

二次耦合光力学系统的一类高维可控自持振荡行为*

宋张代 张林†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710062)

(2013年6月23日收到; 2013年7月19日收到修改稿)

光力学系统通常的耦合是光压耦合, 是光场强度和纳米振子位移的一次耦合, 但在光场很强和振子振幅较大的光力学系统中, 非线性的耦合效应会变得非常明显和重要, 而且其所产生的非线性效应对制造具有特殊功能的光学器件具有重要意义. 本文在二次耦合模型的基础上研究了光腔和振子之间通过二次耦合作用达到能量平衡状态时系统所产生的自持振荡现象, 给出了二次耦合光力学系统的一般模型, 并通过数值方法研究了系统的定态行为和远离定态的极限环动力学行为, 标定了系统定态响应的稳定区域到极限环行为的分岔点. 发现在调节输入场参数(改变耦合系数)以及光腔和振子的弛豫系数时, 系统的相空间会出现一些稳定的高维自持振荡极限环. 通过数值分析发现该四维极限环在三维相空间的投影都趋于稳定的三维周期轨道, 并且该极限环轨道会随外部调控参数的改变发生扭动, 出现类似二维李萨如图样的稳定纽结结构. 该现象表明: 通过光场与振子的能量耦合, 利用一定强度的外部驱动可以有效控制振子的定态响应和振动, 可以让微振子锁定在具有一定振幅和频率的自发振动上, 为开发物理器件提供了可靠的光力学控制系统.

关键词: 光力系统, 二次耦合, 自持振荡, 极限环

PACS: 42.50.-p, 42.65.Sf, 82.40.Bj

DOI: 10.7498/aps.62.204204

1 引言

在最近的几十年里, 随着光控纳米系统的发展, 使得光力学体系在低能耗信息处理^[1]、微弱力检测^[2]和量子计算^[3]方面都显示出广阔的应用前景, 国内已有很多学者研究了光力学系统中的量子纠缠问题^[4-6]. 光力系统的功能是基于光子和声子之间的相互作用, 在声光耦合过程中光子和声子相互激发, 能量在光场和纳米机械振荡器之间通过声光耦合进行交换, 从而达到用声子控制光子或用光子控制声子的目的. 光力系统可以借助声子(振动)控制光子从而制造出高灵敏的弱力探测器或光声子控制开关, 也可以在纳米量级的机械振荡器上用光子去除声子来冷却机械振子^[7,8], 或利用光子产生声子来激发特殊振动从而制造出光控的纳米马达^[9]. 所以光力学系统的研究特别是声光耦合的研究在光力学的应用中具有重要的现实意义, 而光力学系统耦合的机制和强度直接决定了光力学器件

的工作效率.

利用光子对微观物体进行微机械操控首先在原子和分子上获得成功. 激光冷却技术和光镊技术可以实现对原子或大分子的有效控制, 此时系统中原子和激光场之间的耦合可以通过调节激光场的频率和强度来改变. 而在典型的光力学系统中, 与光场相互耦合的体系是大量原子构成的微振子, 光场和机械振子振动之间主要通过光压产生耦合^[10,11], 传统的光力学系统就是利用光压来操控振子的振动, 声光耦合的大小则决定于光场的强度和振子的线性位移 ($H_{in} = GIx$, G 为耦合系数, I 为光场强度, x 为振子离开平衡位置的位移量), 称为线性耦合. 如今, 光力学系统的耦合研究向两个方向发展: 一是利用强场产生更强烈的线性耦合^[12], 二是利用大的位移或特殊光腔结构产生非线性耦合^[13]. 随着光强的增加, 在纳米量级上由强耦合引起的非线性效应变得不可忽略. 例如在高精细的光腔中, 放置具有一定透射率的中间膜(该系统被称为中间膜光力学系统^[13,14]), 在外部强激光驱动的

* 中央高校基础科研业务费(批准号: GK201302010)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhanglincn@snnu.edu.cn

光腔中,随着振子和腔模能量的增加,振子和腔光子会发生比较复杂的非线性耦合作用进行能量交换,从而形成许多有趣的现象^[13,15,16].通过调节外部激光场的强度和频率以及微振子和光腔各自的衰减系数,可以对系统的非线性耦合进行有效控制,从而形成具有特殊性质的非线性振动.目前该方面的研究内容国内的报道还比较少.

本文利用非线性耦合来研究光力学系统特殊的自持振动现象.自持振动是一类非线性系统自发产生的周期运动,它不同于外部驱动响应的受迫振动以及参数共振现象,它是由系统自身非线性特性决定的一种稳定的周期运动,其最重要的特点是具有与外部驱动信号不同的周期^[17].如果系统发生自持振荡,从数学的角度讲就是系统在相空间可以形成稳定的极限环.自持振荡在物理、音乐、生物、医学等方面都有着广泛的表现,比如心率、神经元、海波、各种管弦乐器等系统都存在稳定的自持振荡.研究表明,在光力学系统中也能形成稳定的自持振荡^[18],但关于光力学系统的二次耦合自发振动方面的研究目前并不是很深入.本文旨在通过调节外部驱动来控制光腔和振子的非线性动力学行为,使振子出现稳定的自发振动模式或光腔输出频率稳定的自发脉冲,为制造信号控制和弱力探测方面可靠的纳米器件提供理论依据.

2 具有二次光力耦合的系统和模型

2.1 驻波场中的单个原子

本文首先引入两类系统,一类是从原子层次向上实现二次耦合的系统(称为 bottom-up 系统)^[19,20],另一类则是从大尺度层次向下实现二次耦合的系统(称为 top-down 系统),这两类系统是二次声光耦合的典型系统.第一类系统的典型代表是驻波光腔中的冷原子体系.如果冷原子被失谐的驻波囚禁于光场中,在相互作用绘景下 Hamilton 量为^[18]

$$H = \hbar\delta a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar(\varepsilon_c^* a + \varepsilon_c a^\dagger) + \hbar G a^\dagger a (b + b^\dagger)^2, \quad (1)$$

其中 $\delta = \omega_c - \omega$ 表示驱动场与光腔驻波场之间的失谐, ω 是外部驱动场的频率, ω_c 是腔驻波场的频率; a^\dagger, a 和 b^\dagger, b 分别表示光腔和原子振动的升降算符; ε_c 代表外部相干驱动场振幅, ν 是被囚禁原

子的振动频率.此时系统的二次耦合系数 G 为

$$G = \frac{\eta^2 g^2}{\Delta}, \quad (2)$$

其中 g 是原子偶极跃迁时单光子的拉比频率, Δ 是原子跃迁频率和腔模之间的失谐量, η 是 Lamb-Dicke 参数.

2.2 光学腔中的宏观薄膜系统

另一类具有强二次耦合的宏观光力系统是光腔中的光学薄膜^[21],这个系统的 Hamilton 量为^[14]

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar(\varepsilon_c^* a e^{i\omega t} + \varepsilon_c a^\dagger e^{-i\omega t}) + \hbar G a^\dagger a (b + b^\dagger)^2, \quad (3)$$

其中 a^\dagger, a 和 b^\dagger, b 分别是腔模和薄膜振动的升降算符, ε_c 表示光腔频率为 ω 的外部相干驱动场振幅, ν 是薄膜的振动频率,而 $\omega_c = \omega(0)$ 为薄膜处在平衡位置 $x = 0$ 时的腔场频率,此时光声子的二次耦合系数为

$$G = \frac{\hbar}{4m\nu} \left[\frac{\partial \omega_c(x)}{\partial^2 x} \right]_{x=0}. \quad (4)$$

在相互作用绘景下 Hamilton 量为

$$H = \hbar\delta a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar(\varepsilon_c^* a + \varepsilon_c a^\dagger) + \hbar G a^\dagger a (b + b^\dagger)^2, \quad (5)$$

其中 $\delta = \omega_c - \omega$ 为腔场的驱动失谐量.显然(5)式所代表的 Hamilton 量和(1)式具有完全相同的形式.

2.3 二次共振耦合模型

根据以上两类系统相同的哈密顿形式,下面给出统一的二次耦合哈密顿模型,用来考察一般二次耦合光力学系统的动力学行为.哈密顿(1)或(5)式的第三项对应光场的一个平移,可以通过恰当的抽运场消去.利用位移算符

$$D^\dagger(\bar{\alpha}) a D(\bar{\alpha}) = a + \bar{\alpha}, \quad (6)$$

可以将哈密顿量重写为

$$H' = D^\dagger(\bar{\alpha}) H D(\bar{\alpha}) = \hbar\delta a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar G (a^\dagger + \bar{\alpha}^*) (a + \bar{\alpha}) (b + b^\dagger)^2, \quad (7)$$

其中 $\bar{\alpha} = -\varepsilon_c/\delta$,并忽略了常数项.转化到相互作用绘景下,通过旋波近似可以得到以下两类不同失谐条件的有效哈密顿量:

1) 红失谐驱动, 当驱动场和光腔之间的失谐量 $\delta = 2\nu$ 时, 系统的有效哈密顿量为

$$H_r = \hbar G a^\dagger a + 2\hbar G |\bar{\alpha}|^2 b^\dagger b + \hbar G (\bar{\alpha} a^\dagger b^2 + \bar{\alpha}^* a b^{\dagger 2}) + 2\hbar G a^\dagger a b^\dagger b; \quad (8)$$

2) 蓝失谐驱动, 当驱动场和光腔之间的失谐量 $\delta = -2\nu$ 时, 系统的有效哈密顿量为

$$H_b = \hbar G a^\dagger a + 2\hbar G |\bar{\alpha}|^2 b^\dagger b + \hbar G (\bar{\alpha} a^\dagger b^{\dagger 2} + \bar{\alpha}^* a b^2) + 2\hbar G a^\dagger a b^\dagger b. \quad (9)$$

由于红失谐驱动具有可靠的光压冷却效果 [22], 它有效抑制振子在操控中的热噪声, 所以本文在红失谐 (8) 式的条件下来讨论具有二次耦合的光力系统所特有的动力学行为.

3 二次耦合光力学系统的半经典动力学行为

3.1 系统的半经典动力学方程

对于光力学系统的一个重要问题是: 当光场通过二次共振耦合与光腔中的机械振荡器之间进行能量交换时会出现怎样的宏观定态响应和不稳定的动态行为. 如果我们取 $H_0 = \hbar G a^\dagger a + 2\hbar G |\bar{\alpha}|^2 b^\dagger b$, 经过么正变换 $U = \exp(-iH_0 t)$ 可以得到如下的相互作用绘景下的哈密顿量:

$$H_r^I = \hbar G \left[\bar{\alpha} a^\dagger b^2 e^{iG(1-|\bar{\alpha}|^2)t} + \bar{\alpha}^* a b^{\dagger 2} e^{-iG(1-|\bar{\alpha}|^2)t} \right] + 2\hbar G a^\dagger a b^\dagger b. \quad (10)$$

在共振条件 $1 - |\bar{\alpha}|^2 = 0$ 和 $\bar{\alpha} = -\varepsilon_c/\delta$ 下, 将外部驱动场的振幅强度和振荡器的频率调制在同一数量级上有 $|\varepsilon_c| \sim \nu$, 在这种光场驱动背景下

$$H_r^I = \hbar G (\bar{\alpha} a^\dagger b^2 + \bar{\alpha}^* a b^{\dagger 2}) + 2\hbar G a^\dagger a b^\dagger b. \quad (11)$$

由 (11) 式可知腔模和振子能量的交换是通过二次过程进行的, 即消灭一个光子产生两个声子 (相应的共轭项为其逆过程), 最后一项则是声光的强度耦合 (Cross-Kerr 耦合 [23]) 项. 由 (11) 式所描述的体系是个封闭系统, 系统总能量是守恒的. 但在实际开放的系统中光场和振荡器的能量都会通过腔镜和热浴背景不断耗散, 所以红失谐光驱动下的体系最终会趋于能量最低的平衡态. 因此必须对振子提供一个外力驱动 [18]. 现引入一个作用在振荡器上的驱动力为振子系统提供外部能量 (如利用压

电陶瓷), 则体系的量子 Langevin 方程为

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -iG\bar{\alpha}b^2 - 2iGab^\dagger b - \frac{\kappa}{2}a, \\ \frac{db}{dt} &= -2iG\bar{\alpha}ab^\dagger - 2iGa^\dagger ab - i\xi - \frac{\gamma}{2}b, \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 式中的 ξ 表示作用在振荡器上的驱动力幅度, κ 和 γ 分别表示光腔中的光子和声子的衰减率. 在实际控制中, 激光场将很强, 机械振子的运动接近经典运动, 因此激光场和机械振荡器的行为可以采用相干态 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 来描述. 当系统力学量的平均值远大于系统任何量子涨落时, 在相干态假设下, 光场和机械振荡器将满足以下的半经典平均场耦合方程:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -iG\bar{\alpha}\beta^2 - 2iG\alpha|\beta|^2 - \frac{\kappa}{2}\alpha, \\ \frac{d\beta}{dt} &= -2iG\bar{\alpha}\alpha\beta^* - 2iG\beta|\alpha|^2 - i\xi - \frac{\gamma}{2}\beta, \end{aligned} \quad (13)$$

这里 $\alpha = \langle \alpha | a | \alpha \rangle$, $\beta = \langle \beta | b | \beta \rangle$ 分别表示光场和机械振荡器的平均复振幅. 引入有效二次耦合系数 $G\bar{\alpha} = \chi$ [18], 并对方程 (13) 重新标度, 可以得到如下的非线性动力学方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \bar{\alpha} &= -i\chi \bar{\beta}^2 - 2i\chi \bar{\alpha} |\bar{\beta}|^2 - \frac{\tilde{\kappa}}{2} \bar{\alpha}, \\ \frac{d}{d\tau} \bar{\beta} &= -2i\chi \bar{\alpha} \bar{\beta}^* - 2i\chi \bar{\beta} |\bar{\alpha}|^2 - i\tilde{\xi} - \frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{\beta}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中经过标度后的无量纲量定义为 $\tau = \bar{\alpha}t$, $\bar{\alpha} = \alpha/\bar{\alpha}$, $\bar{\beta} = \beta/\bar{\alpha}$, $\tilde{\kappa} = \kappa/\bar{\alpha}$, $\tilde{\gamma} = \gamma/\bar{\alpha}$, $\tilde{\xi} = \xi/\bar{\alpha}$. 下面我们将在 (14) 式的基础上考察这样的非线性系统具有怎样的动力学行为.

3.2 系统的静态响应及其稳定性

系统的定态行为是体系工作性质的重要方面, 我们直接利用 (14) 式计算系统的定态解. 令 (14) 式两个方程的右端为零, 可以得到机械振子定态解的隐式条件 (为了简单去掉了字母上的波浪线):

$$\begin{aligned} &2\chi^2 |\beta|^2 \left(\frac{\kappa}{2} - 2i\chi |\beta|^2 \right) + 2i\chi^3 |\beta|^4 \beta \\ &+ \frac{\gamma}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{2} \right)^2 + 4\chi^2 |\beta|^4 \right] \beta \\ &+ i\xi \left[\left(\frac{\kappa}{2} \right)^2 + 4\chi^2 |\beta|^4 \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式决定了机械振子的状态 β 随系统参数变化所满足的关系. 如果振子的定态能量记为

$A \equiv |\beta|^2 \geq 0$, 可以将 (15) 式化简为

$$4A^5 + A \left(\kappa A + 2\gamma A^2 + \frac{\gamma \kappa^2}{8} \right)^2 = \xi^2 \left(\frac{\kappa^2}{4} + 4A^2 \right)^2, \quad (16)$$

其中衰变系数 κ , γ 和驱动力 ξ 都由 χ 重新标度. 此时腔场的强度与振子的能量之间存在一个非常简单的关系:

$$I_c = |\alpha|^2 = \frac{A^2}{\frac{\kappa^2}{4} + 4A^2}, \quad (17)$$

上式表明腔场的定态强度不直接依赖于振子的驱动强度 ξ 和弛豫系数 γ , 只决定于振子振幅的平方 A (能量) 和腔场的弛豫系数 κ , 而且场强存在一个最大的饱和值 $1/4$. 但振子的能量 A 却随耗散参数 κ , γ 和驱动力 ξ 而改变, 其变化的趋势则比较复杂, 如图 1 所示. 图 1(a) 给出振子的定态能量随着外部驱动力的增大呈非线性增长, 其增长的形式受到光场能量耗散系数 κ 的强烈影响, 表现出光场耗散对振子定态过程明显的非线性调制作用.

图 1(b) 表明振子定态能量并非随光腔衰减系数的增加而持续减小, 而是先减小而后又增大, 即存在一个最低的能量点, 此时的光场耗散系数为系统提供最优的光场冷却控制点. 振子的最低能量点会随系统其他的参数发生移动, 这就为利用外部耗散参数来改变振子的定态能量供应提供了一种有效的控制方法.

为了分析和计算方便, 可令 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = x + ip$. 代入方程 (14) 中, 得到一个四维的实数型非线性动力学方程:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{d\tau'} = 2xp + 2\alpha_2(x^2 + p^2) - \frac{\kappa'}{2}\alpha_1, \\ \frac{d\alpha_2}{d\tau'} = -2\alpha_1(x^2 + p^2) - (x^2 - p^2) - \frac{\kappa'}{2}\alpha_2, \\ \frac{dx}{d\tau'} = 2(\alpha_2x - \alpha_1p) + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)p - \frac{\gamma'}{2}x, \\ \frac{dp}{d\tau'} = -2(\alpha_1x + \alpha_2p) - 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)x - \xi' - \frac{\gamma'}{2}p. \end{cases} \quad (18)$$

为化简方程, (18) 式中的参数 τ' , ξ' , κ' , γ' 都用 χ 重新标度, 其中 α_1 和 α_2 为激光场振幅的两个垂直分量, x 和 p 则表示机械振子的经典平均位移和动量. 以上的平均场方程为一个四元三次非线性参数方

程组, 总体上虽然无法解析求解, 但在一定近似条件下可以确定其特殊的定态解 [18].

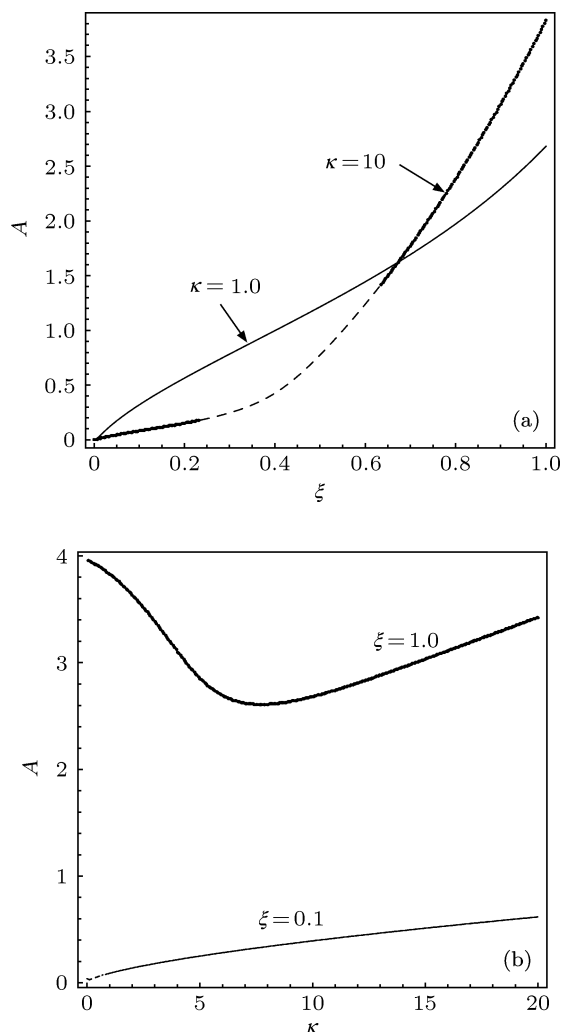


图 1 振子定态能量的响应曲线 (a) 振子定态能量随外部驱动强度的变化趋势, 细线表示 $\kappa = 1.0$, $\gamma = 0.1$, 粗线 $\kappa = 10$, $\gamma = 0.1$, 其中虚线为不稳定的定态; (b) 振子定态能量随光场耗散系数的变化曲线, 其中粗线表示 $\gamma = 0.1$, $\xi = 1.0$, 细线表示 $\gamma = 0.01$, $\xi = 0.1$

利用方程 (18) 可以很容易发现系统存在唯一的物理上允许的实数解, 随着参数的改变, 该定态会失稳, 所以考察系统定态解的稳定性区域, 对系统的定态操控起至关重要的作用. 图 2 计算了系统定态解稳定区域的参数相图, 从图 2 中可以清楚地看到, 当光学腔的弛豫系数很大而驱动非常强时, 系统的定态解是稳定的, 而在弱驱动和低耗散下系统的定态会失稳.

图 2 总体说明了: 1) 系统的稳定性区域对系统耗散的依赖存在非线性双态转变现象, 即当系统耗散到达一定阈值后, 振子随驱动或耗散系数的增加将从稳定到不稳定再到稳定的转变, 特别是在相同振子驱动力下振子可以通过改变耗散系数在稳定

和不稳定区域转变; 2) 系统的稳定性对系统的能量耗散性质有着强烈的非线性依赖, 计算表明无论是振子耗散 (图 2(a)) 还是光场耗散 (图 2(b)) 的增大都会使系统的不稳定区域收缩, 相应的稳定区域增大, 表明系统弛豫在稳定性方面发挥着非常重要的作用; 3) 对振子的强驱动会让系统越来越屈从于外部驱动的影响而更加接近受迫振动的情况, 在这种情况下系统自身的非线性效应会相对减弱, 从而系统更容易趋于稳定. 在图 2 临界曲线所包围的不稳定区域内, 系统将不会趋近于任何定态, 在这个参数区域系统将偏离定态行为. 而稳定和不定区域的边界曲线就是系统发生 Hopf 分岔的临界常数点, 在临界曲线上系统雅可比矩阵的本征值的实部等于零. 有意思的是在不稳定区域内系统虽然不会到达一个定态, 但会趋于一种稳定的振动 (自持振荡).

3.3 系统偏离定态的动力学行为: 自持振荡现象

对二次耦合光场驱动的微振子在红失谐共振条件下的经典动力学方程 (18) 进行数值分析发现, 这个体系在定态不稳定的参数区域内存在具有实际可控意义的高维振荡极限环 (图 3). 由于极限环行为已经在工程技术、无线电技术、生物科学、天体力学和自动控制等方面得到了广泛的应用 [24-26], 所以提供存在稳定极限环的可控系统不仅在实际应用中非常重要, 而且在微分方程定性理论研究中同样具有理论意义. 数学上关于极限环的研究 [27,28] 主要包括极限环的存在性、存在的参数条件及稳定性分析、极限环的个数和相对位置、奇点性态和中心焦点的判定等方面. 其中对极限环个数和上界的确定与著名的 Hilbert 第 16 个问题有关; 极限环最典型和最具有实际意义的是在非线性系统中能产生稳定的周期振荡, 比如电路中的 van der Pol 电子自持振荡器、小区域气候变化的 Lorentz 模型、物种变化的 Volterra 系统中都会出现有实际意义的稳定极限环.

在二次耦合的光力系统中, 光子和声子通过共振耦合会达到能量平衡, 此时四维的动力学方程会在相空间出现稳定的自持振荡极限环. 本文研究的系统是一个四维三次非线性参数方程组, 通过数值计算发现系统在图 2 定态不稳定的参数区域内会形成稳定的极限环, 其典型的相空间周期轨道如图 3 所示. 该周期轨道的结构由系统参数决定, 不依赖于系统的初始状态. 图 3 给出的是特定能量耗散下 (κ 和 γ 一定), 不同外部驱动力 ξ 作用下系统在三维投影相空间中出现的极限环以及此时振子振动所对应的频谱. 当调节 κ 和 γ 的大小, 增加机械振子的驱动时, 相空间极限环的结构会发生改变. 图 3(b) 和 (d) 是分别对应于图 3(a) 和 (c) 两个极限环振子的振动频率谱. 如图 3, 在驱动较小 $\xi = 0.12$ 时, 振子做频率单一的简谐振动, 而这个振动频率是由体系的非线性性质决定的. 当驱动增加到 $\xi = 0.2$ 时, 相空间极限环发生变形, 振子偏离了简单的简谐振动并开始出现高阶谐波频率的振动成分, 从等间距的频率谱看振子依然是在做周期运动. 从图 3 中可以看出, 当调节外部驱动力时可使微振子离开定态, 激发稳定的自持振荡, 并通过驱动强度来改变振子的自持振动频谱.

随着振子外部驱动力强度的增加, 振子的振动

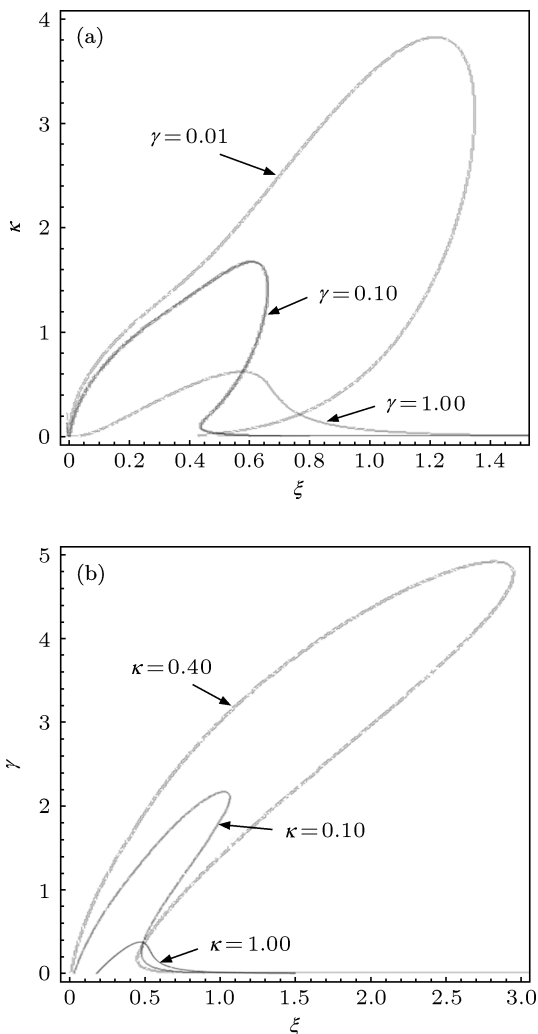


图 2 定态解的稳定性参数区域 (a) 稳定性区域随光场耗散 κ 和振子驱动 ξ 的参数图; (b) 稳定性区域随振子耗散 γ 和驱动 ξ 的参数图; 图中的曲线为临界曲线 (雅可比矩阵本征值的实部为零), 其包围的内部区域为定态的不稳定区域, 外部为稳定性区域

会顺次产生二次、三次等谐波. 通过振子振动位置的频谱分析可以清晰地看到频率的变化, 可以肯定该运动一定不是一个混沌或非混沌的吸引子, 而是体系的一个极限环, 其具有明显的局域稳定性. 进一步的数值计算发现, 系统在任意三维相空间的投影都能展现出类似的极限环结构, 所以可以确定此时的系统在四维相空间存在稳定的四维极限环行

为. 通过改变耗散系数 κ 和 γ 的大小可以改变系统极限环的工作参数区域, 再通过调整振子驱动强度可以让系统的振子处于一个具有特定频率和振幅的自持振动上, 而且这个振动对初值没有任何依赖性和敏感性, 这种稳定可控的自持振荡对光力学系统用于耦合共振测量有重要的现实意义.

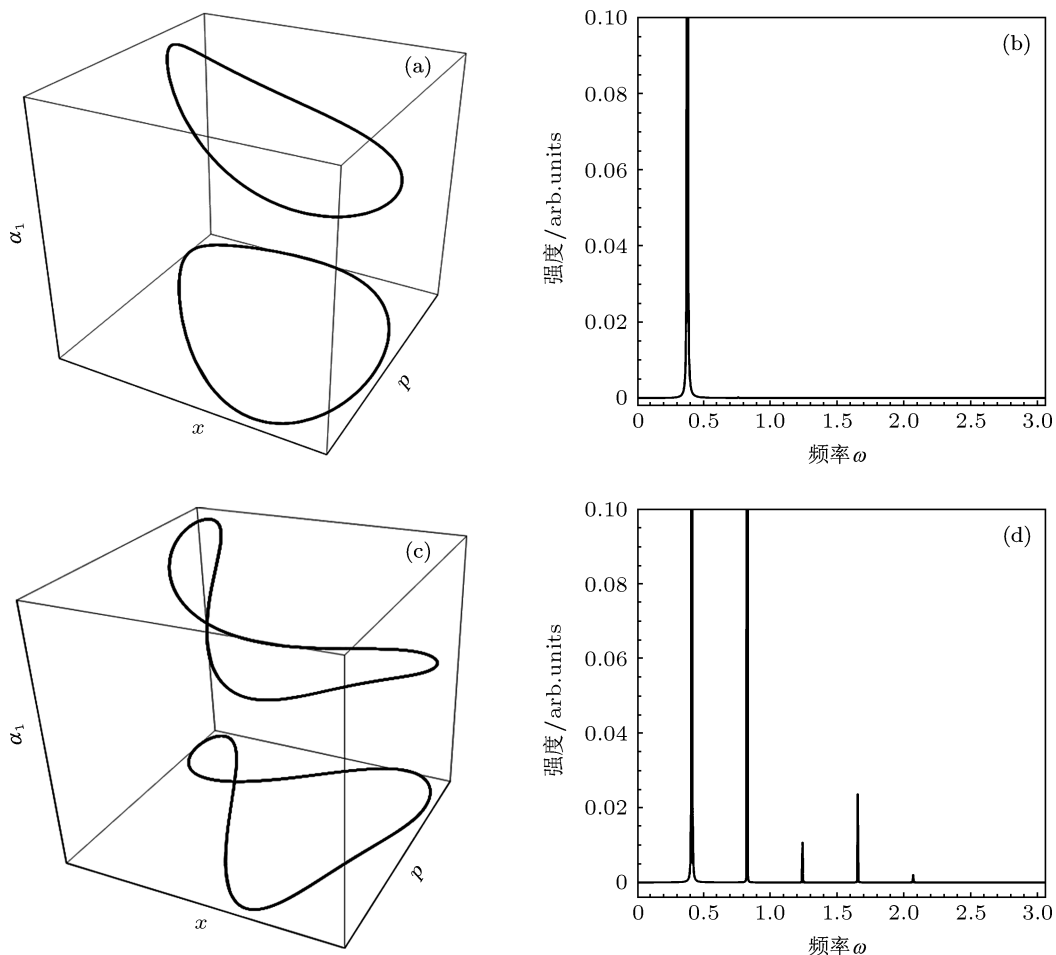


图3 四维系统的自持振动极限环在三维空间的投影及其随参数的变化 (a) 驱动 $\xi = 0.12$ 时的简单极限环及振子的二维相空间投影轨道; (c) 驱动 $\xi = 0.2$ 时的扭曲极限环及二维相空间投影曲线; (b) 和 (d) 分别对应 (a) 和 (c) 的振子振动的频率谱; 其他参数为 $\kappa = 0.8, \gamma = 0.01$

另一方面系统极限环的低维拓扑结构可由外部参数进行调控, 随着参数的变化高维极限环的形状会发生形变, 在二维平面上的投影会由单环变成纽结型的双环, 这是由于驱动力的增大改变了振子频率的结果. 当振子的位移和动量都是单一频率时振子表现简单极限环行为, 当其中一个的频率加倍时会使极限环的结构发生扭曲, 而且其振幅会发生二次分岔现象, 在一定控制参数下还能出现振幅的多次分岔过程. 图4 计算了系统长时间演化后 (相空间轨道不再改变) 振子的振幅随驱动力的分岔过程, 可以清晰看到系统振子位置从定态出发所发

生的简单 Hopf 分岔甚至倍周期分岔现象. 在弱驱动 (ξ 很小) 时振子的位置总会趋于一个稳定的定态值, 但当驱动力 ξ 大于一定的临界值 (由图2中的临界曲线决定) 时, 这个定态会失稳, 振子的位置会离开定态, 在一个范围内连续取值. 这表明振子在一个范围内来回振动 (图4中的两条实线给出了最大和最小位移), 预示着振子演化到一个振幅确定的振动上 (如图4(a)的右下方第一个时间演化插图). 总体上振子振幅随参数的改变展现两种不同的动力学行为: 1) 如图4(a)所示, 增加驱动力, 振子从定态开始失稳经二次分岔起振, 振幅不断增加,

期间会发生振幅不连续的跃变现象, 然后振幅又减小, 最后重新回到定态区域 (见图 4(a) 中右下第二个时域演化插图); 2) 图 4(b) 中另一种分岔过程则包含了二次分岔过程直至多次分岔现象. 图 4(b) 中的右下角的插图是局域放大后的分岔图, 展示了典型的振幅倍周期分岔现象; 左上角插图是振子振动位置的时域演化图, 在 $\xi = 0.9$ 时振子的振幅出现四次分岔现象, 对应振幅有两个极大值和两个极小值. 但是随着驱动力继续增大, 体系又会回到定态 (受二次耦合系数的限制, 非线性项相对外驱动很小时系统趋于唯一的定态, 可参照图 2 所示的稳定区域), 表明体系的自持振动趋于受迫振动, 更强的驱动会让系统趋于由外部驱动所带来的稳定状态.

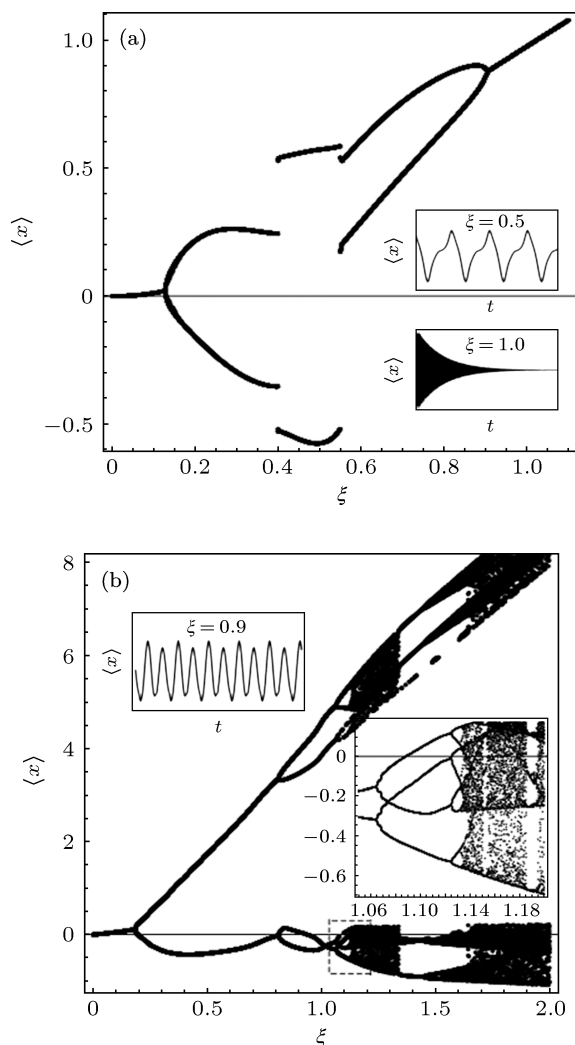


图4 振子的位置随驱动力的振幅分岔图 (a) $\kappa = 0.1, \gamma = 1.0$, 其中的插图为 $\xi = 0.5$ 和 $\xi = 1.0$ 时振子振动位置的时序演化图; (b) $\kappa = 1.0, \gamma = 0.01$, 其中的插图为 $\xi = 0.9$ 时振子振动位置的时序演化图和被矩形所包围的部分放大之后的图形; 图中的实线给出了振子振动位置的最大值和最小值, 单线表示振子处于定态 (振幅为零)

物理上, 二次非线性耦合光力学系统极限环的出现可以用开放系统的能量供应和能量损耗平衡来理解, 极限环行为总是在体系的能量供应和能量耗散达到平衡时出现稳定的周期运动. 对于振子而言, 其振幅 (能量) 增长时会受到耗散的制约 (通过光场和振子本身的耗散), 而其振幅减小时外部驱动又会为其补充能量 (通过外部驱动和光场的能量耦合), 所以振子的振幅最终会处于一个稳定的数值, 振子会锁定在一个稳定的振动模式下. 这种由能量供应和能量损耗平衡所维持的稳定的自持振动必然发生在非线性的开放系统中, 正是这种非线性的能量供应和耗散, 维持了这类自持振荡极限环的存在.

光驱动下稳定的自持振荡系统是弱力测量应用的重要基础, 利用工作在自持振荡参数条件下的微振子耦合到被探测的系统上, 其稳定的自发振动会在外力作用下发生改变, 测量输出光场的变化就可以探测外力的大小. 实验上要实现可控的自持振荡, 可以选择一定精细度的光腔, 先调节驱动光场使其维持在特定的失谐量和强度下, 然后在腔中放置一个具有一定透射率的薄膜, 通过调整薄膜位置使薄膜和光场只存在二次耦合作用^[13,14]. 光学薄膜被固定在贴有压电陶瓷片的机架上, 利用电路驱动薄膜振动, 当振动频率是光场失谐量的 1/2 时, 调节体系耗散系数和驱动功率, 薄膜的振动就会锁定在一定的自持振荡上. 这种振动的出现可以通过输出光场的频谱来探测或进行反馈控制. 当然实验上在其他具有二次耦合的体系上 (如振动的电容耦合微波场的电路系统^[29]) 同样可以通过本文得到的理论条件实现可控的自持振荡.

4 结论

本文利用两类典型系统相同的 Hamilton 量得到了一个一般的具有交叉耦合的二次耦合光力学系统模型. 在忽略量子起伏和旋波近似的基础上用相干态的平均场描述了光场和机械振子的复振幅随时间的动力学演化. 通过对该系统模型的半经典动力学方程的数值分析, 发现系统在很大的参数范围内存在经典极限环. 本文仔细考察了二次耦合系统的定态稳定区域以及在定态失稳后系统所出现的自持振荡现象. 该系统的振子振动极限环行为可以用来实现可靠的动力学操控, 通过调整系统弛豫和外部驱动, 可以对光力学二次耦合下振子的自发

振动频率和振幅进行有效控制和选择. 本文发现了该系统在调节参数时通过 Hopf 分岔出现的空间极限环, 并随驱动力的增强振子会发生振幅的二次分岔和倍周期分岔的现象, 机械振子的振幅能出现独特的不连续跃变行为. 这种稳定可控的自持振荡行为为开发光力学控制和探测系统提供了基本的物

理载体. 在今后的工作中我们希望能解析分析产生极限环的参数条件及其稳定性判据, 并能够在平均场方程之外考察系统的非线性量子动力学行为, 找到极限环行为在量子动力学中的对应能量特征及其与经典动力学的差异, 理解开放光力学系统在量子涨落下的随机动力学特点.

- [1] Stannigel K, Komar P, Habraken S J M, Bennett S D, Lukin M D, Zoller P, Rabl P 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 013603
- [2] Bocko M F, Onofrio R 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 755
- [3] Pirkkalainen J M, Cho S U, Jian Li, Paraoanu G S, Hakonen P J, Sil-lanpää M A 2013 *Nature* **494** 211
- [4] Mi X W, Bai J X, Li D J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030303
- [5] Zhang D, Zhang X P, Zheng Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 064206
- [6] Zhang D, Zheng Q 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 024213
- [7] Karuza M, Molinelli C, Galassi M, Biancofiore C, Natali R, Tombesi P, Giuseppe G Di, Vitali D 2012 *New J. Phys.* **14** 095015
- [8] Chen H J, Mi X W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 124206 (in Chinese) [陈华俊, 米贤武 2011 物理学报 **60** 124206]
- [9] Bonin K D, Kourmanov B, Walker T G 2002 *Opt. Express* **10** 984
- [10] Kippenberg T J, Rokhsari H, Carmon T, Scherer A, Vahala K J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 033901
- [11] Arcizet O, Cohadon P F, Briant T, Pinard M, Heidmann A 2006 *Nature* **444** 71
- [12] Gröblache S, Hammerer K, Vanner M R, Aspelmeyer M 2009 *Nature* **460** 724
- [13] Sankey J C, Yang C, Zwickl B M, Jayich A M, Harris J G E 2010 *Nature Phys.* **6** 707
- [14] Thompson J D, Zwickl B M, Jayich A M, Marquardt F, Girvin S M, Harris J G E 2008 *Nature* **452** 72
- [15] Nunnenkamp A, Borkje K, Harris J G E, Girvin S M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 021806
- [16] Teng J H, Wu S L, Cui B, Yi X X 2012 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** 185506
- [17] Jenkins A 2013 *Phys. Reports* **525** 167
- [18] Holmes C A, Milburn G J 2009 *Fortschr. Phys.* **57** 1052
- [19] Domokos P, Ritsch H 2003 *J. Opt. Soc. Am. B* **20** 1098
- [20] Zippilli S, Morigi G 2005 *Phys. Rev. A* **72** 053408
- [21] Wilson-Rae I, Nooshi N, Dobrindt J, Kippenberg T J, Zwerger W 2008 *New J. Phys.* **10** 095007
- [22] Gigan S, Böhm H R, Paternostro M, Blaser F, Langer G, Hertzberg J B, Schwab K C, Bäuerle D, Aspelmeyer M, Zeilinger A 2006 *Nature* **444** 67
- [23] Bhattacharya M, Shi H, Preble S 2013 *Am. J. Phys.* **81** 267
- [24] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾晓静, 曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [25] Liu S H, Tang J S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3145 (in Chinese) [刘素华, 唐驾时 2007 物理学报 **56** 3145]
- [26] Zhao Q, Liu S K, Liu S D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220201 (in Chinese) [赵强, 刘式适, 刘式达 2012 物理学报 **61** 220201]
- [27] Giacomini H, Llibre J, Viano M 1996 *Nonlinearity* **9** 501
- [28] Blows T R, Lloyd N G 1984 *Proc. Roy. Soc. Edinb.* **98A** 215
- [29] Suh J, Shaw M D, LeDuc H G, Weinstein A J, Schwab K C 2012 *Nano Lett.* **12** 6260

Self-sustained oscillation in controllable quadratic coupling opto-mechanical systems*

Song Zhang-Dai Zhang Lin[†]

(School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 23 June 2013; revised manuscript received 19 July 2013)

Abstract

The traditional opto-mechanical coupling in an opto-mechanical system is a linear coupling which is proportional to the field intensity I and oscillator displacement x . The nonlinear spatial coupling effect becomes obvious and important in a strong cavity field with large oscillating amplitude, and then the nonlinear effect with quadratic coupling in opt-mechanical device is also significant. In this article, we find that a general opto-mechanical system with quadratic coupling will produce a stable self-sustained oscillation when the energy injected by external driving equals that of dissipations in certain parametric regions. We numerically solve the semi-classical equation of motion of the system and find high-dimensional limit circles in its phase space under the control of driving and damping. We verify the high-dimensional limit circles by the closed orbits in all the projective three-dimensional phase space and show a highly controllable topological structure of the phase orbit which is very similar to Lissajous figures formed in a two-dimensional case. The self-sustained oscillations of the driving resonator with controllable amplitudes and frequencies demonstrate a reliable physical application of opto-mechanical system under quadratic coupling.

Keywords: opto-mechanical system, quadratic coupling, self-sustained oscillation, limit cycle

PACS: 42.50.-p, 42.65.Sf, 82.40.Bj

DOI: 10.7498/aps.62.204204

* Project supported by the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. GK201302010).

[†] Corresponding author. E-mail: zhanglincn@snnu.edu.cn