双环形 Hulthén 势束缚态的近似解析解*

陆法林† 陈昌远 尤源

(盐城师范学院物理科学与电子技术学院, 盐城 224051)

(2013年5月22日收到; 2013年6月17日收到修改稿)

构造了双环形 Hulthén 势, 用指数函数近似表示任意分波的离心项, 运用函数分析法讨论双环型 Hulthén 势 Schrödinger 方程的束缚态解. 归一化的角向波函数和径向波函数用超几何多项式表示, 给出了束缚态能谱, 体系的束缚态的能谱方程和波函数与量子数和势参数有关. 中心势场和单环形势场角向波函数及 Hulthén 势束缚态能谱是本文双环形 Hulthén 势的特例.

关键词: 双环形 Hulthén 势, 任意分波, 近似解析解, 束缚态

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Db　　**DOI:** 10.7498/aps.62.200301

1 引 言

量子力学中的可解势因能给出包含完整量子信息的归一化本征波函数和束缚态能谱而显得很重要. 量子力学中的可解势分为球对称中心势和非球对称中心势, 非球对称中心势简称非中心势. 典型的非中心势有环形振子势[1−3]、Hartmann 势[4,5]、Makarov 势[6,7] 和双环形势 [8−17] 等. 非中心势可用于讨论如苯环类分子和变形核子间的相互作用, 双环形振子势可用来描述双原子分子在非中心势场振动与转动 [13−15] 问题. 人们用 N-U 和路径积分等多种方法对非中心势进行了广泛的研究. Hulthén 势是一个常应用于核和粒子物理、原子与分子物理和化学物理的短程势模型. Hulthén 势的性质类似于氢原子势, Hulthén 势任意分波束缚态和散射态的解析解由于离心势的存在而无法获得, 只能给出 s 分波的解析解 [18,19]. 近年来, 人们用指数函数来近似表达离心势, 采用函数分析法、超对称与形不变性法、N-U 法和渐近迭代法等多种方法得到了 Hulthén 势非 s 任意分波能谱和波函数 [20−24] 的近似解析解. 本文在环型势和 Hulthén 势的基础上提出一类新的非中心势 —— 双环形 Hulthén 势, 双环形 Hulthén 势是 Hulthén 势外面再加上双环形平方反比势, 其表达式为

$$V(r,\theta) = -\frac{Ze^2\delta\,\mathrm{e}^{-\delta r}}{1-\mathrm{e}^{-\delta r}} + \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{b}{r^2\sin^2\theta} + \frac{c}{r^2\cos^2\theta}\right) \quad (b \geqslant 0,\quad c \geqslant 0), \tag{1}$$

其中势参数 $Z \geqslant 1$, 屏蔽系数 $\delta > 0$, b 和 c 为表示非中心势强度的无量纲系数. 当 $b = c = 0$ 时, 双环形 Hulthén 势退化为 Hulthén 势; 当 $b = c = 0$, 且 $\delta \to 0$ 时, 双环形 Hulthén 势退化为 Coulomb 势; 当 $b = 0$, 且 $\delta \to 0$ 时, 双环形 Hulthén 势退化为 Hartmann 势. 可见双环形 Hulthén 势是一个较 Hulthén 势更为一般的非中心势.

本文运用函数分析法讨论双环形 Hulthén 势 Schrödinger 方程的束缚态解. 首先在球坐标系下将双环形 Hulthén 势 Schrödinger 方程分离变量, 得到了角向方程和径向方程. 在角向方程中做变量代换 $x = \cos\theta$ 和函数代换, 用指数函数来近似表达任意分波的离心项, 分别将角向方程和径向方程转化为超几何方程. 运用边界条件求出用超几何多项式表示的归一化角向波函数和径向波函数, 给出了体系的束缚态能谱. 结果表明体系的波函数和束缚态能谱性质与三个量子数 (m, s, n_r) 及双环形 Hulthén 势的势参数有关. 详细讨论了双环形势角向波函数向

* 国家自然科学基金 (批准号: 11275165)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK2010291) 和盐城师范学院教授博士基金 (批准号: 11YSYJB0206) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: falinlu@126.com

　

中心势和单环型势的退化问题, 双环形 Hulthén 势束缚态的近似解析解可退化为 Hulthén 势波函数和束缚态能谱.

2 角向波函数的解析解

势场中质量为 μ 粒子的 Schrödinger 方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi)+V(r,\theta)\psi(r,\theta,\varphi) =E\psi(r,\theta,\varphi). \tag{2}$$

仿照中心势场的做法, 将波函数写成下列形式

$$\psi(r,\theta,\varphi)=r^{-1}u(r)H(\theta)\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi}/\sqrt{2\pi} \quad (m=0,1,2\cdots). \tag{3}$$

将 (1), (3) 式代入 (2) 式, 变量分离后得到的角向波函数 $H(\theta)$ 以及径向波函数 $u(r)$ 所满足的微分方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}^2H(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}+\cot\theta\frac{\mathrm{d}H(\theta)}{\mathrm{d}\theta}+\left[l'(l'+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{b}{\sin^2\theta}-\frac{c}{\cos^2\theta}\right]H(\theta)=0, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2\delta\,\mathrm{e}^{-\delta r}}{1-\mathrm{e}^{-\delta r}}\right)-\frac{l'(l'+1)}{r^2}\right]u(r)=0, \tag{5}$$

其中 l' 为常数. 由波函数的标准条件可知对于束缚态来说, 方程 (4) 的边界条件为 $H(0)$, $H(\pi/2)$ 和 $H(\pi)$ 均取有限值, 而方程 (5) 的边界条件是 $u(0)=0$ 和 $u(\infty)=0$. 引入新的坐标变量

$$x=\cos\theta,\quad \theta\in[0,\pi],\quad x\in[-1,1], \tag{6}$$

则 (4) 式转化为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2H(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}+\left[l'(l'+1)-\frac{(m')^2}{1-x^2}-\frac{\gamma(\gamma-1)}{x^2}\right]H(x)=0, \tag{7}$$

其中

$$m'=\sqrt{m^2+b},\quad \gamma(\gamma-1)=c. \tag{8}$$

考虑到 (7) 式当 $x\to 0$ 和 $x\to\pm1$ 时 $H(x)$ 的渐近性质, 做函数代换

$$H(x)=x^{\gamma}(1-x^2)^{m'/2}y(x), \tag{9}$$

将 (9) 式代入 (7) 式得 $y(x)$ 满足的微分方程是

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+2\left[\frac{\gamma}{x}-(m'+\gamma+1)x\right]\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\left[l'(l'+1)-(m'+\gamma)(m'+\gamma+1)\right]y(x)=0. \tag{10}$$

做变量代换 $z=x^2$, (10) 式转化为

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y(z)}{\mathrm{d}z^2}+\left[\gamma+\frac{1}{2}-\left(m'+\gamma+\frac{3}{2}\right)z\right]\frac{\mathrm{d}y(z)}{\mathrm{d}z}-\frac{(-l'+m'+\gamma)}{2}\frac{(l'+m'+\gamma+1)}{2}y(z)=0, \tag{11}$$

上式是超几何函数方程 [25] , 故 (10) 式的解是超几何函数

$$y(x)={}_2F_1\left(\frac{-l'+m'+\gamma}{2},\frac{l'+m'+\gamma+1}{2};\gamma+\frac{1}{2};x^2\right). \tag{12}$$

为保证角向波函数在 $x=\pm1$ 处的有限性, 超几何函数必须中断为多项式, 这就要求 $(-l'+m'+\gamma)/2$ 为负整数, 即

$$\frac{-l'+m'+\gamma}{2}=-s,\quad s=0,1,2,\cdots,(l'),\quad l'=m'+2s+\gamma, \tag{13}$$

其中 (l') 为不大于 l' 的正整数. 满足 (13) 式条件的超几何函数为超几何多项式, 用超几何多项式表示的角向波函数是

$$H_{l'm'}(x)=N_{l'm'}x^{\gamma}(1-x^2)^{m'/2}\,{}_2F_1\left(\frac{-l'+m'+\gamma}{2},\frac{l'+m'+\gamma+1}{2};\gamma+\frac{1}{2};x^2\right), \tag{14}$$

其中 $N_{l'm'}$ 是角向波函数的归一化常数. 根据归一化条件

$$\int_{-1}^{1}|H_{l'm'}(x)|^2\,\mathrm{d}x=1 \tag{15}$$

和超几何多项式的正交关系 [25]

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{p-\gamma}{}_2F_1(-n,p+n;\gamma;z)\,{}_2F_1(-k,p+k;\gamma;z)\,\mathrm{d}z=\frac{n!}{p+2n}\cdot\frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(p+n-\gamma+1)}{\Gamma(p+n)\Gamma(\gamma+n)}\delta_{nk}, \tag{16}$$

令 (16) 式中的 $z=x^2$, 可得角向波函数的归一化常数为

$$N_{l'm'}=\left[\frac{(l'+1/2)}{\Gamma^2(\gamma+1/2)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{l'+m'+\gamma+1}{2}\right)}{\left(\dfrac{l'-m'-\gamma}{2}\right)!}\right.$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\dfrac{l'-m'+\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{l'+m'-\gamma+2}{2}\right)}\Bigg]^{1/2}. \tag{17}$$

3 径向波函数的近似解析解和能谱方程

当 δ 较小时, 分波离心项可用指数函数近似[20−24]表示为

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\delta^2 \mathrm{e}^{-\delta r}}{(1-\mathrm{e}^{-\delta r})^2} + \frac{\delta^2}{12}. \tag{18}$$

将 (18) 式代入 (5) 式得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + \left[-\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2 \mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{l'(l'+1)\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}\right] u(x) = 0, \tag{19}$$

其中参数

$$-\varepsilon^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{E}{\delta^2} - \frac{l'(l'+1)}{12},$$
$$\alpha^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{Ze^2}{\delta},$$
$$\delta r = x. \tag{20}$$

做自变量变换 $z = \mathrm{e}^{-x}$, (19) 式转化为

$$z^2 \frac{\mathrm{d}^2 u(z)}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z} + \left[-\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2 z}{1-z} - \frac{l'(l'+1)z}{(1-z)^2}\right] u(z) = 0. \tag{21}$$

考虑到 (21) 式当 $z \to 0$ 和 $z \to 1$ 时 $u(z)$ 的渐近性质, 做函数代换

$$u(z) = z^{\varepsilon}(1-z)^{l'+1} f(z), \tag{22}$$

将 (22) 式代入 (21) 式得 $f(z)$ 满足的超几何微分方程为

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 f(z)}{\mathrm{d}z^2} + [(2\varepsilon+1) - (2\varepsilon+2l'+3)z]\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} + [\alpha^2 - (l'+1+2\varepsilon)(l'+1)] f(z) = 0. \tag{23}$$

(23) 式的解是超几何函数[25]

$$f(x) = {}_2F_1(a,b;c;z), \tag{24}$$

其中 $a = \varepsilon + l' + 1 - \sqrt{\varepsilon^2+\alpha^2}, b = \varepsilon + l' + 1 + \sqrt{\varepsilon^2+\alpha^2}, c = 2\varepsilon+1$. 因为 $\mathrm{Re}(a+b-c) = 2l'+1 > 0$, 超几何函数在 $z=1$ 处发散. 为保证束缚态波函数的边界条件, 要求超几何函数必须中断为多项式, 参数 a 或者 b 须等于一个负整数, 因 $a < b$, 故 a 等于一个负整数, 满足条件

$$\varepsilon + l' + 1 - \sqrt{\varepsilon^2+\alpha^2} = -n_r$$
$$(n_r = 0,1,2,3,\cdots), \tag{25}$$

n_r 为径向量子数. 令主量子数为

$$n' = n_r + l' + 1, \tag{26}$$

合并 (25) 和 (26) 式得 ε 所满足的方程为

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 - n'^2}{2n'}. \tag{27}$$

为使 $\varepsilon > 0$, 要求主量子数满足 $n' \leqslant \alpha$, 将 (20) 式代入 (27) 式得体系的能谱方程为

$$E'_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n'} - \frac{\hbar^2\delta}{2\mu Z e^2}n'\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\delta^2 l'(l'+1)}{12}. \tag{28}$$

相应的径向波函数为

$$u_{n_r l'}(r) = N_{n_r l'} z^{\varepsilon}(1-z)^{l'+1} {}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon+2l'+2+n_r; 2\varepsilon+1; z), \tag{29}$$

其中 $N_{n_r l'}$ 是径向波函数的归一化常数, 根据归一化条件 $\int_0^\infty \left|u_{n_r l'}(r)\right|^2 \mathrm{d}r = 1$, 可确定归一化常数

$$\frac{(N_{n_r l'})^2}{\delta}\int_0^1 z^{2\varepsilon-1}(1-z)^{2l'+2} \times [{}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon+2l'+2+n_r; 2\varepsilon+1; z)]^2 \mathrm{d}z = 1. \tag{30}$$

根据积分公式[21]关系

$$\int_0^1 z^{2\lambda-1}(1-z)^{2(\delta+1)} \times [{}_2F_1(-n, 2(\delta+\lambda+1)+n; 2\lambda+1; z)]^2 \mathrm{d}z$$
$$= \frac{(n+\delta+1)n!}{(n+\delta+\lambda+1)}\frac{\Gamma(n+2\delta+2)\Gamma(2\lambda)\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(n+2\lambda+1)\Gamma[2(\delta+\lambda+1)+n]}$$
$$\delta > -\frac{3}{2} \wedge \lambda > 0, \tag{31}$$

比较 (30) 和 (31) 式得归一化常数为

$$N_{n_r l'} = \frac{1}{\Gamma(2\varepsilon)}\left[\frac{\delta}{2\varepsilon}\frac{(n_r+l'+\varepsilon+1)}{n_r!(n_r+l'+1)} \times \frac{\Gamma(n_r+2\varepsilon+1)\Gamma(2(l'+\varepsilon+1)+n_r)}{\Gamma(n_r+2l'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

4 讨 论

1) 中心势场情形. 取 (1) 式中势参数 $b=0, c=0$, 由 (8) 式得 $\gamma_1 = 0$ 和 $\gamma_2 = 1$, $m' = m$, 由 (13) 式得角量子数分别为

$$l_1 - m = 2s, \quad l_2 - m = 2s+1, \tag{33}$$

l_1 和 l_2 为整数. 由 (14) 式得相应的归一化角向波函数分别为

$$H_{l_1m}(x)=N_{l_1m}(1-x^2)^{m/2}\times{}_2F_1\left(\frac{-l_1+m}{2},\frac{l_1+m+1}{2};\frac{1}{2};x^2\right),\quad(34)$$

$$H_{l_2m}(x)=N_{l_2m}x(1-x^2)^{m/2}\times{}_2F_1\left(\frac{-l_2+m+1}{2},\frac{l_2+m+2}{2};\frac{3}{2};x^2\right),\quad(35)$$

其中归一化常数为

$$N_{l_1m}=\sqrt{\frac{(l_1+1/2)}{\Gamma^2(1/2)}\frac{\Gamma\left(\frac{l_1+m+1}{2}\right)}{\left(\frac{l_1-m}{2}\right)!}\frac{\Gamma\left(\frac{l_1-m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l_1+m+2}{2}\right)}},$$

$$N_{l_2m}=\sqrt{\frac{(l_2+1/2)}{\Gamma^2(3/2)}\frac{\Gamma\left(\frac{l_2+m+2}{2}\right)}{\left(\frac{l_2-m-1}{2}\right)!}\frac{\Gamma\left(\frac{l_2-m+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l_2+m+1}{2}\right)}},\quad(36)$$

$H_{l_1m}(x)$ 是偶函数, $H_{l_2m}(x)$ 是奇函数. 中心势场中 (4) 式的解为缔合 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l^m(x)$, $\mathrm{P}_l^m(x)$ 与超几何多项式的关系 [26] 满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_l^m(x)\\=&\frac{2^m\cos\left(\frac{(l-m)\pi}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{l+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-m}{2}+1\right)}(1-x^2)^{m/2}\\&\times{}_2F_1\left(\frac{-l+m}{2},\frac{l+m+1}{2};\frac{1}{2};x^2\right)\\&+\frac{2^{m+1}\sin\left(\frac{(l-m)\pi}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{l+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l-m+1}{2}\right)}x(1-x^2)^{m/2}\\&\times{}_2F_1\left(\frac{-l+m+1}{2},\frac{l+m}{2}+1;\frac{3}{2};x^2\right).\end{aligned}\quad(37)$$

[注: 文献 [26] 中 (37) 式系数为 $\cos(l+m)\pi/2$ 和 $\sin(l+m)\pi/2$. 我们做了大量的数值计算, 发现这仅适用于 l 和 m 是整数情形. 当 l 和 m 来不是整数时, 应将系数改写为 $\cos(l-m)\pi/2$ 和 $\sin(l-m)\pi/2$, 数值计算说明, 这个改写可同时适用于 l 和 m 是整数和非整数的情况]. 对比 (34), (35) 和 (37) 式可得

$$H_{l_1m}(x)=\sqrt{\frac{2l_1+1}{2}\cdot\frac{(l_1-m)!}{(l_1+m)!}}\mathrm{P}_{l_1}^m(x),\quad(38)$$

$$H_{l_2m}(x)=\sqrt{\frac{2l_2+1}{2}\cdot\frac{(l_2-m)!}{(l_2+m)!}}\mathrm{P}_{l_2}^m(x),\quad(39)$$

其中用到的数学关系式 [25] 为

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!}{2^nn!}\sqrt{\pi}\quad(n=0,1,2,\cdots).\quad(40)$$

$H_{l_1m}(x)$ 和 $H_{l_2m}(x)$ 分别是正交归一化的缔合 Legendre 多项式的偶函数部分和奇函数部分. 用角量子数 l 表示 l_1 和 l_2, 合并 (38) 和 (39) 式得

$$\begin{aligned}H_{lm}(x)&=H_{l_1m}\delta_{l-m,2s}+H_{l_2m}\delta_{l-m,2s+1}\\&=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(x),\end{aligned}\quad(41)$$

可见归一化角向波函数等于归一化的缔合 Legendre 多项式. 说明中心势场中角向波函数是双环形势场角向波函数在 $b=0$ 和 $c=0$ 时的特例, 双环形势场角向波函数能退化为中心势场中的角向波函数.

2) 单环形势场情形. 取 (1) 式中势参数 $b\neq0, c=0$, 则 $\gamma_1=0$ 和 $\gamma_2=1$, $m'=\sqrt{m^2+b}$ 为非零整数, 角量子数为

$$l_1'=2s+m',\quad l_2'=2s+m'+1,\quad(42)$$

l_1' 和 l_2' 不一定为非零整数. 角向波函数 (14) 式为

$$\begin{aligned}&H_{l_1'm'}(x)\\=&N_{l_1'm'}(1-x^2)^{m'/2}\\&\times{}_2F_1\left(\frac{-l_1'+m'}{2},\frac{l_1'+m'+1}{2};\frac{1}{2};x^2\right),\end{aligned}\quad(43)$$

$$\begin{aligned}&H_{l_2'm'}(x)\\=&N_{l_2'm'}x(1-x^2)^{m'/2}\\&\times{}_2F_1\left(\frac{-l_2'+m'+1}{2},\frac{l_2'+m'+2}{2};\frac{3}{2};x^2\right),\end{aligned}\quad(44)$$

用角量子数 l' 表示 l_1' 和 l_2', $H_{l_1'm'}(x)$ 是偶函数, $H_{l_2'm'}(x)$ 是奇函数, 同理可得 $H_{l_1'm'}(x)$ 和 $H_{l_2'm'}(x)$ 分别是正交归一化的普遍的缔合 Legendre 多项式 [2] 的偶函数部分和奇函数部分. 用角量子数 l' 表示 l_1' 和 l_2', 合并 (43) 和 (44) 式得

$$\begin{aligned}H_{l'm'}(x)&=H_{l_1'm'}\delta_{l'-m',2s}+H_{l_2'm'}\delta_{l'-m',2s+1}\\&=\sqrt{\frac{2l'+1}{2}\cdot\frac{(l'-m')!}{\Gamma(l'+m'+1)}}\mathrm{P}_{l'}^{m'}(x),\end{aligned}\quad(45)$$

说明单环形势角向波函数是双环型势角向波函数在 $c=0$ 的特例, 双环形势角向波函数能退化为单环形势场中的角向波函数.

3) 双环形势场情形. 取 (1) 式中势参数 $c>0$, 则 $\gamma_3=[1+\sqrt{1+4c}]/2>0$, $\gamma_4=\left[1-\sqrt{1+4c}\right]/2<0$, 角量子数取

$$l_3'=2s+m'+\gamma_3,\quad l_4'=2s+m'+\gamma_4, \tag{46}$$

角向波函数 (14) 式为

$$\begin{aligned}&H_{l_3'm'}(x)\\&=N_{l_3'm'}x^{\gamma_3}(1-x^2)^{m'/2}{}_2F_1\left(\frac{-l_3'+m'+\gamma_3}{2},\right.\\&\left.\frac{l_3'+m'+\gamma_3+1}{2};\gamma_3+\frac{1}{2};x^2\right),\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}&H_{l_4'm'}(x)\\&=N_{l_4'm'}x^{\gamma_4}(1-x^2)^{m'/2}{}_2F_1\left(\frac{-l_4'+m'+\gamma_4}{2},\right.\\&\left.\frac{l_4'+m'+\gamma_4+1}{2};\gamma_4+\frac{1}{2};x^2\right),\end{aligned} \tag{48}$$

(48) 式中 x^{γ_4} 发散, 角向波函数 $H_{l_4'm'}(x)$ 也发散, 不合题意, 应舍去; (47) 式中 x^{γ_3} 项有限, 角向波函数 $H_{l_3'm'}(x)$ 也有限, 符合题意, 应保留. 故双环形势角向波函数只能取 $H_{l_3'm'}(x)$, 表示为

$$H_{l'm'}(x)=H_{l_3'm'}(x)\quad(l_3'-m'-2s=\gamma_3\geqslant 0), \tag{49}$$

$H_{l_3'm'}(x)$ 是奇函数, 表明粒子在 $x=0(\theta=\pi/2)$ 处不出现, 这是因为由 (1) 式表示的双环形势在 $\theta=\pi/2$ 处是无限高而形成的. 双环形势角量子数 $l'=l_3'$ 的数量是中心势和单环形势角量子数 $l'=l_1',l_2'$ 数量的一半.

4) 角向波函数的级数形式. 根据超几何多项式的级数展开公式 [25]

$$\begin{aligned}&{}_2F_1(-n,\beta;\gamma;x)=\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\frac{n!}{\mu!(n-\mu)!}\frac{(\beta)_\mu}{(\gamma)_\mu}x^{\mu},\\&(\beta)_\mu=\frac{\Gamma(\beta+\mu)}{\Gamma(\beta)}\quad(n=0,1,2\cdots),\end{aligned} \tag{50}$$

将 (13) 和 (17) 式代入 (14) 式得角向波函数的级数展开形式为

$$\begin{aligned}H_{l'm'}(x)=&\sqrt{\frac{2l'+1}{2}\frac{1}{s!\Gamma(l'-s-\gamma+1)}\frac{\Gamma(s+\gamma+1/2)}{\Gamma(l'-s+1/2)}}\\&x^{\gamma}(1-x^2)^{m'/2}\sum_{\mu=0}^{s}\frac{(-1)^{\mu}s!}{\mu!(s-\mu)!}\\&\frac{\Gamma(l'-s+\mu+1/2)}{\Gamma(\mu+\gamma+1/2)}x^{2\mu}.\end{aligned} \tag{51}$$

做变换 $\nu=s-\mu$, 并应用公式 [25]

$$\Gamma(2x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2), \tag{52}$$

角向波函数 (51) 式转化为

$$\begin{aligned}H_{l'm'}(x)=&2^{\gamma}\left[\frac{2l'+1}{2}\frac{s!}{\Gamma(l'-s-\gamma+1)}\frac{\Gamma(2s+2\gamma+1)}{\Gamma(s+\gamma+1)}\right.\\&\left.\times\frac{\Gamma(l'-s+1)}{\Gamma(2l'-2s+1)}\right]^{1/2}x^{\gamma}(1-x^2)^{m'/2}\\&\times\sum_{\nu=0}^{s}\frac{(-1)^{s-\nu}}{2^{l'}\nu!(s-\nu)!}\frac{\Gamma(s+\gamma-\nu+1)}{\Gamma(2s+2\gamma-2\nu+1)}\\&\times\frac{\Gamma(2l'-2\nu+1)}{\Gamma(l'-\nu+1)}x^{2s-2\nu},\end{aligned} \tag{53}$$

(53) 式角向波函数的级数形式与近期工作 [27] 是一致的, 二者仅相差一个符号 $(-1)^s$. 说明级数方法和本文所用特殊函数方法求解双环形势角向波函数问题的等价性.

5) 考虑 Hulthén 势情形. 取 (1) 式中势参数 $b=c=0$ 时, 由 (1) 式表达的双环形 Hulthén 势退化为 Hulthén 势. 由 (8), (13) 和 (28) 式得 $l'=2s+m=l, l'=2s+m+1=l$, 其中 $l=0,1,2\cdots$ 是普通意义上的角量子数. 主量子数为 $n'=n=n_r+l+1, n=1,2,3\cdots$, Hulthén 体系的能谱方程为

$$\begin{aligned}E_n=&-\frac{\mu Z^2e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{\hbar^2\delta}{2\mu Ze^2}n\right)^2\\&+\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\delta^2 l(l+1)}{12},\end{aligned} \tag{54}$$

(54) 式与文献 [20, 21] 的结果是一致的. 当 $\delta\to 0$ 时, 由 (54) 式得类氢原子体系能级为

$$E_n=-\frac{\mu Z^2e^4}{2\hbar^2n^2}. \tag{55}$$

Hulthén 势和类氢原子的能谱是双环形 Hulthén 势能谱在势参数 $b=c=0$ 的特例.

5 结 论

提出了一类新的非中心势 —— 双环形 Hulthén 势. 用指数函数近似表示任意分波的离心项, 讨论该势 Schrödinger 方程的束缚态解. 归一化的角向波函数和径向波函数用超几何函数表示, 给出了束缚态能谱的解析表达式. 体系的波函数和能谱与类环形 Hulthén 势的势参数和三个量子数有关. 中心势场和单环形势场角向波函数以及 Hulthén 势束缚态能谱是本文双环形 Hulthén 势的特例, 双环形势场能退化为中心势场和单环形势场情形.

[1] Quesne C 1988 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **21** 3093
[2] Chen C Y, Sun D S 2001 *Acta Photon. Sin.* **30** 104 (in Chinese) [陈昌远, 孙东升 2001 光子学报 **30** 104]
[3] Dong S H , Sun G H , Lozada-Cassou M 2004 *Phys. Lett.* A **328** 299
[4] Hartmann H, Schuch D 1980 *Int. J. Quantum Chem.* **18** 125
[5] Chen C Y, Liu C L, Sun D S 2002 *Phys. Lett.* A **305** 341
[6] Zhou F, Wu Y, Guo J Y 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 813
[7] Chen C Y, Liu C L, Lu F L 2010 *Phys. Lett.* A **374** 1346
[8] Hautot A 1973 *J. Math. Phys.* **14** 1320
[9] Dutra A S, Hott M 2006 *Phys. Lett.* A **356** 215
[10] Yasuk F, Durmus A. 2008 *Phys. Scr.* **77** 015005
[11] Lu F L , Chen C Y 2010 *Chin. Phys.* B **19** 100309
[12] Zhang M C, Huangfu G Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6819 (in Chinese) [张民仓, 皇甫国庆 2010 物理学报 **59** 6819]
[13] Berkdemir C 2009 *J. Math. Chem.* **46** 139
[14] Zhang M C, Sun G H, Dong S H 2010 *Phys. Lett.* A **374** 704
[15] Ghoumaid A, Benamira F, Guechi L, Khiat Z 2013 *Cent. Eur. J. Phys.* **11** 78
[16] Arda A , Sever R 2012 *J. Math. Chem.* **50** 1484
[17] Maghsoodi E, Hassanabadi H, Zarrinkamar S 2013 *Chin. Phys.* B **22** 030302
[18] Guo J Y, Meng J, Xu F X 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 602
[19] Zhang M C 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3214
[20] Chen C Y, Sun D S, Lu F L 2008 *J. At. Mol. Phys.* **25** 393 (in Chinese) [陈昌远, 孙东升, 陆法林 2008 原子与分子物理学报 **25** 393]
[21] Qiang W C, Chen W L, Li K, Zhang H P 2009 *Int. J. Mod. Phys.* A **24** 5523
[22] Feng J S, Liu Z, Guo J Y 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 110304
[23] Zhang M C, HuangFu G Q 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 50304
[24] Agboola D 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 972
[25] Liu S K, Liu S D 2002 *Special Function (*Beijing: China Meteorological Press) p8, 485, 571, 585 (in Chinese) [刘式适, 刘式达 2002 特殊函数 (北京: 气象出版社) 第 8, 485, 571, 585 页]
[26] Gradsgteyn I S, Ryzhik M 2007 *Tables of Integrals, Series, and Products* (7th Ed.) (New York: Academic Press) p971
[27] Chen C Y, Lu F L, Sun D S, Dong S H 2013 *Chin. Phys.* B **22** 100302

Approximate analytical solutions of bound states for the double ring-shaped Hulthén potential*

Lu Fa-Lin† Chen Chang-Yuan You Yuan

(*School of Physics and Electronics, Yancheng Teachers University, Yancheng* 224051*, China*)

(Received 22 May 2013; revised manuscript received 17 June 2013)

Abstract

The double ring-shaped Hulthén potential is proposed in this paper. By using the analytical method of function, the approximate analytical solutions of bound state solutions of Schrödinger equation for the double ring-shaped Hulthén potential are presented within the framework of an exponential approximation of the centrifugal potential for arbitrary l-states. The normalized angular and radial wave function expressed in terms of hypergeometric polynomials are presented. The energy spectrum equations are obtained. The wave function and the energy spectrum equations of the system are related to three quantum numbers and parameters of double ring-shaped Hulthén potential. The polar angular wave functions of the central potential and ring-shaped potential and the energy spectrum equations of Hulthén potential turn out to be the special cases of the double ring-shaped Hulthén potential.

Keywords: double ring-shaped Hulthén potential, arbitrary l-wave, approximate analytical solution, bound states

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Db **DOI:** 10.7498/aps.62.200301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11275165), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2010291), and the Professor and Doctor Foundation of Yancheng Teachers University, China (Grant No. 11YSYJB0206).

† Corresponding author. E-mail: falinlu@126.com