

轴向加速运动黏弹性梁受迫振动中的混沌动力学*

丁虎^{1)†} 严巧赞¹⁾ 陈立群¹⁾²⁾

1) (上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

2) (上海大学力学系, 上海 200444)

(2013年5月14日收到; 2013年7月11日收到修改稿)

研究了黏弹性轴向运动梁在外部激励和参数激励共同作用下横向振动的混沌非线性动力学行为. 引入有限支撑刚度, 并考虑黏弹性本构关系取物质导数, 同时计入由梁轴向加速度引起的沿径向变化的轴力, 建立轴向运动黏弹性梁横向非线性振动的偏微分-积分模型. 通过 Galerkin 截断方法研究了外部激励的频率和因速度简谐脉动引起的参数激励的频率在不可通约关系时轴向运动连续体的非线性动力学行为, 并对不同截断阶数的数值预测进行了对比. 基于对控制方程的 Galerkin 截断, 得到离散化的常微分方程组, 使用四阶 Runge-Kutta 方法求解. 基于此数值解, 运用非线性动力学时间序列分析方法, 通过 Poincaré 映射, 观察到轴向运动梁随扰动速度幅值的倍周期分岔现象, 并比较了有/无外部激励对倍周期分岔的影响. 分别在低速以及近临界高速运动状态下, 从相平面图、Poincaré 映射以及频谱分析的角度识别了系统中存在的准周期运动形态.

关键词: 轴向运动梁, 非线性, 混沌, 分岔

PACS: 05.45.-a, 95.10.Fh, 43.40.Ga, 02.30.Oz

DOI: 10.7498/aps.62.200502

1 引言

工程中存在很多沿着自身径向运动的细长结构, 例如: 汽车发动机中转动的皮带、钢厂生产流程中的带钢、飞行中的运载火箭等. 这些细长结构沿着轴向, 即径向的运动引起自身横向的振动. 多数情况下, 这些横向振动是有害的、非预期的. 例如, 高速转动的皮带引起的大幅度振动, 造成皮带的磨损以及大量的噪音污染. 当运行速度较大或者振动幅度较大时, 结构中的几何非线性将成为不可忽略的因素. 对这些结构的横向非线性振动研究一直是非线性动力学研究领域的热点问题^[1-7].

在皮带传送等工程系统的运动结构中, 不可避免地存在参数激励, 例如滑轮扭振导致的皮带轴向运动速度的周期波动. 生产实践和科学实验中都发现, 若参数激励的频率与其两倍无阻尼自治派生系统固有频率的差值满足适当条件时, 皮带将出现大幅度的横向振动. 因此, 确定轴向运动结构的横向

稳定性条件是有重要科学意义和应用价值的问题. 考虑轴向速度的周期脉动, Ravindra 和 Zhu^[8] 通过一阶 Galerkin 截断方法研究了超临界速度下轴向运动梁参数共振的分岔与混沌; Yang 和 Chen^[9] 通过二阶 Galerkin 截断方法轴向运动黏弹性梁的非线性动力学行为; Ding 和 Chen^[10] 通过微分求积直接数值方法研究了轴向运动黏弹性梁的混沌行为; Ghayesh^[11] 通过 Galerkin 截断方法研究了径向与横向耦合的平面非线性振动分岔特性; Yao 等^[12] 结合多时间尺度和 Galerkin 截断方法研究了多脉冲激励下轴向运动带参数激励的非线性动力学行为. 以上的诸多研究使得人们对轴向运动结构参数激励的非线性响应有了一定的认识, 但是依然存在着一些问题. 例如, 以上所有研究都假设运动结构的轴向张力均匀恒定, 这与速度脉动的假设明显不符. Chen 和 Tang^[13,14] 考虑了因速度脉动引发的轴向张力的变化, 他们的研究表明, 变化的张力会影响轴向运动结构的横向振动特性.

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11232009, 10932006)、国家自然科学基金 (批准号: 11372171) 和上海市教育委员会科研创新项目 (批准号: 12YZ028) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dinghu@shu.edu.cn

工程中的轴向运动系统总是受到来自外部环境的周期激励. 例如, 汽车发动机中的传动带总是受到来自行进中车体整体振动的激励. 轴向运动结构的横向受迫振动也是备受关注的问题. Yang 等^[15]研究了多个频率组成的外部激励下的轴向运动梁横向振动响应. Ghayesh^[16]通过 Galerkin 截断探讨了亚临界速度和超临界速度下轴向运动梁横向受迫振动的分岔与混沌. 然而, 外部激励对轴向运动梁参数共振的影响还没有得到应有的重视. Zhang 和 Li^[17]通过静态矩形薄板研究了在参数激励和外部激励共存时的混沌响应, 发现外部激励能够改变原参数激励中特定状态的运动特征.

本文通过不同截断阶数 Galerkin 方法, 研究计入轴向速度周期脉动及其引起的径向张力变化影响的轴向加速黏弹性梁的非线性动力学行为, 并考虑来自外部的简谐激励对轴向运动系统倍周期分岔的影响.

2 控制方程

对于轴向运动结构, 这里采用混合的 Eulerian-Lagrangian 描述, 即假设细长运动结构的横截面在弯曲振动过程中始终保持为平面. 由于研究对象为非保守系统, 通过广义哈密顿原理, 可以得到如下无量纲控制方程^[14]:

$$\begin{aligned} & u_{,tt} + 2\gamma u_{,xt} + [(1-\eta)\dot{\gamma}^2 - (x-1)\dot{\gamma} - 1]u_{,xx} \\ & + k_f^2 u_{,xxxx} + \alpha(u_{,xxxx} + \gamma u_{,xxxx}) \\ & = \frac{1}{2}k_1^2 u_{,xx} \int_0^1 u_{,x}^2 dx \\ & + \frac{\alpha k_1^2}{k_f^2} u_{,xx} \int_0^1 (u_{,x} u_{,xt} + \gamma u_{,x} u_{,xx}) dx \\ & + b \cos(\omega_f t), \\ & \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \cos(\omega_p t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $u(x, t)$ 为运动梁在轴向坐标 x 处和 t 时刻的横向位移; 无量纲参数 γ , γ_0 和 γ_1 分别代表轴向运动的速度、平均速度和扰动速度的振幅; 无量纲参数 ω_f 和 ω_p 分别为外部简谐激励的频率和简谐扰动速度的频率; 无量纲参数 k_f^2 和 α 分别代表梁的弯曲刚度和动态结构阻尼; 无量纲参数 k_1 和 b 分别代表梁的几何非线性和外部激励的振幅值, 而 k_1 称为非线性系数; η 为支撑刚度参数, 其变化范围为 0 到 1, 即当 $\eta = 0$ 时, 支撑为完全刚性支撑, 当 $\eta = 1$ 时, 支撑为完全柔性支撑. 另外, 下标中的逗号“,”

表示对其后面的变量取偏微分. 本文中假设轴向变速运动黏弹性梁的两端为简支边界, 根据广义哈密顿原理和边界条件的变分可以得到如下所示的无量纲形式^[15]:

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{,xx}(0, t) = u_{,xx}(1, t) = 0. \quad (2)$$

3 Galerkin 截断

对于轴向变速运动黏弹性梁的控制方程 (1) 式, 本文采用 Galerkin 截断方法对其时间和空间解耦. 取试函数为静态线弹性梁的模态函数, 即假设梁的无量纲横向振动位移 $u(x, t)$ 能够展开为如下级数形式^[5]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) \sin(n\pi x), \quad (3)$$

式中 $q_n(t)$ 为一组梁的广义位移函数. 实际应用中, 针对所处理问题的不同需求, 保留上式中的前有限项. 在本文中, 分别取上式的前两项和前四项, 即为 2 阶和 4 阶 Galerkin 截断, 用于确定横向位移值 $u(x, t)$, 并将其代入 (1) 式, 若仅取前两项, 得到下式:

$$\begin{aligned} & \left\{ \ddot{q}_1 - \pi^2 q_1 [(1-\eta)\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma} - 1] + k_f^2 \pi^4 q_1 + \alpha \pi^4 \dot{q}_1 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} k_1^2 \pi^4 q_1 (q_1^2 + 4q_2^2) + \pi^2 q_1 \dot{\gamma} x \right\} \sin(\pi x) \\ & + \left\{ \ddot{q}_2 - 4\pi^2 q_2 [(1-\eta)\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma} - 1] + 16k_f^2 \pi^4 q_2 \right. \\ & \left. + 16\alpha \pi^4 \dot{q}_2 + k_1^2 \pi^4 q_2 (q_1^2 + 4q_2^2) + 4\pi^2 q_2 \dot{\gamma} x \right\} \\ & \times \sin(2\pi x) + (2\pi \gamma \dot{q}_1 + \gamma \alpha \pi^5 q_1) \cos(\pi x) \\ & + (4\pi \gamma \dot{q}_2 + 32\gamma \alpha \pi^5 q_2) \cos(2\pi x) \\ & + \frac{\alpha k_1^2 \pi^4}{k_f^2} \left[\frac{1}{2} (q_1 \dot{q}_1 + 4q_2 \dot{q}_2) - 4\gamma q_1 q_2 \right] \\ & \times [q_1 \sin(\pi x) + q_2 \sin(2\pi x)] - b \cos(\omega_f t) \\ & = 0, \\ & \dot{\gamma} = -\omega_p \gamma_1 \sin(\omega_p t). \end{aligned} \quad (4)$$

在上式的等号两端同乘以权函数 (本文中, 同样取为静态线弹性梁的模态函数), 并按位移在区间 $[0, 1]$ 内积分. 当仅取前两项时, 得到如下的一组数量为两个的二阶常微分方程组:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_1 - \frac{4b \cos(\omega_f t)}{\pi} - \frac{64}{9} \dot{\gamma} q_2 - \frac{16}{3} \gamma \dot{q}_2 \\ & + \pi^2 q_1 \left[1 - \frac{1}{2} \dot{\gamma} - (1-\eta)\dot{\gamma}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + k_1^2 \pi^4 q_1 \left(\frac{1}{4} q_1^2 + q_2^2 \right) \\
 & + \pi^4 \left(k_f^2 q_1 + \alpha \dot{q}_1 - \frac{128}{3} \alpha \gamma q_2 \right) \\
 & + \frac{\alpha k_1^2 \pi^4 q_1}{k_f^2} \left[\frac{1}{2} (q_1 \dot{q}_1 + 4q_2 \dot{q}_2) - 4\gamma q_1 q_2 \right] \\
 & = 0, \\
 \ddot{q}_2 - \frac{16}{9} \dot{\gamma} q_1 + \frac{16}{3} \gamma \dot{q}_1 + 2\pi^2 q_2 [2 - \dot{\gamma} - 2(1 - \eta) \gamma^2] \\
 & + k_1^2 \pi^4 q_2 (q_1^2 + 4q_2^2) \\
 & + \pi^4 \left(16k_f^2 q_2 + 16\alpha \dot{q}_2 + \frac{8}{3} \alpha \gamma q_1 \right) \\
 & + \frac{\alpha k_1^2 \pi^4 q_2}{k_f^2} [2(q_1 \dot{q}_1 + 4q_2 \dot{q}_2) - 16\gamma q_1 q_2] \\
 & = 0, \\
 \dot{\gamma} = -\omega_p \gamma \sin(\omega_p t). \tag{5}
 \end{aligned}$$

仅取前四项时, 得到数量为四个的二阶常微分方程组:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 - \frac{4}{\pi} b \cos(\omega_p t) - \frac{64}{9} \dot{\gamma} q_2 - \frac{16}{3} \gamma \dot{q}_2 - \frac{512}{225} \dot{\gamma} q_4 \\
 - \frac{32}{15} \gamma \dot{q}_4 + \pi^2 q_1 \left[1 - \frac{1}{2} \dot{\gamma} - (1 - \eta) \gamma^2 \right] \\
 + k_1^2 \pi^4 q_1 \left(\frac{1}{4} q_1^2 + q_2^2 + \frac{9}{4} q_3^2 + 4q_4^2 \right) \\
 + \pi^4 \left(k_f^2 q_1 - \frac{128}{3} \alpha \gamma q_2 - \frac{4096}{15} \alpha \gamma q_4 + \alpha \dot{q}_1 \right) \\
 + \frac{\alpha k_1^2 \pi^4 q_1}{k_f^2} \left[\frac{1}{2} (q_1 \dot{q}_1 + 4q_2 \dot{q}_2 + 9q_3 \dot{q}_3 + 16q_4 \dot{q}_4) \right. \\
 \left. - 4\gamma (q_1 q_2 + 2q_1 q_4 + 3q_2 q_3 + 6q_3 q_4) \right] \\
 = 0, \\
 \ddot{q}_2 - \frac{16}{9} \dot{\gamma} q_1 + \frac{16}{3} \gamma \dot{q}_1 - \frac{432}{25} \dot{\gamma} q_3 \\
 - \frac{48}{5} \gamma \dot{q}_3 + 2\pi^2 q_2 [2 - \dot{\gamma} - 2(1 - \eta) \gamma^2] \\
 + k_1^2 \pi^4 q_2 (q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2 + 16q_4^2) \\
 + \pi^4 \left(16k_f^2 q_2 + \frac{8}{3} \alpha \gamma q_1 - \frac{1944}{5} \alpha \gamma q_3 + 16\alpha \dot{q}_2 \right) \\
 + \frac{\alpha k_1^2 \pi^4 q_2}{k_f^2} [2(q_1 \dot{q}_1 + 4q_2 \dot{q}_2 + 9q_3 \dot{q}_3 + 16q_4 \dot{q}_4) \\
 - 16\gamma (q_1 q_2 + 2q_1 q_4 + 3q_2 q_3 + 6q_3 q_4)] \\
 = 0, \\
 \ddot{q}_3 - \frac{4}{3\pi} b \cos(\omega_p t) - \frac{192}{25} \dot{\gamma} q_2 + \frac{48}{5} \gamma \dot{q}_2 - \frac{1536}{49} \dot{\gamma} q_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{96}{7} \gamma \dot{q}_4 + 9\pi^2 q_3 \left[1 - \frac{1}{2} \dot{\gamma} - (1 - \eta) \gamma^2 \right] \\
 + 9k_1^2 \pi^4 q_3 \left(\frac{1}{4} q_1^2 + q_2^2 + \frac{9}{4} q_3^2 + 4q_4^2 \right) \\
 + \pi^4 \left(81k_f^2 q_3 + \frac{384}{5} \alpha \gamma q_2 - \frac{12288}{7} \alpha \gamma q_4 + 81\alpha \dot{q}_3 \right) \\
 + \frac{9\alpha k_1^2 \pi^4 q_3}{k_f^2} \left[\frac{1}{2} (q_1 \dot{q}_1 + 4q_2 \dot{q}_2 + 9q_3 \dot{q}_3 + 16q_4 \dot{q}_4) \right. \\
 \left. - 4\gamma (q_1 q_2 + 2q_1 q_4 + 3q_2 q_3 + 6q_3 q_4) \right] \\
 = 0, \\
 \ddot{q}_4 - \frac{32}{225} \dot{\gamma} q_1 + \frac{32}{15} \gamma \dot{q}_1 - \frac{864}{49} \dot{\gamma} q_3 \\
 + \frac{96}{7} \gamma \dot{q}_3 + 8\pi^2 q_4 [2 - \dot{\gamma} - 2(1 - \eta) \gamma^2] \\
 + 4k_1^2 \pi^4 q_4 (q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2 + 16q_4^2) \\
 + \pi^4 \left(256k_f^2 q_4 + \frac{16}{15} \alpha \gamma q_1 + \frac{3888}{7} \alpha \gamma q_3 + 256\alpha \dot{q}_4 \right) \\
 + \frac{\alpha k_1^2 \pi^4 q_4}{k_f^2} [8(q_1 \dot{q}_1 + 4q_2 \dot{q}_2 + 9q_3 \dot{q}_3 + 16q_4 \dot{q}_4) \\
 - 64\gamma (q_1 q_2 + 2q_1 q_4 + 3q_2 q_3 + 6q_3 q_4)] \\
 = 0, \\
 \dot{\gamma} = -\omega_p \gamma \sin(\omega_p t). \tag{6}
 \end{aligned}$$

对于一组给定的参数值 $k_f, k_1, \gamma_0, \gamma_1, \eta, \alpha, \omega_f$ 和 ω_p 以及初始条件, $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ 和 $q_4(t)$ 能够通过四阶 Runge-Kutta 方法离散无量纲时间变量, 最终实现对轴向运动黏弹性梁横向非线性振动的数值仿真. 将 $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ 和 $q_4(t)$ 的数值解结合相应的模态函数代入 (3) 式, 即可实现运动梁横向振动位移 $u(x, t)$ 的数值求解.

4 数值仿真

本文的数值仿真计算中, 以钢材料的梁为例^[14], 即取无量纲的非线性系数 $k_1 = 277.13$, 刚度 $k_f = 0.8$, 黏性阻尼 $\alpha = 0.001$, 轴向支撑刚度 $\eta = 0.5$, 平均速度 $\gamma_0 = 3.7$, 外部激励振幅 $b = 0.01$. 无量纲扰动速度的周期 $T = 2\pi/\omega_p$. 在四阶 Runge-Kutta 方法的数值计算中, 时间步长取为 $T/100$.

图 1 和图 2 分别给出了计入以及不计入来自系统外部的简谐激励时, 轴向加速梁横向非线性振动随着无量纲化的扰动速度幅值变化的倍周期分岔图. 图中, 参数激励的频率取为对应于方程 (1) 的无阻尼自治派生系统的第一阶固有频率的二倍, 即

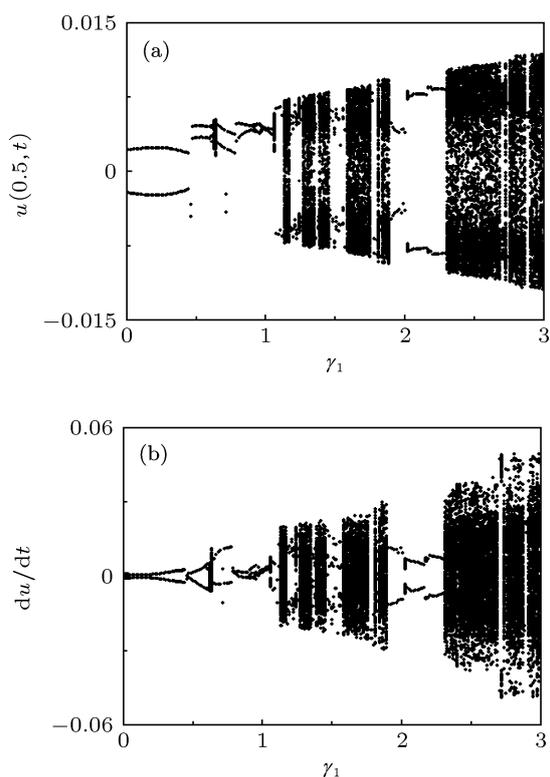


图 1 2 阶截断仿真沿无量纲扰动速度的倍周期分岔图 (计入受迫共振) (a) 位移分岔图; (b) 速度分岔图

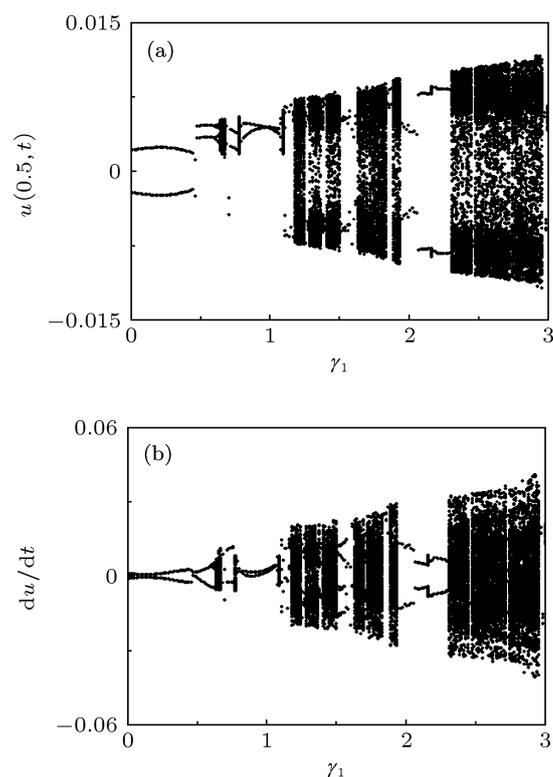


图 3 4 阶截断仿真沿无量纲扰动速度的倍周期分岔图 (计入受迫共振) (a) 位移分岔图; (b) 速度分岔图

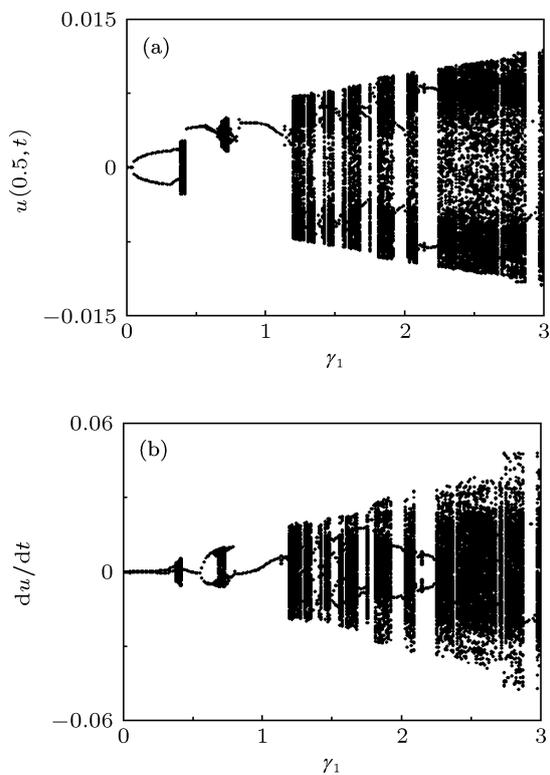


图 2 2 阶截断仿真沿无量纲扰动速度的倍周期分岔图 (不计受迫共振) (a) 位移分岔图; (b) 速度分岔图

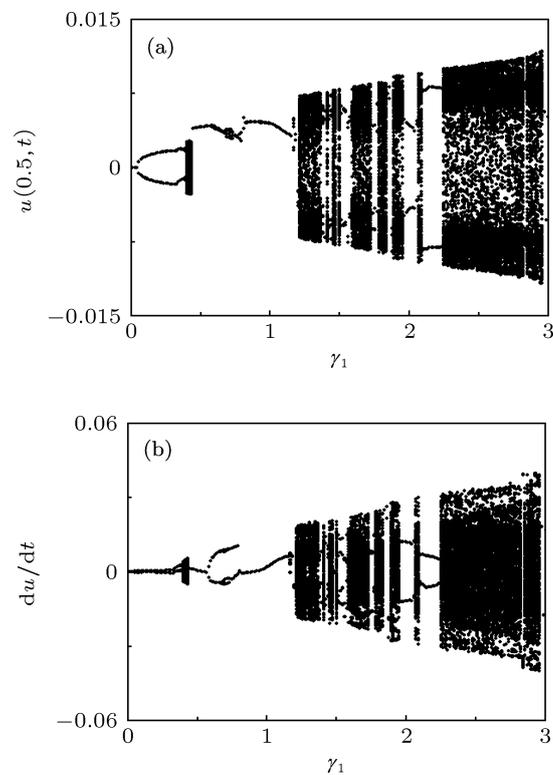


图 4 4 阶截断仿真沿无量纲扰动速度的倍周期分岔图 (不计受迫共振) (a) 位移分岔图; (b) 速度分岔图

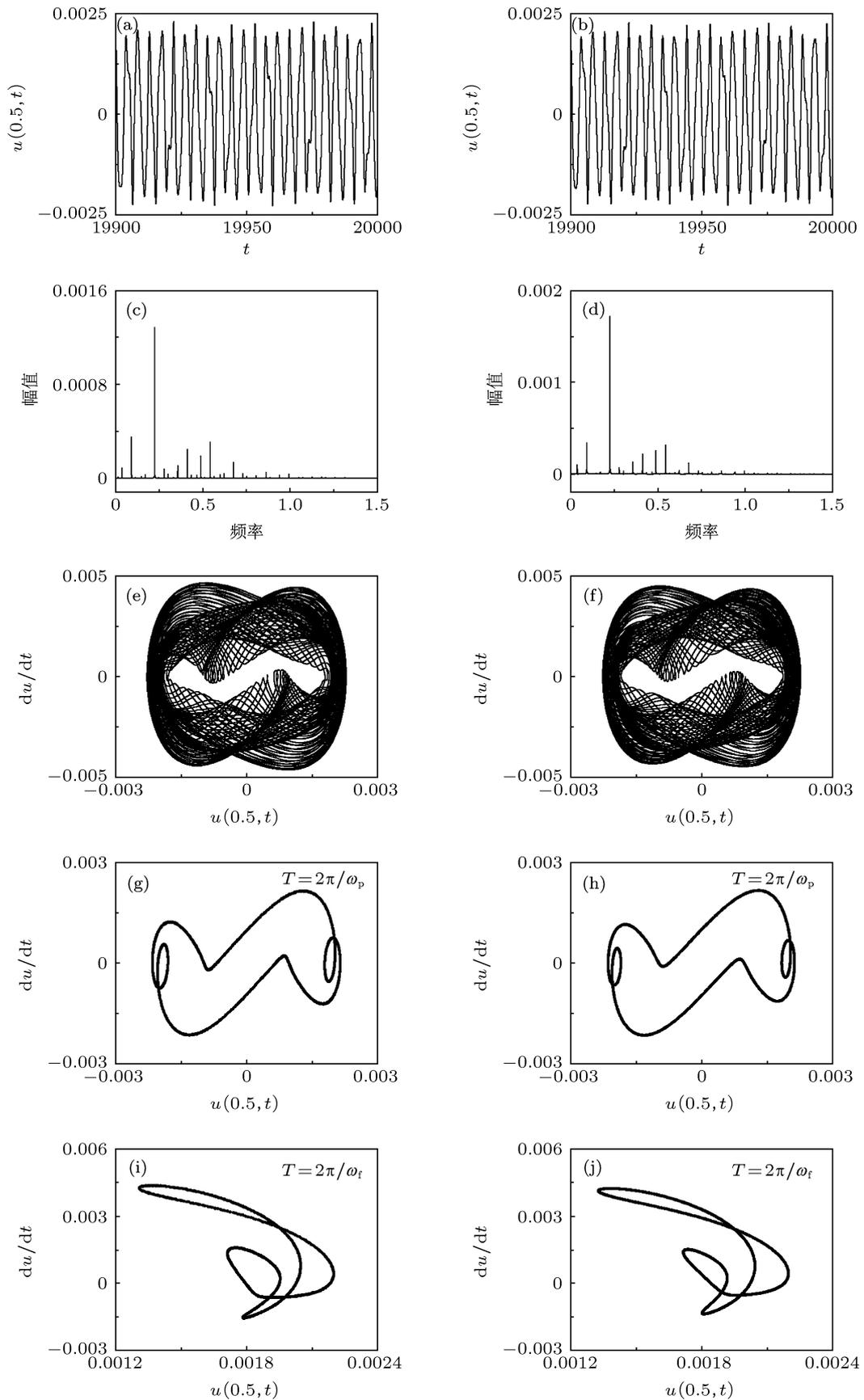


图5 两种激励频率在不可通约关系下的轴向运动梁非线性动力学 (a) 时间历程, 2 阶截断; (b) 为 (a) 的频谱图, 4 阶截断; (c) 为 (a) 的频谱图, 2 阶截断; (d) 为 (b) 的频谱图, 4 阶截断; (e) 相图, 2 阶截断; (f) 相图, 4 阶截断; (g) 依据参数共振频率的 Poincaré 截面, 2 阶截断; (h) 依据参数共振频率的 Poincaré 截面, 4 阶截断; (i) 依据受迫共振频率的 Poincaré 截面, 2 阶截断; (j) 依据受迫共振频率的 Poincaré 截面, 4 阶截断

$\omega_p = 2\omega_1 = 3.5054^{[14]}$. 另外, 图 1 中的外部激励的频率取为 (1) 式的无阻尼自治派生系统第一阶固有频率, 即 $\omega_f = \omega_1 = 1.7527$. 无量纲扰动速度幅值 γ_1 的变化步长取为 0.015. 仿真的无量纲时间总长度取为 $5000T$, 为了消除暂态的影响, 仅保留最后的 $200T$. 对照图 1 和图 2 可以清楚地发现, 尽管有无外部激励时, 运动梁随着扰动速度的幅值增大都间歇性出现混沌, 但是具体到某个扰动速度幅值时, 却有着很大的差别, 即具体的倍周期分岔点受到受迫共振的影响很明显.

图 3 和图 4 分别给出了对应于图 1 和图 2 算例的 4 阶 Galerkin 截断方法的数值仿真. 对比图 3 和图 1 以及图 4 和图 2, 可以清楚地发现, 尽管 2 阶和 4 阶 Galerkin 截断仿真都预测出轴向运动黏弹性梁在双频激励下的倍周期分岔形态, 但是对具体运动状态下形态的预测却有着明显的不同. 因此, 这里的数值结果表明, 不同截断的阶数对轴向运动梁周期运动或者混沌运动的预测有着显著影响. 另外, 对比图 3 和图 4, 同样也说明了外激励的受迫共振对运动梁的横向振动形态有着显著影响.

图 5 展示了参数激励频率和外部激励频率为不可通约关系时的非线性动力学特性, 同时对比了 2 阶 Galerkin 截断和 4 阶 Galerkin 截断的仿真预测. 图 5 中的无量纲速度 $\gamma_1 = 0.1$, 无量纲的参数激励频率和外部激励频率分别取为 $\omega_p = 2$ 和 $\omega_f = 2^{0.5}$, 其他参数的取值与图 1—4 的取值相同. 仿真的无量纲时间长度为 $20000T$. 图 5(a) 和 (b) 分别给出了 2 阶和 4 阶 Galerkin 截断仿真的运动梁中点的时间响应历程的数值解. 图 5(c) 和 (d) 分别给出了图 5(a) 和 (b) 的频谱分析. 经观察可以发现, 图 5(a) 和 (b) 中的时间历程均包含有限个频率, 因此, 此时

的加速梁的横向振动并不为混沌运动^[18]. 图 5(e) 和 (f) 分别给出了 2 阶和 4 阶截断仿真的加速运动梁中点随时间响应的相图. 由图 5(e) 和 (f) 均可以看出, 此时梁的横向振动并不是简单的倍周期运动^[19,20]. 图 5(g) 和 (h) 分别给出了通过 2 阶 Galerkin 截断仿真得到的依据参数共振频率和依据受迫振动频率取得的 Poincaré 映射图. 对比图 5(g) 和 (h) 可以发现, 尽管两图所展现的 Poincaré 映射的形状完全不同, 但是图中的 Poincaré 映射都是有闭合的曲线. 图 5(i) 和 (j) 给出的 4 阶截断结果也说明同样的问题. 再结合图 5(a)—(f), 说明此时运动梁的横向非线性振动为准周期运动^[21,22], 这与文献^[23]中的微分求积法直接数值仿真的结论一致. 同时, 图 5 也说明不同截断阶数的仿真结果在满足不可通约关系时的双频激励定性预测上具有一致性.

5 结论

本文通过基于假设模态的 Galerkin 截断方法, 研究了计入外部激励时轴向加速运动黏弹性梁横向参数振动的非线性动力学行为, 并对比了不同截断阶数对数值仿真结果的影响. 研究发现, 来自系统外部激励引发的受迫共振, 会引起轴向加速运动梁横向非线性振动形态的转变. 另外, 不同阶数的 Galerkin 截断仿真也可能影响特定运动状态下加速梁横向振动的形态. 通过考察参数激励频率和外部激励频率在不可通约关系时运动梁的横向振动形态, 发现当两频率满足不可通约关系时, 加速梁的横向振动为典型的准周期运动, 而且不同的 Galerkin 截断阶数对准周期的定性预测具有一致性.

[1] Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3845 (in Chinese) [薛纭, 刘延柱, 陈立群 2006 物理学报 **55** 3845]
 [2] Shen H J, Wen J H, Yu D L, Wen X S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8357 (in Chinese) [沈惠杰, 温激鸿, 郁殿龙, 温熙森 2009 物理学报 **58** 8357]
 [3] Wang L H, Hu Z D, Zhong Z, Ju J W 2009 *Acta Mech.* **206** 149
 [4] Li Y H, Lü H W, Li Z H, Li L 2012 *J. Chongqing Univ. Technol. (Natural Science)* **26** 16 (in Chinese) [李映辉, 吕海炜, 李中华, 李亮 2012 重庆理工大学学报(自然科学) **26** 16]
 [5] Chen S H, Huang J L, Sze K Y 2007 *J. Sound Vib.* **306** 1
 [6] Liu D, Xu W, Xu Y 2012 *J. Sound Vib.* **331** 4045
 [7] Li Q H, Yan Y L, Wei L M, Qin Z Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120505 (in Chinese) [李群宏, 闫玉龙, 韦丽梅, 秦志英 2013 物理学报 **62** 120505]

[8] Ravindra B, Zhu W D 1998 *Arch. Appl. Mech.* **68** 195
 [9] Yang X D, Chen L Q 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 249
 [10] Ding H, Chen L Q 2009 *Acta Mech. Solid. Sin.* **22** 267
 [11] Ghayesh M H 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5107
 [12] Yao M H, Zhang W, Zu J W 2012 *J. Sound Vib.* **331** 2624
 [13] Chen L Q, Tang Y Q 2011 *J. Sound Vib.* **330** 5598
 [14] Chen L Q, Tang Y Q 2012 *ASME J. Vib. Acoust.* **13** 011008
 [15] Yang T Z, Fang B, Chen Y, Zhen Y X 2009 *Int. J. Non-Lin. Mech.* **44** 230
 [16] Ghayesh M H, Kafiabad H A, Reid T 2012 *Int. J. Solids Struct.* **49** 227
 [17] Zhang W, Li S B 2010 *Nonlinear Dynam.* **62** 673
 [18] Gholizadeh H, Hassannia A, Azarfar A 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010503

[19] Pan W Z, Song X J, Yu J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030203

[20] Chen L Q, Liu Y Z 1996 *Physics* **25** 278 (in Chinese) [陈立群, 刘延柱 1996 物理 **25** 278]

[21] Chai Y, Lü L, Chen L Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030506

[22] Zhao D M, Zhang Q C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030518

[23] Ding H, Zu W J 2013 *Int. J. Appl. Mech.* **5** 1350019

Chaotic dynamics in the forced nonlinear vibration of an axially accelerating viscoelastic beam*

Ding Hu^{1)†} Yan Qiao-Yun¹⁾ Chen Li-Qun¹⁾²⁾

1) (Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

2) (Department of Mechanical, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

(Received 14 May 2013; revised manuscript received 11 July 2013)

Abstract

In this paper, the chaotic behaviour in the transverse vibration of an axially moving viscoelastic tensioned beam under the external harmonic excitation is studied. The parametric excitation comes from harmonic fluctuations of the moving speed. A nonlinear integro-partial-differential governing equation is established to include the material derivative in the viscoelastic constitution relation and the finite axial support rigidity. Moreover, the longitudinally varying tension due to the axial acceleration is also considered. The nonlinear dynamics of axially moving beam is investigated under incommensurable relationships between the forcing frequency and the parametric frequency. Based on the Galerkin truncation and the Runge-Kutta time discretization, the numerical solutions of the nonlinear governing equation are obtained. The time history of the center of the axially moving viscoelastic beam is chosen to represent the motion of the beam. Based on the time history of the axially moving beam, the Poincaré map is constructed by sampling the displacement and the velocity of the center. The bifurcation diagram of the axially moving beam is used to show the influence of the external excitation. Furthermore, quasi-periodic motions are identified using different methods including the Poincaré map, the phase-plane portrait, and the fast Fourier transforms.

Keywords: axially moving beam, nonlinearity, chaotic, bifurcation

PACS: 05.45.-a, 95.10.Fh, 43.40.Ga, 02.30.Oz

DOI: 10.7498/aps.62.200502

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11232009, 10932006), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11372171), and the Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission, China (Grant No. 12YZ028).

† Corresponding author. E-mail: dinghu@shu.edu.cn