

## 非线性发展方程的 Wronskian 解及 Young 图证明\*

成建军<sup>†</sup> 张鸿庆

(大连理工大学数学科学学院, 大连 116024)

(2012年11月21日收到; 2013年7月10日收到修改稿)

给出一般非线性发展方程构造 Wronskian 解的间接法. 根据 Young 图运算的性质给出了文中命题的证明, 并讨论了置换群特征标与 Young 图表达式系数间的关系.

**关键词:** 非线性发展方程, Wronskian 解, Young 图, 特征标

**PACS:** 05.45.Yv, 02.30.Ik, 02.30.Jr

**DOI:** 10.7498/aps.62.200504

## 1 引言

自然科学领域很多问题的数学模型最终可归结为非线性发展方程(组)来描述. 由于这类方程的解析解对于洞察这些问题的物理本质具有重要的意义, 因此构造非线性发展方程的精确解一直是物理学和数学工作者的重点课题. 现在已经提出了很多方法如反散射方法<sup>[1]</sup>、Bäcklund 变换方法<sup>[2,3]</sup>和 Darboux 变换方法<sup>[4]</sup>、Hirota 双线性法<sup>[5]</sup>、Wronskian 解法<sup>[6,7]</sup>、代数方法<sup>[8]</sup>等. Wronskian 解方法作为一种有效的求解方法之一, 广泛应用于双线性方程, 然而并不是所有的方程都能化为双线性方程, 那么如何在方程不能化为双线性方程下或不能完全化为双线性方程下求方程的 Wronskian 解是一个值得探索的问题. 另一方面即便方程能够化为双线性形式, 寻找双线性方程满足 Wronskian 解的微分线性条件仍没有统一的方法. 为此本文提出求解非线性发展方程 Wronskian 解的间接法, 根据 Wronskian 行列式求导运算的特性提出了 Young 图证明, 最后对本文的内容进行了有益的讨论.

## 2 基于双线性方程的一般方法

**定义** 对于给定的双线性方程

$$P(D_1, D_2, D_3, D_4, \dots) \tau \tau = 0,$$

若

$$\tau = \begin{vmatrix} \phi_1^{(0)} & \phi_1^{(1)} & \cdots & \phi_1^{(N-1)} \\ \phi_2^{(0)} & \phi_2^{(1)} & \cdots & \phi_2^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N^{(0)} & \phi_N^{(1)} & \cdots & \phi_N^{(N-1)} \end{vmatrix},$$

其中

$$\phi_i^{(j)} = \frac{\partial^j \phi_i}{\partial x^j} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, N-1),$$

简记为  $\tau = \widehat{[N-1]}$ , 则称该方程具有  $\tau = \widehat{[N-1]}$  形式的 Wronskian 行列式解.

在这里  $D$  算子是著名的 Hirota 双线性算子

$$D_x^m D_y^n f \cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_y - \partial_{y'})^n \times f(x, y) \cdot g(x', y')|_{x=x', y=y'}.$$

从方程角度, 要想得到方程的 Wronskian 解首先需要将方程化为定义中的双线性  $D$  算子形式, 然后在双线性方程的基础上给出 Wronskian 解存在的微分线性条件, 最后根据微分线性条件给出方程的 Wronskian 解. 这种方法的求解主要步骤如下:

**步骤 1** 对给定的以  $u$  为变量的非线性发展方程, 这里以含三个自变量  $x, y, t$  方程为例, 给定部分自变量的微分线性条件以使方程在  $R\ln\Lambda(\tau)$ ,  $\Lambda = (x, y, t)$  下将方程化双线性方程  $D$  算子形式;

\* 国家自然科学基金(批准号: 51109031, 51379033, 11201048)、教育部博士点基金(批准号: 20100041120037)、中央高校基本科研业务费(批准号: DUT12LK34, DUT12LK52)和国家重点基础研究发展计划(批准号: 2013CB036101, 2010CB32700)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: chengjianjun0355@163.com

**步骤 2** 将得到的双线性方程  $D$  算子形式与已有的 Kaolomtsev-Petviashvili (KP) 方程族, Korteweg-de Vries (KdV) 方程族等已有 Wronskian 解的方程作对比, 确定剩下的微分线性条件;

**步骤 3** 根据步骤 2 得到的微分线性条件求出方程的 Wronskian 解.

下面以广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (GCBS) 方程与 Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) 方程为例具体说明.

### 2.1 GCBS 方程 [9]

$$\alpha u_{xt} + \beta u_x u_{xy} + \delta u_y u_{xx} + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

(i)  $\alpha = 4, \beta = 4, \delta = 2$  为 Bogoyavlenskii-Schiff 方程 [10,11];

(ii)  $\alpha = 1, \beta = -4, \delta = -2$  为 Breaking Soliton 方程 [12-15];

(iii)  $\alpha = 4, \beta = 8, \delta = 4$  为 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程 [16,17].

取部分微分线性条件  $\phi_{iy} = \phi_{ix}$ , 在变换  $u = R \ln(\tau)_x$ , 可将 (1) 式化为

$$R(\beta + \delta)(\ln \tau)_{xx}(\ln \tau)_{xxx} + (\ln \tau)_{xxxx} + \alpha(\ln \tau)_{xt} = 0. \quad (2)$$

当  $R(\beta + \delta) = 12$  时 (2) 式可进一步化为

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\alpha \tau_{xt} \tau - \alpha \tau_x \tau_t + \tau_{xxx} \tau - 4 \tau_{xxx} \tau_x + 3 \tau_{xx}^2) / \tau^2] = 0. \quad (3)$$

由此得到

$$\alpha \tau_{xt} \tau - \alpha \tau_x \tau_t + \tau_{xxx} \tau - 4 \tau_{xxx} \tau_x + 3 \tau_{xx}^2 = c \tau^2, \quad (4)$$

其中  $c$  为积分常数.  $c = 0$  时, 方程 (4) 可用  $D$  算子表示为

$$(\alpha D_x D_t + D_x^4) \tau \tau = 0, \quad (5)$$

由于 (5) 式为 KdV 方程的  $D$  算子形式, 故而原方程的 Wronskian 解微分线性条件为如下定理.

**定理 1** 让函数集合  $\phi_i(x, y, t), 1 \leq i \leq N$  满足以下的微分线性条件:

$$\phi_{iy} = \phi_{ix}, \phi_{it} = -\frac{4}{\alpha} \phi_{ixx}, \phi_{ixx} = \frac{k_i^2}{4} \phi_i, \quad (6)$$

方程 (1) 具有  $\tau = \widehat{|N-1|}$  形式的 Wronskian 解.

### 2.2 Boiti-Leon-Manna-Pempinelli 方程 [7,8]

$$u_{yt} + u_{xxx} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy} = 0. \quad (7)$$

在变量变换  $x = -x_1, t = -\frac{1}{2}t_1$  下 (这里仍用  $x, t$  表示  $x_1, t_1$ ) 变为

$$u_{xxx} + 3u_{xx}u_y + 3u_xu_{xy} + 2u_{yt} = 0. \quad (8)$$

方程 (8) 在变换  $u = 2(\ln \tau)_x$  下化为

$$(D_x^3 D_y + 2D_y D_t) \tau \tau = 0. \quad (9)$$

**定理 2** 让函数集合  $\phi_i(x, y, t), 1 \leq i \leq N$  满足以下的微分线性条件:

$$\phi_{iy} = \phi_{ix}, \phi_{it} = \phi_{ixx}, \phi_{ixxx} = c \phi_i, \quad (10)$$

方程 (9) 具有  $\tau = \widehat{|N-1|}$  形式的 Wronskian 解.

在微分线性条件 (6) 和 (10) 式的基础上就可求得 GCBS 方程与 BLMP 方程的 Wronskian 解.

### 3 Young 图证明

Young 图作为群表示论的重要工具在群表示论中占有重要地位, 下面借助于 Young 图证明上面有关命题. 根据 Wronskian 行列式求导的特性, 将 Wronskian 行列式转化为 Maya 图如下:

$$\overline{\cdots \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ \cdots},$$

根据 Maya 图与 Young 图之间的转化关系从而该 Maya 图对应的为  $\emptyset$ , 这样可以设  $\tau = \widehat{|N-1|} = \emptyset$ . 由于对 Wronskian 行列式求导运算相当于 Maya 图中黑点的“跳格”, 其 Maya 图跳 1 格, 2 格, 3 格, 4 格  $\cdots, n$  格, 得到的 Young 图表达式为

$$\begin{aligned} (\emptyset)_1 &= \square, \\ (\emptyset)_2 &= -\square + \square\square, \\ (\emptyset)_3 &= \square\square - \square\square\square + \square\square\square\square, \\ (\emptyset)_4 &= -\square\square\square + \square\square\square\square - \square\square\square\square\square + \square\square\square\square\square\square, \\ &\vdots \\ (\emptyset)_n &= (-1)^{n-1} \cdot n \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} + (-1)^{n-2} \cdot n-1 \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} + \cdots \\ &\quad + (-1)^k \cdot k+1 \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} + \cdots + (-1)^0 \underbrace{\square \cdots \square}_n. \end{aligned}$$

由上面 Young 图表达式是从无到有, 即从最原始的 Wronskian 行列式对应的  $\emptyset$  得到的, 故而可知对  $x$  求导相当于增加  $\square$ , 对  $y$  求导相当于增加  $-\square, \square\square$ , 对  $t$  求导相当于增加  $\square\square\square, -\square\square\square, \square\square\square\square$ , 对  $x_4$  求导相当

于增加  $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \vdots \end{matrix}$ ,  $\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$ ,  $\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$ ,  $\dots$ , 对  $x_n$  求导相当于增加

$$(-1)^{n-1} \cdot n \left\{ \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \vdots \end{matrix} \right\}, (-1)^{n-2} \cdot n-1 \left\{ \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \vdots & \vdots \end{matrix} \right\}, \dots, (-1)^k \cdot k+1 \left\{ \begin{matrix} \square & \square & \square & \dots & \square \\ \square & \square & \square & \dots & \square \\ \square & \square & \square & \dots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{matrix} \right\}, \dots, (-1)^0 \underbrace{\begin{matrix} \square & \square & \dots & \square \\ \square & \square & \dots & \square \\ \square & \square & \dots & \square \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{matrix}}_n.$$

基于上述 Young 图运算性质进行下面命题的证明.

**引理 1** 四阶 Plücker 关系  $(0, 1) \times (2, 3) - (0, 2) \times (1, 3) + (0, 3) \times (1, 2) = 0$ ,

$$\emptyset \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} = 0.$$

**引理 2** 五阶 Plücker 关系  $(0, 1) \times (2, 4) - (0, 2) \times (1, 4) + (0, 4) \times (1, 2) = 0$ ,

$$\emptyset \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \square \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \square \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} = 0.$$

**引理 3** 五阶 Plücker 关系 Young 图表达式的共轭

$$\emptyset \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} \times \square = 0$$

成立.

这里 Young 图共轭是指:



**引理 3 证明** 引理 1 左右两边对  $x$  求导得,

$$\begin{aligned} & (\emptyset \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix})_x = 0, \\ & (\emptyset)_x \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \emptyset \times (\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix})_x - (\square)_x \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \square \times (\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix})_x + \\ & (\square)_x \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \square \times (\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix})_x = 0, \\ & \emptyset \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \square \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \square \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \emptyset \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} = 0, \end{aligned}$$

由引理 2, 则引理 3 成立.

**定理 1 的证明** 由于微分线性条件  $\phi_{ixx} = \frac{k_i^2}{4} \phi_i$ , 则 Maya 中黑点跳 2 格保持不动, 则跳两次 2 格所对 Young 图为  $\emptyset$ , 从而得到

$$(\emptyset)_{2,2} = \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + 2 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} = (\emptyset)_2 = \square - \square = 0, \text{ 故 } \emptyset \times (\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + 2 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) = (\square - \square)^2.$$

在 Young 图运算性质及微分线性条件 (6) 式的基础上, 得到如下  $\tau$  的 Young 图表达式:

$$\begin{aligned} \tau &= \emptyset \tau_x = \square \tau_{xx} = \square + \square \tau_{xxx} = \square + 2 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} \tau_{xxxx} = \\ & \square + 3 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + 2 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + 3 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}, \\ \alpha \tau &= -4(\square - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) \alpha \tau_{xt} = -4(\square - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) \\ & (\alpha D_x^3 D_t + D_x^4) \tau \tau \\ &= 2[\alpha \tau_{xt} \tau - \alpha \tau_x \tau_t + \tau_{xxxx} \tau - 4 \tau_{xxx} \tau_x + 3 \tau_{xx}^2] \\ &= 2[\emptyset \times (-3 \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + 3 \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + 6 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + 3 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - 3 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) - 12 \square \times \\ & \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + 3(\square + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix})^2] \\ &= 2[12 \emptyset \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - 12 \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + 12 \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}] = 0. \end{aligned}$$

**定理 2 的证明** 由于微分线性条件  $\phi_{ixxxx} = c \phi_i$ , 则 Maya 中黑点跳 4 格保持不动, 则跳 4 格所对 Young 图为  $\emptyset$ , 从而得到

$$\begin{aligned} \emptyset_4 &= \begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} = \emptyset, \\ \emptyset_{1,4} &= \begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} = (\emptyset_4)_1 = (\emptyset)_1 = \emptyset. \end{aligned}$$

在 Young 图运算性质及微分线性条件 (10) 式的基础上, 得到如下  $\tau$  的 Young 图表达式:

$$\begin{aligned} \tau &= \emptyset \tau_x = \square \tau_{xx} = \square + \square \tau_{xxx} = \square + 2 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}, \\ \tau_y &= \square - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} \tau_{xy} = \square - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_t &= \square - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} \tau_{yt} = \\ & \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} \tau_{xxy} = \\ & \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + 2 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - 2 \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}. \end{aligned}$$

进而由引理 2, 引理 3 得

$$\begin{aligned} & (D_x^3 D_y + 2 D_y D_t) \tau \tau \\ &= 2[(\tau_{xxy} + 2 \tau_{yt}) \tau - 3(\tau_{xy}) \tau_x \\ & \quad - \tau_{xxx} \tau_y - 2 \tau_y \tau_t + 3 \tau_{xx} \tau_{xy}] \\ &= 12(\emptyset \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} - \square \times \begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) - 12(\emptyset \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \square \times \\ & \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} + \square \times \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) \\ & + 6 \square \times (\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) - 6 \square \times (\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix} + \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} - \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}) = 0. \end{aligned}$$

## 4 间接法

从上面求解方程 Wronskian 解的一般方法可以看出, 这样的求法技巧性很强, 不具有一般性, 而且并不是所有的非线性发展方程都能化为双线性方程, 即便能够化为双线性方程对于寻求双线性方程满足 Wronskian 解的微分线性条件仍没有统一的方法. 为此我们从解的角度, 假定原方程的解是由某一具有 Wronskian 形式的解的偏微分方程的解构成的, 这样就避免了方程化为双线性形式与寻求微分线性条件的麻烦. 因此受函数展开法与辅助函数法的启发, 本文引进一种更加有效的求解方法.

间接法求解的主要步骤如下:

**步骤 1** 对给定的以  $u$  为变量的非线性发展方程, 这里以含三个自变量  $x, y, t$  方程为例,

$$P(u, u_t, u_x, u_y, u_{tt}, u_{xt}, u_{yt}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0. \quad (11)$$

寻求如下形式的解

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^m a_i(x, y, t) v^i(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t)), \quad (12)$$

其中  $v$  满足偏微分方程

$$P(v, v_\eta, v_\xi, v_{\eta\eta}, v_{\xi\xi}, v_{\xi\eta}, \dots) = 0, \quad (13)$$

且要求方程 (13) 具有 Wronskian 形式的解;

**步骤 2** 通过平衡 (11) 式的最高阶导数项与非线性项确定 (12) 式中的  $m$ , 具体写出形式解;

**步骤 3** 将 (12) 式代入 (11) 式收集所得关于  $v(\xi, \eta)$  及其各阶导数的系数, 根据方程的恒等性, 这些系数为 0 得到关于  $a_i(x, y, t)$ ,  $\xi(x, y, t)$ ,  $\eta(x, y, t)$  超定微分方程组;

**步骤 4** 基于符号计算软件 Maple12, 应用微分消元法计算步骤 3 得到的超定微分方程组求得  $a_i(x, y, t)$ ,  $\xi(x, y, t)$ ,  $\eta(x, y, t)$ ;

**步骤 5** 利用方程 (13) 已知的 Wronskian 解及步骤 4 得到的  $a_i(x, y, t)$ ,  $\xi(x, y, t)$ ,  $\eta(x, y, t)$  按 (12) 式形式写出就得到了方程 (11) 的广义的 Wronskian 解.

注: 在这里通过间接法得到由 Wronskian 形式解构成的广义的 Wronskian 形式解.

仍以上面基于双线性一般方法中的两个方程为例, 应用间接法求方程广义上的 Wronskian 解. 假设方程 (1) 具有形式解

$$u(x, y, t) = a_0 + a_1 v(\xi, \eta), \quad (14)$$

其中  $\xi = \xi(x, y, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$ ,  $a_0 = a_0(x, y, t)$ ,  $a_1 = a_1(x, y, t)$ , 要求  $v(\xi, \eta)$  满足 KdV 方程, 即

$$v_\eta + 3v_\xi^2 + v_\xi \xi_\xi = 0. \quad (15)$$

将 (14), (15) 式代入方程 (1), 令  $v$  及  $v$  的各项导数的系数为 0, 得到如下的超定微分方程组. 令  $v_\xi = 0$  则为  $v$  的多项式, 令  $v$  的多项式各项的系数为 0, 得

$$\alpha a_{0xt} + \beta a_{0x} a_{0xy} + \delta a_{0y} a_{0xx} + a_{0xxx} = 0,$$

$$\alpha a_{1xt} + \beta a_{0x} a_{1xy} + \beta a_{0xy} a_{1x} + \delta a_{0y} a_{1xt} + \delta a_{0xx} a_{1y} + a_{1xxx} = 0,$$

$$\beta a_{1x} a_{1xy} + \delta a_{1y} a_{1xx} = 0;$$

依次令  $v$  的各项导数的系数为 0, 得

$$\begin{aligned} &\alpha a_{1x} \xi_t + \alpha a_{1t} \xi_x + \alpha a_1 \xi_{xt} + 3a_{1xy} \xi_{xx} + \beta a_{0x} a_{1x} \xi_y \\ &+ \beta a_{0x} a_{1y} \xi_x + \beta a_{0x} a_1 \xi_{xy} + \beta a_{0xy} a_1 \xi_x + 3a_{1xy} \xi_x \\ &+ a_{1y} \xi_{xxx} + 3a_{1x} \xi_{xxy} + a_{1xx} \xi_y + 2\delta a_{0y} a_{1x} \xi_x \\ &+ \delta a_{0y} a_1 \xi_{xx} + \delta a_{0xx} a_1 \xi_y + a_1 \xi_{xxy} + 3a_{1xx} \xi_{xy} = 0, \\ &\beta a_{1x}^2 \xi_y + \beta a_{1x} a_{1y} \xi_x + \beta a_1 a_{1x} \xi_{xy} + \beta a_1 a_{1xy} \xi_x \\ &+ 2\delta a_{1x} a_{1y} \xi_x + \delta a_1 a_{1y} \xi_{xx} + \delta a_1 a_{1xx} \xi_y = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\beta a_{1x} \xi_x \xi_y + \beta a_{1y} \xi_x^2 + \beta a_1 \xi_x \xi_{xy} + 2\delta a_{1x} \xi_x \xi_y \\ &+ \delta a_1 \xi_{xx} \xi_y = 0. \end{aligned}$$

由以上六式, 为使计算简便可取  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = a$ ,  $\xi = cx + f(y)$ ,  $\eta_x = \eta_y = 0$ ,  $a$  为任意常数, 最终得到下式

$$\begin{aligned} &(-6c\alpha\eta_t + \beta c^2 f_y + \delta c^2 f_y) v_\xi v_{\xi\xi} \\ &+ (c^3 f_y - c\alpha\eta_t) v_{\xi\xi} \xi_\xi = 0. \end{aligned}$$

令  $v$  及  $v$  的各项导数的系数为 0, 得

$$\begin{aligned} &-6c\alpha\eta_t + \beta c^2 f_y + \delta c^2 f_y = 0, \\ &c^3 f_y - c\alpha\eta_t = 0, \end{aligned}$$

由这两个式子可以得到  $f(y) = k\alpha \left(\frac{6}{\beta + \delta}\right)^2 y + l$ ,

$\eta = kt + s$ ,  $c = \frac{\beta + \delta}{6}$ ,  $k, s, l$  为任意常数. 这样原方程的解为

$$\begin{aligned} &u(x, y, t) = a + v(\xi, \eta), \\ &\xi = \frac{\beta + \delta}{6} x + f(y), \\ &\eta = kt + s, \end{aligned}$$

$v(\xi, \eta)$  为 KdV 方程的解, 对于原方程的 Wronskian 解只需将 KdV 方程的 Wronskian 解代入形式解中即可得到, 即

$$\begin{aligned} &u(x, y, t) = a + 2\ln(W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N))_\xi, \\ &\phi_i(\xi, \eta) = e^{\frac{\xi_i}{2}} + (-1)^{i+1} e^{-\frac{\xi_i}{2}}, \\ &\xi_i = k_i \xi - k_i^3 \eta + \xi_i^{(0)}, \\ &\xi = \frac{\beta + \delta}{6} x + k\alpha \left(\frac{6}{\beta + \delta}\right)^2 y + l, \\ &\eta = kt + s. \end{aligned}$$

假设方程 (7) 具有形式解

$$u(x, y, t) = a_0 + a_1 v(\xi, \eta), \quad (16)$$

其中  $\xi = \xi(x, y, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$ ,  $a_0 = a_0(x, y, t)$ ,  $a_1 = a_1(x, y, t)$ , 要求  $v(\xi, \eta)$  满足 KdV 方程, 即

$$v_\eta + \lambda v_\xi^2 + \mu v_\xi + v_\xi \xi_\xi = 0. \quad (17)$$

在变换  $\omega = v_\xi + \frac{\mu}{2\lambda}$  下化为

$$\omega_\eta + 2\lambda \omega \omega_\xi + \omega_\xi \xi_\xi = 0.$$

将 (16), (17) 式代入方程 (7), 令  $v$  及  $v$  的各项导数的系数为 0, 得到如下的超定微分方程组. 令  $v_\xi = 0$ , 则  $v$  的多项式各项的系数为 0, 得

$$a_{0yt} - 3a_{0x} a_{0xy} - 3a_{0y} a_{0xx} + a_{0xxx} = 0,$$

$$\begin{aligned} & a_{1yt} - 3a_{0x}a_{1xy} - 3a_{0xy}a_{1x} - 3a_{0y}a_{1xx} \\ & - 3a_{0xx}a_{1y} + a_{1xxy} = 0, \\ & a_{1x}a_{1xy} + a_{1y}a_{1xx} = 0; \end{aligned}$$

接着令  $v$  各阶导数为 0, 得

$$\begin{aligned} & a_{1y}\xi_t + a_{1t}\xi_y + a_1\xi_{yt} - \mu a_{1y}\eta_t + 3a_{1xy}\xi_{xx} - 3a_{0x}a_{1x}\xi_y \\ & - 3a_{0x}a_{1y}\xi_x - 3a_{0x}a_1\xi_{xy} - 3a_{0xy}a_1\xi_x + 3a_{1xxy}\xi_x \\ & + a_{1y}\xi_{xxx} + 3a_{1x}\xi_{xxy} + a_{1xxx}\xi_y - 6a_{0y}a_{1x}\xi_x \\ & - 3a_{0y}a_1\xi_{xx} - 3a_{0xx}a_1\xi_y + a_1\xi_{xxy} + 3a_{1xx}\xi_{xy} = 0, \\ & a_{1x}^2\xi_y + a_{1x}a_{1y}\xi_x + a_1a_{1x}\xi_{xy} + a_1a_{1xy}\xi_x + 2a_{1x}a_{1y}\xi_x \\ & + a_1a_{1y}\xi_{xx} + a_1a_{1xx}\xi_y = 0, \\ & a_1a_{1y}\xi_x^2 + a_1a_{1x}\xi_x\xi_y = 0, \\ & \xi_x^3\xi_y - \xi_y\xi_t = 0, \\ & a_{1y}\xi_x^3 + a_{1y}\eta_t + 3a_{1x}\xi_x^2\xi_y + 3a_1\xi_x^2\xi_{xy} \\ & + 3a_1\xi_x\xi_y\xi_{xx} = 0, \\ & 3a_1^2\xi_x^2\xi_y + 2\lambda a_1\xi_y\eta_t + 3a_1^2\xi_x^2\xi_y = 0, \\ & 3a_1a_{1x}\xi_x\xi_y + 3a_1a_{1y}\xi_x^2 + 3a_1^2\xi_x\xi_{xy} + \lambda a_{1y}\eta_t \\ & + 3a_1^2\xi_y\xi_{xx} + 6a_1a_{1x}\xi_x\xi_y = 0, \\ & 3a_{1xxx}\xi_x\xi_y + 3a_{1y}\xi_x\xi_{xx} + 3a_{1xy}\xi_x^2 + 3a_1\xi_{xy}\xi_{xx} \\ & + 3a_{1x}\xi_y\xi_{xx} + 3a_1\xi_x\xi_{xxy} + 6a_{1x}\xi_x\xi_{xy} + a_1\xi_y\xi_t \\ & + a_1\xi_y\xi_{xxx} - 3a_1a_{0x}\xi_x\xi_y - 3a_1a_{0y}\xi_x^2 + \mu a_1\xi_y\eta_t = 0, \\ & a_{1x}\xi_x\xi_y + a_{1y}\xi_x^2 + a_1\xi_x\xi_{xy} + 2a_{1x}\xi_x\xi_y + a_1\xi_{xx}\xi_y = 0. \end{aligned}$$

取  $a_1 = \xi_x = \eta_t = 1, \xi_t = 0$  约化为下式

$$\begin{aligned} & a_{0xx}\xi_y + a_{0xy} = 0, \\ & a_{0yt} - 3a_{0x}a_{0xy} - 3a_{0y}a_{0xx} + a_{0xxy} = 0, \\ & a_{0x}\xi_y + a_{0y} + \xi_y = 0, \end{aligned}$$

及  $\lambda = -3, \mu = 3$  可以得到  $a_0 = f(y), a_1 = 1, \xi = x - f(y), \eta = t$ . 这样原方程的解为

$$\begin{aligned} & u(x, y, t) = f(y) + v(\xi, \eta), \\ & \xi = x - f(y), \\ & \eta = t, \end{aligned}$$

其中  $v(\xi, \eta)$  为 KdV 方程的解, 对于原方程的 Wronskian 解只需将 KdV 方程的 Wronskian 解代入形式解中即可得到, 即

$$\begin{aligned} & u(x, y, t) = f(y) - 2\ln(W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N))\xi + \frac{1}{2}\xi, \\ & \phi_i(\xi, \eta) = e^{\frac{\xi_i}{2}} + (-1)^{i+1}e^{-\frac{\xi_i}{2}}, \\ & \xi_i = k_i\xi - k_i^3\eta + \xi_i^{(0)}, \\ & \xi = x - f(y), \end{aligned}$$

$$\eta = t.$$

下面给出 Boiti-Leon-Manna-Pempinelli 方程的一阶 Wronskian 行列式解:

$$\begin{aligned} & u(x, y, t) \\ & = \frac{1}{2}f(y) - k_1 \tanh\left(\frac{k_1x - k_1f(y) - k_1^3t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2}x, \end{aligned}$$

$k_1, \xi_1^{(0)}$  取定时, 其  $t = 0$  时的图像由  $f(y)$  决定, 这里取  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0$ , 则  $x$  轴方向的图形形状是固定的. 取  $f(y) = 0$  时  $x$  轴方向的图像如图 1 所示.

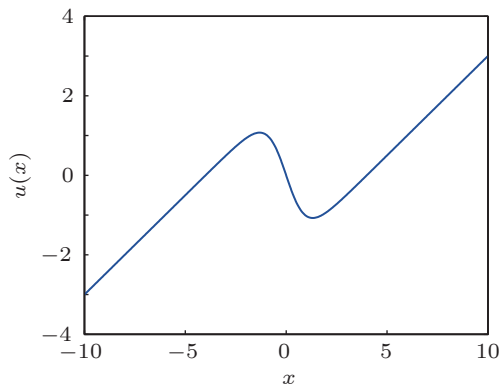


图 1  $f(y) = 0$  时  $x$  轴方向图像

因此称这种为  $N$  形波. 由于  $y$  轴方向的图形形状由函数  $f(y)$  决定, 这样  $y$  轴方向的图形形状是可控的. 这里给出  $f(y)$  为几种常见函数时  $t = 0$  解的图像.

1)  $f(y) = \sin(y)$  函数图像如图 2(a), 取  $f(y) = \sin(y)$  时解为

$$\begin{aligned} & u(x, y, t) \\ & = \frac{1}{2}\sin(y) - k_1 \tanh\left(\frac{k_1x - k_1\sin(y) - k_1^3t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2}x, \end{aligned}$$

图像如图 2(b).

2)  $f(y) = \frac{1}{4}y^2$  函数图像如图 3(a), 取  $f(y) = \frac{1}{4}y^2$  时解为

$$\begin{aligned} & u(x, y, t) = \frac{1}{8}y^2 - k_1 \tanh\left(\frac{k_1x - \frac{1}{4}k_1y^2 - k_1^3t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2}x, \end{aligned}$$

图像如图 3(b).

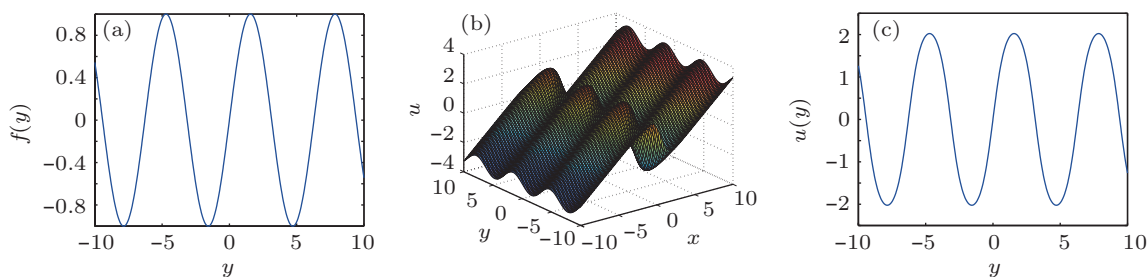


图2 (a)  $f(y) = \sin(y)$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

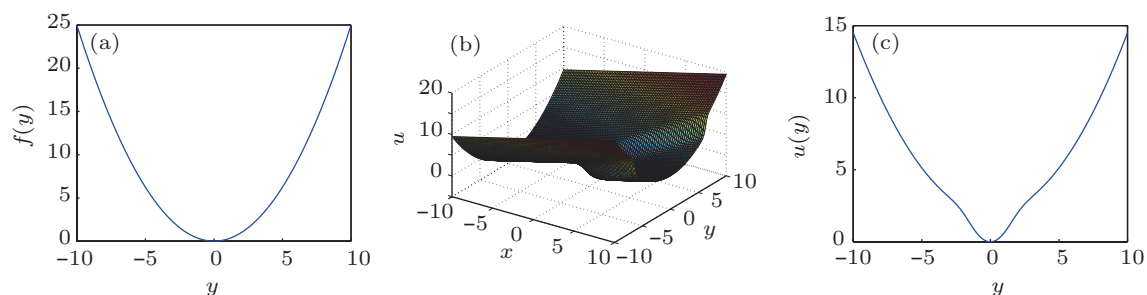


图3 (a)  $f(y) = \frac{1}{4}y^2$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

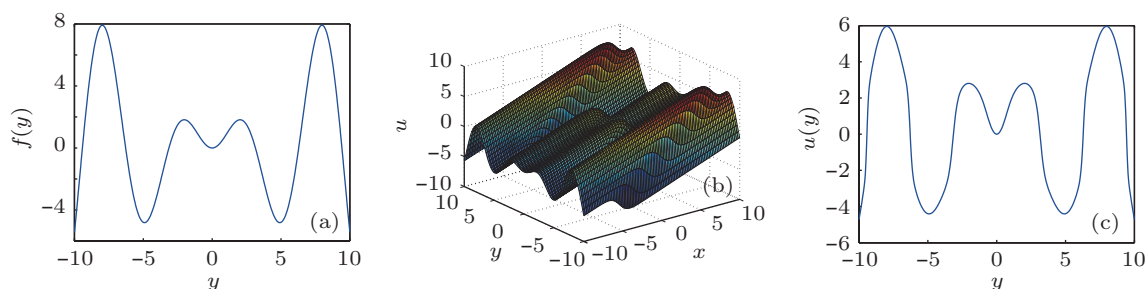


图4 (a)  $f(y) = y \sin(y)$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

3)  $f(y) = y \sin(y)$  函数图像如图 4(a), 取  $f(y) = y \sin(y)$  时解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2}y \sin(y) - k_1 \tanh\left(\frac{k_1 x - k_1 y \sin(y) - k_1^3 t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) + \frac{1}{2}x,$$

图像如图 4(b).

4)  $f(y) = y^2 \sin(y)$  函数图像如图 5(a), 取  $f(y) = y^2 \sin(y)$  时解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 \sin(y) - k_1 \tanh\left(\frac{k_1 x - k_1 y^2 \sin(y) - k_1^3 t + \xi_1^{(0)}}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}x,$$

图像如图 5(b).

5)  $f(y) = \sin(y^2)$  函数图像如图 6(a), 取  $f(y) = \sin(y^2)$  时解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} \sin(y^2) - k_1 \tanh\left(\frac{k_1 x - k_1 \sin(y^2) - k_1^3 t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) + \frac{1}{2}x,$$

图像如图 6(b).

6)  $f(y) = \frac{\sin(y)}{y}$  函数图像如图 7(a), 取  $f(y) =$

$\frac{\sin(y)}{y}$  时解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(y)}{y} - k_1 \tanh\left(\frac{k_1 x - k_1 \frac{\sin(y)}{y} - k_1^3 t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) + \frac{1}{2} x,$$

图像如图 7(b).

7)  $f(y) = -\ln(y^2)$  函数图像如图 8(a), 取  $f(y) = -\ln(y^2)$  时解为

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2} \ln(y^2) - k_1 \tanh\left(\frac{k_1 x + k_1 \ln(y^2) - k_1^3 t + \xi_1^{(0)}}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} x,$$

图像如图 8(b).

8)  $f(y) = -\ln(|y|)$  函数图像如图 9(a), 取  $f(y) = -\ln(|y|)$  时解为

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2} \ln(|y|) - k_1 \tanh\left(\frac{k_1 x + k_1 \ln(|y|) - k_1^3 t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) + \frac{1}{2} x,$$

图像如图 9(b).

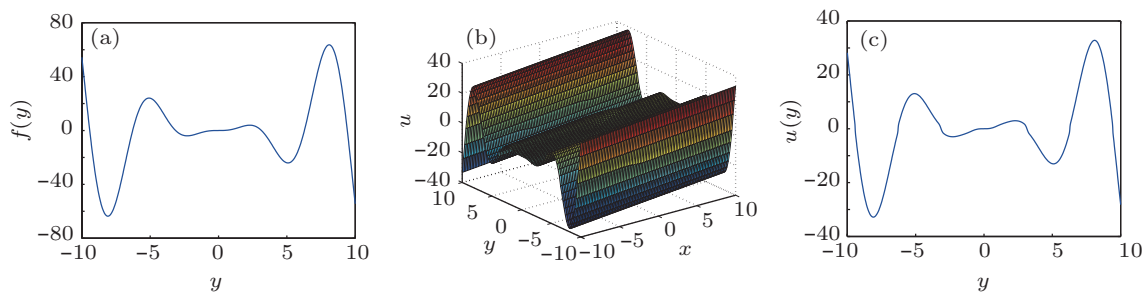


图 5 (a)  $f(y) = y^2 \sin(y)$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

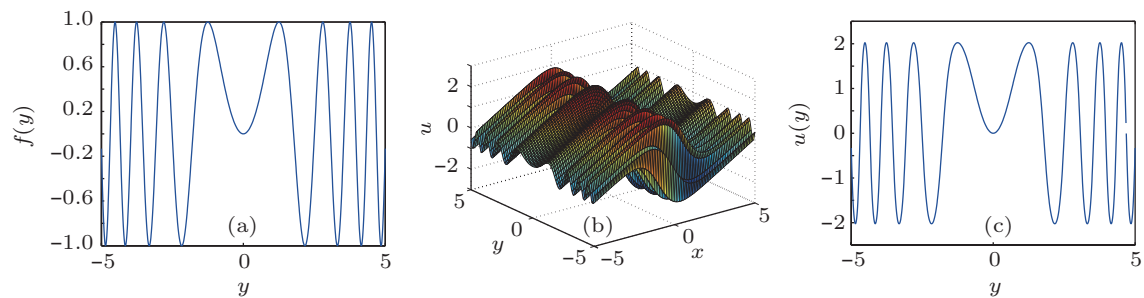


图 6 (a)  $f(y) = \sin(y^2)$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

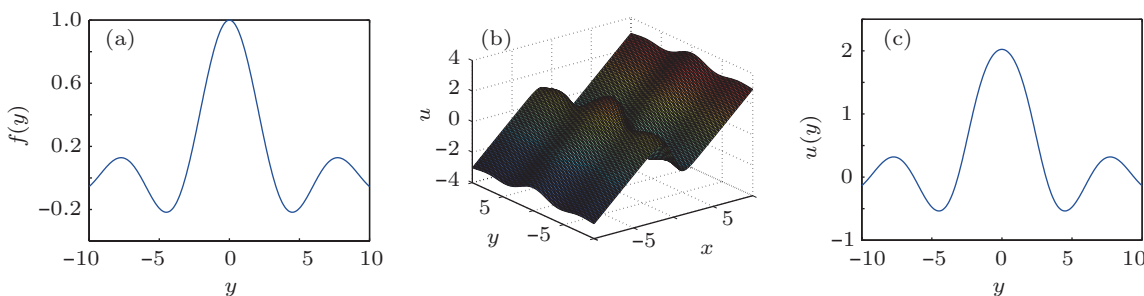


图 7 (a)  $f(y) = \frac{\sin(y)}{y}$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

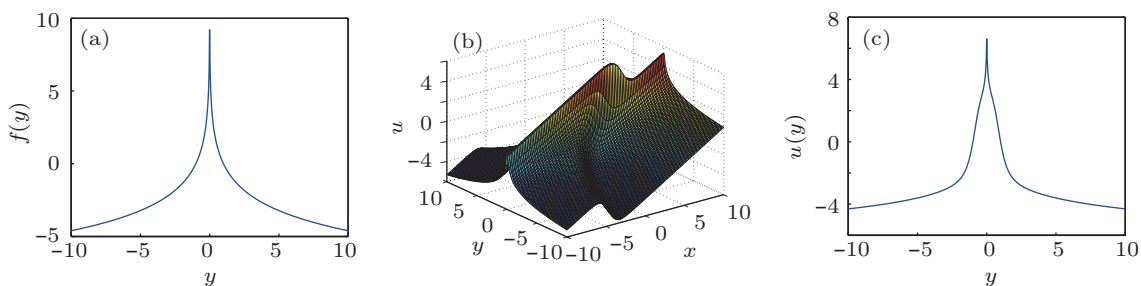


图 8 (a)  $f(y) = -\ln(y^2)$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

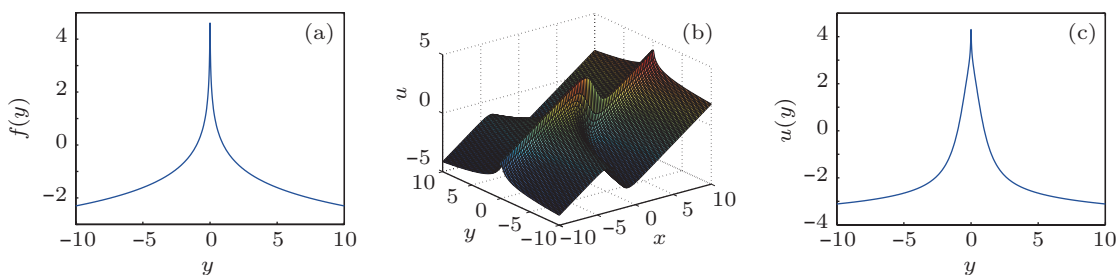


图 9 (a)  $f(y) = -\ln(|y|)$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

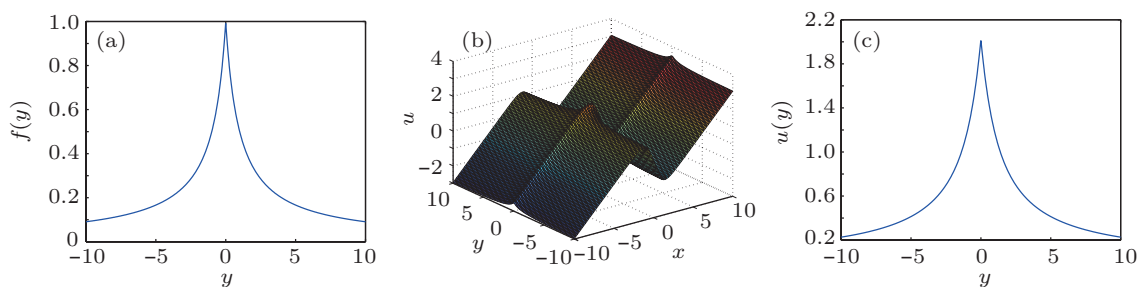


图 10 (a)  $f(y) = \frac{1}{1+|y|}$  函数图像; (b)  $k_1 = 2, \xi_1^{(0)} = 0, t = 0$  解图像; (c)  $x = 0$  时沿  $y$  轴方向解图像

9)  $f(y) = 1/(1+|y|)$  函数图像如图 10(a), 取  $f(y) = 1/(1+|y|)$  时解为

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+|y|} - k_1 \tanh\left(\frac{k_1 x - k_1 \frac{1}{1+|y|} - k_1^3 t + \xi_1^{(0)}}{2}\right) + \frac{1}{2} x,$$

图像如图 10(b).

由于  $y$  轴方向图像由  $f(y)$  控制, 而  $f(y)$  为  $y$  的任意函数, 这样可以有目的地构造更加丰富的精确解, 这对于分析该方程的物理性质有重要意义.

### 5 讨论

1) 将  $\tau$  的各阶 Young 图表达式与群表示论中置换群特征标进行对比:

$$\tau = \emptyset,$$

一阶情况, 1 有一个分划  $[1], [1] \rightarrow \tau_x$ , 于是一阶的有关  $\tau$  的 Young 图表达式为

$$\tau_x = \square;$$

二阶情况, 2 有两个分划  $[1,1] < [2], [1,1] \rightarrow \tau_{xx}, [2] \rightarrow \tau_y$ , 于是二阶的有关  $\tau$  的 Young 图表达式为

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \square\square + \square, \\ \tau_y &= \square\square - \square. \end{aligned}$$

二阶置换群特征标如表 1 所示.

三阶情况, 3 有三个分划  $[1,1,1] < [1,2] < [3], [1,1,1] \rightarrow \tau_{xxx}, [1,2] \rightarrow \tau_{xy}, [3] \rightarrow \tau_z$ , 于是三阶的有关  $\tau$  的 Young 图表达式为

$$\begin{aligned} \tau_{xxx} &= \square\square\square + 2\square\square + \square, \\ \tau_{xy} &= \square\square\square - \square, \end{aligned}$$



$$\tau_z = \square\square\square - \square\square + \square.$$

三阶置换群特征标如表 2 所示.

表 1 二阶置换群特征标表 ( $S_2$ )

阶数	特征标	
	$\square\square$	$\square$
$(1^2) = \tau_{xx}$	1	1
$(2^1) = \tau_y$	1	-1

表 2 三阶置换群特征标表 ( $S_3$ )

阶数	特征标		
	$\square\square\square$	$\square\square$	$\square$
$(1^3) = \tau_{xxx}$	1	2	1
$(1^1, 2^1) = \tau_{xy}$	1	0	-1
$(3^1) = \tau_z$	1	-1	1

四阶情况, 4 有五个分划  $[1, 1, 1, 1] < [1, 1, 2] < [1, 3] < [2, 2] < [4]$ ,  $[1, 1, 1, 1] \rightarrow \tau_{xxxx}$ ,  $[1, 1, 2] \rightarrow \tau_{xxy}$ ,  $[1, 3] \rightarrow \tau_{xz}$ ,  $[2, 2] \rightarrow \tau_{yy}$ ,  $[4] \rightarrow \tau_t$ , 于是四阶的有关  $\tau$  的 Young 图表达式为

$$\begin{aligned} \tau_{xxxx} &= \square\square\square\square + 3\square\square\square + 2\square\square + 3\square + \square, \\ \tau_{xxy} &= \square\square\square + \square\square - \square - \square, \\ \tau_{xz} &= \square\square\square - \square + \square, \\ \tau_t &= \square\square\square - \square\square + \square - \square, \\ \tau_{yy} &= \square\square\square - \square\square + 2\square - \square + \square. \end{aligned}$$

四阶置换群特征标如表 3 所示.

这里可以清楚地看到  $\tau$  各阶 Young 图表达式各项系数与所对应的相应的置换群的特征标一致, 这样既可以通过求  $\tau$  各阶导数求相应的特征标, 也可以通过特征标得到  $\tau$  各阶导数的 Young 图表示. 通过特征标作为系数矩阵可以得到各种 Young 图符号的关于  $\tau$  各阶导数的函数表达式.

2) 根据 Wronskian 行列式求导运算的特殊性, 取

$$\begin{aligned} G &= \{\dots \partial_x^{-3}, \partial_x^{-2}, \partial_x^{-1}, 1, \partial_x, \partial_x^2, \partial_x^3 \dots\}, \\ \partial_x^k \phi_i &= \phi_{i,kx}, \\ \partial_x^{-k} \phi_i &= \underbrace{\int \dots \int}_k \phi_i dx, \quad k > 0, \end{aligned}$$

在  $G$  上定义运算  $\partial_x^k \cdot \partial_x^j = \partial_x^{k+j}$ , 则  $G$  构成一个循环群记为  $(G, \cdot)$ . 群  $G$  取不同的阶数, 具有 Wronskian 解的双线性方程族将导出不同的具有 Wronskian 解的双线性方程族. 如 KdV 为  $|G| = 2$  时, 即  $\partial_x^2 \phi_i = \phi_i$ , KP 方程导出的 BLMP 为  $|G| = 4$  时, 即  $\partial_x^4 \phi_i = \phi_i$ , KP 族第二个方程导出的.

表 3 四阶置换群特征标表 ( $S_4$ )

阶数	特征标				
	$\square\square\square\square$	$\square\square\square$	$\square\square$	$\square$	$\square$
$(1^4) = \tau_{xxxx}$	1	3	2	3	1
$(1^2, 2^1) = \tau_{xxy}$	1	1	0	-1	-1
$(1^1, 3^1) = \tau_{xz}$	1	0	-1	0	1
$(4^1) = \tau_t$	1	-1	0	1	-1
$(2^1, 2^1) = \tau_{yy}$	1	-1	2	-1	1

3) 间接法并未将方程化为双线性  $D$  算子形式, 这样可以克服方程化为双线性形式的困难. 该方法不仅可以间接地得到普通的非线性发展方程的 Wronskian 解, 而且可以把目标方程所有形式的解移植到原方程. 这样不仅可以扩大方程解的范围, 而且可以通过构造所需解的目标方程进而使原方程的解表为所需解的展开式, 从而使非线性发展方程的求解具有目的性, 这对于更好地了解这类方程所描述的自然科学领域中相关问题的物理本质具有重要意义.

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Rogers C, Shadwick W R 1982 *Bäcklund Transformation and Their Application* (New York: Academic Press)

[3] Zhang H Q, Fan E G, Lin G 1998 *Chin. Phys.* **7** 649

[4] Matveev V B, Salle M A 1991 *Darboux Transformations and Solitons* (Berlin: Springer)

[5] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[6] Freeman N C, Nimmo J J C 1983 *Phys. Lett. A* **95** 1

[7] Hirota R, Tang 1986 *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** 2137

[8] Zhang S Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1335 (in Chinese) [张善卿 2008 物理学报 **57** 1335]

[9] OHTA Y 2003 *J. Nonlinear Math. Phys.* **10** 143

[10] Bogoyavlenskii O I 1990 *Lett. Nuovo. Cimento. Math. USSR. Izv.* **34** 245

[11] Toda K, Yu S J, Fukuyama F 1999 *Rep. Math. Phys.* **44** 247

[12] Yan Z Y, Zhang H Q 2002 *Comput. Math. Appl.* **44** 1430

[13] Tian B, Zhao K Y, Gao Y T 1997 *Int. J. Engng. Sci.* **35** 1081

[14] Calogero F, Degasperis A 1976 *Nuovo. Cimento. B* **32** 201

[15] Elwakil S A, El-labany S K, Zahran M A, Sabry R 2003 *Z. Naturforsch. A* **58** 39

[16] Estvez P G, Hernaez G A 2000 *J. Phys.* A **33** 2131

[17] Yan Z Y 2003 *Czech. J. Phys.* **53** 89

[18] Gilson C R, Nimmo J J C 1993 *Phys. Lett. A* **180** 337

[19] Qu C Z 1996 *Theor. Phys.* **25** 369

# Wronskian solution of general nonlinear evolution equations and Young diagram prove<sup>\*</sup>

Cheng Jian-Jun<sup>†</sup> Zhang Hong-Qing

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

(Received 21 November 2012; revised manuscript received 10 July 2013)

## Abstract

In this paper, we give indirect methods constructed Wronskian solution of a general nonlinear evolution equations. Under the properties of the computing of Young diagram we have proved the proposition of this paper and discuss the relationship between the permutation group character and Young diagram expressions coefficient.

**Keywords:** nonlinear evolution equations, Wronskian determinant solution, Young diagram, irreducible character

**PACS:** 05.45.Yv, 02.30.Ik, 02.30.Jr

**DOI:** 10.7498/aps.62.200504

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51109031, 51379033, 11201048), the Doctoral Fund of Ministry of Education of China (Grant No. 20100041120037), the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant Nos. DUT12LK34, DUT12LK52), and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2013CB036101, 2010CB32700).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: chengjianjun0355@163.com