} |x(s)|^m ds \right)^{\frac{1}{m}} + a(2a)^{-\frac{1}{p}} \left( \int_{t-a}^{t+a} |x'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中  $m, p \in (1, +\infty)$ .

引理 2<sup>[18]</sup> 设  $X, Y$  是两个 Banach 空间,  $L: D(L) \subset X \rightarrow Y$  为指标为零的 Fredholm 算子,  $\Omega \subset X$  为有界开集,  $N: X \rightarrow Y$  为  $\overline{\Omega}$  上  $L$ -紧的, 如果下列条件满足:

- 1) 对任意的  $\lambda \in (0, 1), x \in \partial\Omega \cap D(L)$ , 均有  $Lx \neq \lambda Nx$ ;
  - 2) 对任意的  $x \in \text{Ker}L \cap \partial\Omega$ , 均有  $QNx \neq 0$ ;
  - 3)  $\text{deg}\{JQN, \Omega \cap \text{Ker}L, 0\} \neq 0$ , 其中  $J: \text{Im}Q \rightarrow \text{Ker}L$  同构;
- 则方程  $Lx = Nx$  在  $\overline{\Omega} \cap D(L)$  上至少存在一个解.

### 3 周期解探讨

现考虑方程 (3) 的  $\omega$ -周期解存在性问题, 其中  $\omega$  为一正常数.

设  $X = C_\omega = \{x | x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$ ,  $\forall x \in C_\omega$ , 定义  $|x|_\infty = \max_{t \in [0, \omega]} |x(t)|$ ,  $|x|_p = \left( \int_0^\omega |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ . 显然,  $X$  是 Banach 空间.

定理 1 设  $\gamma(t) \in C_\omega, \bar{\gamma} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \gamma(t) dt$ , 且满足条件:

$$(H) (\bar{\gamma} - \alpha M^4 + \beta M) (\bar{\gamma} - \alpha M^4 - \beta M) < 0,$$

其中  $M = \omega^{\frac{1}{4}} M_1 + \frac{\sqrt{\omega}}{2} |\gamma|_2$ , 常数  $M_1$  是由不等式  $\alpha x^4 - \beta \omega^{\frac{3}{4}} x + \sqrt{\omega} |\gamma|_2 \leq 0, x \geq 0$  所确定的  $x$  的上确界, 则方程 (3) 至少存在一个  $\omega$ -周期解.

注 1 由  $f(x) = (\bar{\gamma} - \alpha x^4 + \beta x) (\bar{\gamma} - \alpha x^4 - \beta x)$  关于  $x$  连续, 以及条件 (H) 知, 存在充分小的正数  $\varepsilon_0$ , 使得  $f(M_{\varepsilon_0}) < 0$ .

证明 我们分别定义算子  $L: D(L) \subset X \rightarrow X, LT = T'$  和  $N: X \rightarrow X$ ,

$$[NT](t) = -\alpha T^4(t) + \beta T(t) + \gamma(t), \quad (4)$$

其中  $D(L) = C_\omega = \{T | T \in C_\omega, T' \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ .

易见, 方程 (3) 可转换成算子方程  $LT = NT$ . 此外, 根据算子的定义, 不难得出  $\text{Ker}L = \mathbb{R}, \text{Im}L =$

$\left\{ T \in X, \int_0^\omega T(s) ds = 0 \right\}$ . 因此,  $L$  是指标为零的 Fredholm 算子.

令投影算子  $P, Q$  分别为

$$P: X \rightarrow \text{Ker}L, \quad PT = T(0),$$

$$Q: X \rightarrow \text{Im}Q, \quad QT = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(s) ds,$$

则  $\text{Ker}L = \text{Im}P, \text{Ker}Q = \text{Im}L$ .

令  $K: \text{Im}L \rightarrow D(L) \cap \text{Ker}P$  表示  $L|_{D(L) \cap \text{Ker}P}: D(L) \cap \text{Ker}P \rightarrow \text{Im}L$  的惟一逆, 则

$$[Ky](t) = \int_0^t y(s) ds \in D(L). \quad (5)$$

由 (4) 和 (5) 式易证  $N$  在  $\overline{\Omega}$  上是  $L$ -紧的, 其中  $\Omega$  为  $X$  中的任意有界开集. 令  $\Omega_1 = \{T | T \in D(L) \subset C_\omega, LT = \lambda NT, \lambda \in (0, 1)\}$ , 则  $\forall T \in \Omega_1$ ,

$$T'(t) = -\lambda \alpha T^4(t) + \lambda \beta T(t) + \lambda \gamma(t). \quad (6)$$

将方程 (6) 两端对  $t$  在  $[0, \omega]$  上积分,

$$\alpha \int_0^\omega T^4(t) dt = \beta \int_0^\omega T(t) dt + \int_0^\omega \gamma(t) dt.$$

根据 Holder 不等式得

$$\alpha |T|_4^4 \leq \beta \omega^{\frac{3}{4}} |T|_4 + \sqrt{\omega} |\gamma|_2, \quad (7)$$

由  $\alpha > 0$ , 从而由 (7) 式可知存在与  $T$  无关的常数  $M_1$  使得

$$|T|_4 \leq M_1. \quad (8)$$

将方程 (6) 两端同乘以  $T'(t)$ , 同时对  $t$  在  $[0, \omega]$  上积分

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega |T'(t)|^2 dt \\ &= -\lambda \alpha \int_0^\omega T^4(t) T'(t) dt + \lambda \beta \int_0^\omega T(t) T'(t) dt \\ & \quad + \lambda \int_0^\omega \gamma(t) T'(t) dt = \lambda \int_0^\omega \gamma(t) T'(t) dt, \end{aligned}$$

根据 Holder 不等式得:  $|T'|_2^2 \leq |T'|_2 \cdot |\gamma|_2$ , 即有

$$|T'|_2 \leq |\gamma|_2. \quad (9)$$

根据 (8) 和 (9) 式及引理 1, 取  $a = \frac{\omega}{2}, m = 4, p = 2$ , 有

$$|T|_\infty \leq \omega^{\frac{1}{4}} |T|_4 + \frac{\sqrt{\omega}}{2} |T'|_2 \leq \omega^{\frac{1}{4}} M_1 + \frac{\sqrt{\omega}}{2} |\gamma|_2 = M.$$

令  $\Omega = \{T | |T|_\infty < M_{\varepsilon_0}\}$ ,  $\forall T \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L$ , 有  $|T| = M_{\varepsilon_0}$ , 由注 1 得:

$$QNM_{\varepsilon_0} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega (-\alpha M_{\varepsilon_0}^4 + \beta M_{\varepsilon_0} + \gamma(t)) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= -\alpha M_{\varepsilon_0}^4 + \beta M_{\varepsilon_0} + \bar{\gamma} > 0, \\
 QN(-M_{\varepsilon_0}) &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega (-\alpha M_{\varepsilon_0}^4 - \beta M_{\varepsilon_0} + \gamma(t)) dt \\
 &= -\alpha M_{\varepsilon_0}^4 - \beta M_{\varepsilon_0} + \bar{\gamma} < 0.
 \end{aligned}$$

因此,  $\forall T \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L$ ,  $QNT \neq 0$ , 即  $NT \notin \text{Im}L$ .

再令  $J: \text{Im}Q \rightarrow \text{Ker}L$ ,  $JT = T$ , 做同伦

$$H(T, \xi) = \xi T + (1 - \xi)JQNT \quad \xi \in [0, 1],$$

并且, 当  $T \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L$ , 有  $T = \pm M_{\varepsilon_0}$ ,

$$\begin{aligned}
 H(M_{\varepsilon_0}, \xi) &= \xi M_{\varepsilon_0} + (1 - \xi)QNM_{\varepsilon_0} > 0, \\
 H(-M_{\varepsilon_0}, \xi) &= -\xi M_{\varepsilon_0} + (1 - \xi)QN(-M_{\varepsilon_0}) < 0.
 \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
 &\text{deg}(JQN, \Omega \cap \text{Ker}L, 0) \\
 &= \text{deg}(H(T, 0), \Omega \cap \text{Ker}L, 0) \\
 &= \text{deg}(H(T, 1), \Omega \cap \text{Ker}L, 0) \\
 &= \text{deg}(I, \Omega \cap \text{Ker}L, 0) \neq 0.
 \end{aligned}$$

由引理 2, 可知方程 (3) 至少存在一个  $\omega$ -周期解.

## 4 结论

1) 在本文所描述的具有一般形式的零维气候系统非线性模式中, 由于  $\sigma = 5.6687 \times 10^{-7}$ , 因此  $\alpha = \frac{\varepsilon\sigma}{C}$  很小, 保证了定理 1 中的条件成立, 从而得到了该模式存在周期解的结果.

2) 非线性微分方程一般不能得到有限形式的解析解, 人们只能用数值计算方法得到它的模拟解, 或者用近似解去逼近它<sup>[19,20]</sup>. 本文相比于文献 [1] 通过数值计算来研究该系统的周期性行为的优点是: 运用 Marwhin 重合度理论更容易鉴别一般零维气候模式的周期性现象.

3) 海洋在气候系统中起着举足轻重的作用, 确定海洋的气候状态, 其重要性不亚于确定大气的气候状态. 目前对海洋的研究, 大多数集中在海温异常、厄尔尼诺、南方涛动、遥相关等方面. 对零维气候系统非线性模式的周期性行为的研究, 是大气和海洋科学所感兴趣的, 本文研究了气候变化的动力过程, 所得结果有助于我们了解现代气候的成因和海洋在气候变化中的作用, 同时也为准确的天气预报和气候预报提供了必要的理论依据.

- 
- [1] Cao H X 1994 *Climate Dynamic Model and Simulation* (Beijing: Meteorology Press) [曹鸿兴 1994 气候动力模式与模拟 (北京: 气象出版社)]
  - [2] Fraedrich K 1978 *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **104** 461
  - [3] Fraedrich K 1979 *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **105** 147
  - [4] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]
  - [5] Mo J Q 2009 *Sci. China G* **39** 568
  - [6] Liu P, Li Z L 2013 *Chin. Phys. B* **22** 050204
  - [7] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
  - [8] Zhang R P, Yu X J, Zhu J 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 110201
  - [9] Mo J Q, Chen X F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100203
  - [10] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020202 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 020202]
  - [11] Du Z J, Lin W T, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 090201
  - [12] Wang J F, Bai F N, Cheng Y M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030206
  - [13] Li X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030201
  - [14] Li X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020202
  - [15] Li X J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210201 (in Chinese) [李晓静 2012 物理学报 **61** 210201]
  - [16] Chen L J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 090201 (in Chinese) [陈丽娟 2013 物理学报 **62** 090201]
  - [17] Tang X H, Li X 2009 *Nonlinear Analy. Theor.* **71** 1124
  - [18] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* (Berlin: Springer)
  - [19] Wu Q K 2011 *Acta Phys Sin.* **60** 068820 (in Chinese) [吴钦宽 2011 物理学报 **60** 068820]
  - [20] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]

# The problem of periodic solution of nonlinear model in zero-dimensional climate system\*

Chen Li-Juan<sup>†</sup> Lu Shi-Ping

(School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

(Received 23 May 2013; revised manuscript received 18 July 2013)

## Abstract

Using Mawhin's continuation theorem, the existence of periodic solution for a class of nonlinear problem is discussed, and then by using it, the problem of periodic solution of nonlinear model in zero-dimensional climate system is investigated. A result about the existence of periodic solution to the model is obtained.

**Keywords:** nonlinear, zero-dimensional climate system, periodic solution

**PACS:** 02.30.Hq

**DOI:** 10.7498/aps.62.200201

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11271197), the Innovation Program Award for Graduate Student in Jiangsu, China (Grant No. CXLX13.502), and the Science Foundation in NUIST of China (Grant Nos. 20090202, 2012r101).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: clj\_99@sohu.com