

# 全向入射条件下一维固流周期结构中 低频声裂隙变化特性研究\*

刘聪 徐晓东<sup>†</sup> 刘晓峻<sup>‡</sup>

(南京大学, 近代声学教育部重点实验室, 南京 210093)

(2013年5月30日收到; 2013年7月1日收到修改稿)

利用传递矩阵法, 从理论上建立了全向入射条件下一维固-流周期结构中的声传播模型, 在此基础上计算、分析并比较了无限周期结构的声能带结构和有限周期结构中的声传输特性. 研究表明, 当声波以一定的入射角入射时, 固-流周期结构的低频通带区域存在一个声裂隙, 该声裂隙所对应的入射角大小与构成周期结构的固体层和流体层的密度或结构尺寸无关, 而仅取决于构成该周期性结构材料的波速.

**关键词:** 传递矩阵, 全向入射, 固-流周期结构, 声裂隙

**PACS:** 43.35.Gk, 63.20.D-, 63.22.Np

**DOI:** 10.7498/aps.62.204302

## 1 引言

与光子晶体对光波的选择性作用相似, 声子晶体对声波亦具有选择性透过作用, 即声子晶体对在其中传播的声波表现出良好的通带和禁带特性, 因此声子晶体在滤波、减振、降噪等领域具有广阔的应用前景<sup>[1-5]</sup>. 通过在基体中引入周期性的散射体以实现弹性波的禁带与通带, Kushwaha 等<sup>[1]</sup>于1993年第一次明确提出了声子晶体的概念. 随着对声子晶体研究的逐渐深入, 近年来, 弹性波在声子晶体中的传播特性研究已成为声学领域中的热点之一. 其研究从一维结构逐渐推广到二维和三维结构, 尤其当声波在二维和三维声子晶体结构中传播时, 多维声子晶体结构在带隙特性、缺陷态等方面展示了独特性质<sup>[6-8]</sup>, 并为声子晶体的研究提供了许多借鉴. 相对于多维晶体结构, 一维声子晶体结构(一维周期结构)的优势在于它的解析和数值计算要求简单, 设计和实现可行性高<sup>[9,10]</sup>. 特别是一维固-流周期结构, 它不仅有着上述优点, 还具备了实时可调性(固体层可以在流体中任意移动),

而这一特点正是传统固-固周期结构所不具备的.

目前一些关于一维固-流周期结构中声波全向入射问题的研究仍然需要完善. 平面波展开法在解决固流耦合问题上存在缺陷<sup>[11]</sup>; 多重散射法主要用于处理二维、三维周期结构中的弹性波传播问题<sup>[11]</sup>; 对于给定激励、初始条件和特定边界条件的时域响应问题主要采用时域有限差分法进行分析<sup>[3,12]</sup>, 但该方法并不适用于解决全向入射问题. 本文针对目前一维固-流周期性结构研究中声波全向入射问题的不足之处, 结合传递矩阵法和布洛赫定理, 建立了不同入射角度下声波入射到一维固-流周期性结构中的理论模型, 并从连续状态参数的基本方程入手, 结合边界连续条件, 导出了全向入射条件下弹性波在一维固-流周期性结构中传播的传递矩阵, 在此基础上计算和比较了无限周期结构中的声能带结构和有限周期结构中的声传输特性. 研究发现当声波以某一入射角入射时, 固-流周期结构在低频通带存在一个声裂隙, 在此基础上, 进一步讨论了该声通带裂隙的位置所对应的入射角随周期性结构的结构参数以及材料

\* 国家自然科学基金(批准号: 11074126, 11274171, 11074124)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20120091110001)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: xdxu@nju.edu.cn

<sup>‡</sup> 通讯作者. E-mail: liuxiaojun@nju.edu.cn

参数的变化特性.

## 2 理论模型

一束在流体中传播的平面声波以一定角度射入一个有限周期的固-流周期结构中, 当该平面声波透过固-流周期性结构后, 以相应的角度进入另一半无限流体中, 其传播过程如图 1 所示. 固-流周期性结构中厚度为  $d_1$  的固体层 (如层 2, 其密度为  $\rho_S$ , 纵波速为  $v_{SL}$ , 横波速为  $v_{ST}$ ) 和厚度为  $d_2$  的流体层 (如层 3, 其密度为  $\rho_F$ , 纵波速  $v_F$ ) 构成一个周期, 并做有限周期重复, 晶格周期为  $D = d_1 + d_2$ , 半无限层 1 和半无限层  $N + 1$  分别为入射层和透射层. 以声波的入射方向和固-流周期结构的法线所在的平面为  $x$ - $z$  坐标平面, 以入射声波与固-流周期性结构相交的入射点为坐标原点, 建立如图 1 中所示的直角坐标系. 图中入射平面波  $I$  (纵波) 以入射角  $\theta_i$  斜入射周期结构,  $R$  和  $T$  分别为反射波和透射波.

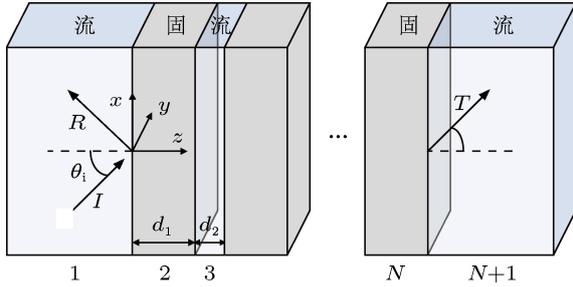


图 1 有限周期的一维固-流周期结构的示意图

如图 1 所示, 由于采用的入射平面声波在  $y$  方向上无限延伸, 因而沿不同入射角度入射的声波在周期性固-流结构中传播的三维理论模型可简化为二维理论模型. 在固体层中, 任意一点的标量声势和矢量声势分别表示为

$$\begin{aligned} \Phi_S &= (Ae^{j\alpha z} + Be^{-j\alpha z})e^{j\sigma x}, \\ \Psi_S &= (0, \Psi_y^S, 0) \\ &= \left(0, (Ce^{j\beta z} + De^{-j\beta z})e^{j\sigma x}, 0\right), \end{aligned} \quad (1)$$

而在流体层中只存在标量声势

$$\Phi_F = (Ee^{j\gamma z} + Fe^{-j\gamma z})e^{j\sigma x}, \quad (2)$$

式中,  $\alpha = (k_{SL}^2 - \sigma^2)^{1/2}$ ,  $\beta = (k_{ST}^2 - \sigma^2)^{1/2}$ ,  $\gamma = (k_F^2 - \sigma^2)^{1/2}$ ,  $k_{SL} = \frac{\omega}{v_{SL}}$ ,  $k_{ST} = \frac{\omega}{v_{ST}}$ ,  $k_F = \frac{\omega}{v_F}$ ,  $v_{SL}$  和  $v_{ST}$  分别为固体中纵波和横波波速,  $v_F$  为流体的声

波波速,  $\sigma$  为各层波矢的  $x$  方向分量, 并且由于边界条件,  $\sigma$  在各层保持不变.

在流体与固体的分界面处应该满足如下边界条件: 1) 法向速度连续; 2) 法向和切向应力分别连续. 以图 1 中层  $n$  和层  $n + 1$  为例, 假定层  $n$  为固体层, 则层  $n + 1$  为流体层, 边界条件为

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{n+} = \begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{(n+1)-}, \quad (3)$$

$$(T_x)_{n+} = 0, \quad (4)$$

式中,  $v_z$ ,  $T_z$  和  $T_x$  分别为界面处的法向速度、法向应力和切向应力, 下标  $n+$  和  $(n + 1)-$  分别标示了固体层  $n$  的右界面和流体层  $n + 1$  的左界面, 其余类推.

利用声势表达式, 固体层中任意一点的速度和应力可表示为

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi_S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y^S}{\partial z}, \\ v_z &= \frac{\partial \Phi_S}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y^S}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} T_x &= j\mu_S \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] / \omega, \\ T_z &= j \left[ \lambda_S \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2\mu_S \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] / \omega, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 Lamé 常数  $\mu_S = \rho_S v_{ST}^2$ ,  $\lambda_S = \rho_S v_{SL}^2 - 2\mu_S$ ,  $\rho_S$  为固体层材料的密度. 而流体层中任意一点的速度和应力可表示为

$$v_x = \frac{\partial \Phi_F}{\partial x}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi_F}{\partial z}, \quad (7)$$

$$T_x = 0,$$

$$T_z = j \left[ \lambda_F \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] / \omega, \quad (8)$$

式中,  $\lambda_F = \rho_F v_F^2$ ,  $\rho_F$  为流体层材料的密度.

结合 (4), (5) 和 (6) 式在边界  $n-$  和  $n+$  处的表达式, 可将参数  $C$  和  $D$  用  $A$  和  $B$  表示, 即

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (9)$$

将 (9) 式反代入 (5) 和 (6) 式中, 可分别将固体层中  $n-$  和  $n+$  处的法向速度和法向应力写成关于  $A$  和  $B$  的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{n-} = L_1 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{n+} = L_2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (11)$$

同理, 流体层中  $(n+1)-$  和  $(n+1)+$  处的法向速度和法向应力为

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{(n+1)-} = L_3 \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{(n+1)+} = L_4 \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}. \quad (13)$$

(9)—(13) 式中矩阵  $Q, L_1, L_2, L_3$  和  $L_4$  的表达式及其简单推导过程均在附录 A 中给出. 综合 (3), (10)—(13) 式, 能够得到晶格单元的传递矩阵  $M_{n,n+1} = L_1 L_2^{-1} L_3 L_4^{-1}$  (单位模矩阵), 有

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{(n-1)+} = \begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{n-} = M_{n,n+1} \begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{(n+1)+}. \quad (14)$$

将上述过程拓展到如图 1 整个有限周期结构中, 则总传递矩阵  $M$  可写作:

$$M = M_2 M_3 \cdots M_{N-1} M_N = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

式中,  $M_N$  分别为第  $N$  层的传递矩阵. 由总传递矩阵  $M$  可以得到声压透射率 (透射声压与入射声压之比), 即  $t_p = p_t/p_i$ , 可写作:

$$t_p = \frac{2Z_T}{M_{11}Z_1 + M_{22}Z_T + M_{12}Z_1Z_T + M_{21}}, \quad (16)$$

而声压反射率 (反射声压与入射声压之比), 即  $r_p = p_r/p_i$ , 可写作:

$$r_p = \frac{M_{21} + M_{22}Z_T - M_{11}Z_1 - M_{12}Z_1Z_T}{M_{11}Z_1 + M_{22}Z_T + M_{12}Z_1Z_T + M_{21}}, \quad (17)$$

式中,  $Z_1$  和  $Z_T$  分别为入射层和透射层的法向声阻抗率.

对于无限周期结构来说, 由周期结构在  $z$  方向的周期性, 每个晶格单元满足基于布洛赫定理的周期边界条件, 则 (14) 式可表示为

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{(n-1)+} = e^{-ikD} \begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix}_{(n+1)+}, \quad (18)$$

式中,  $k$  为布洛赫波矢 ( $z$  方向),  $D$  为晶格周期. 显然,  $e^{-ikD}$  为晶格单元传递矩阵

$$M_{n,n+1} = \begin{pmatrix} M_{11}^{n,n+1} & M_{12}^{n,n+1} \\ M_{21}^{n,n+1} & M_{22}^{n,n+1} \end{pmatrix}$$

的特征值, 可得到

$$\cos(kD) = \frac{(M_{11}^{n,n+1} + M_{22}^{n,n+1})}{2}. \quad (19)$$

由上式可知, 当  $|\cos(kD)| \leq 1$  时, 布洛赫波矢  $k$  对应于实数, 布洛赫波为非衰减波, 对应于结构的通带, 反之则对应于禁带. 对于固定结构的晶格单元和固定的入射角  $\theta_1$ , (19) 式右侧为关于频率  $f$  的函数, 此时扫描频率  $f$  求解波矢  $k$ , 便可得到入射角为  $\theta_1$  时相应的色散曲线.

### 3 结果与讨论

根据上述理论模型, 分别构建两种周期性结构声子晶体, 即: 铝 - 水周期结构和有机玻璃 - 水周期结构. 其中构成铝 - 水周期结构的基本单元为一定厚度的铝层和水层, 铝层厚度为  $d_1 = 0.15750$  m, 水层厚度为  $d_2 = 0.03750$  m; 相应构成有机玻璃 - 水周期结构基本单元的有机玻璃层厚度为  $d_1 = 0.06675$  m, 水层厚度为  $d_2 = 0.03750$  m. 周期结构中所选用材料的声波波速和密度如表 1 所示. 按表 1 中所选取的参数, 由于水中声速小于铝的纵波波速和横波波速, 因此当声波由水入射到铝时, 存在第一临界角  $\theta_{C1} = \arcsin(v_F/v_{SL}) = 0.24$  rad 和第二临界角  $\theta_{C2} = \arcsin(v_F/v_{ST}) = 0.51$  rad, 如图 2(a) 中所示, 两竖直虚线分别为声波从水入射到铝时所应存在的第一临界角和第二临界角. 而当声波由水射入有机玻璃时, 由于声在水中的传播速度介于有机玻璃中纵波和横波波速之间, 此时仅存在第一临界角, 即  $\theta_{C1} = 0.60$  rad, 如图 2(b) 中竖直虚线所示. 图 2(a) 和 (b) 分别描述了无限周期的铝 - 水周期结构的能带随入射角  $\theta_1$  和入射波频率  $f$  的变化特性以及无限周期的有机玻璃 - 水周期结构的能带随入射角  $\theta_1$  和入射波频率  $f$  的变化特性. 图中灰色区域为通带, 空白区域为禁带.

表 1 铝、有机玻璃和水的声学参量

材料	密度/kg·m <sup>-3</sup>	纵波波速/m·s <sup>-1</sup>	横波波速/m·s <sup>-1</sup>
铝	2700	6300	3100
有机玻璃	1180	2670	1120
水	1000	1500	无

如图 2(a) 所示, 无限周期的铝 - 水周期结构的能带呈带状分布, 当入射角  $\theta_1$  较小的时候, 通带在高频和低频处均有分布, 然而当入射角  $\theta_1$  较大的

时候, 高频处的通带逐渐消失并向低频衰减. 当入射层中入射波的入射角  $\theta_i > \theta_{C2}$  时, 声波在固体层中将以倏逝波的形式存在, 且声场强度随着进入固体层深度的增长呈指数衰减. 然而由图 2(a) 可以看到, 当入射角  $\theta_i > \theta_{C2}$  时, 通带并不因为倏逝波的出现而立即消失, 而是从  $\theta_i = 0.62$  左右才开始逐渐向低频移动. 当入射波由水层入射到有机玻璃层时, 由于第二临界角的缺失, 入射的纵波总是能够在固-流界面处经过模式转换后以横波的形式进入固体层, 因此, 当入射角逐渐变大时, 通带区域并不会萎缩, 如图 2(b) 所示.

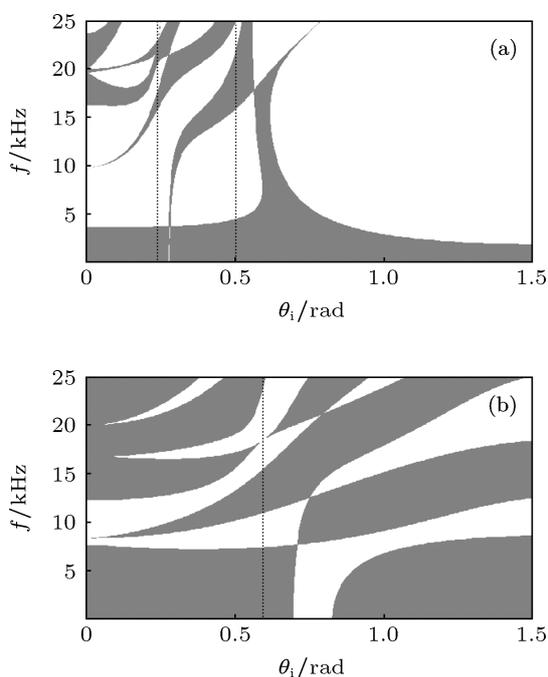


图 2 (a) 无限周期铝 - 水周期结构的能带随入射角和频率的变化; (b) 无限周期有机玻璃 - 水周期结构的能带随入射角和频率的变化

另一方面, 当晶体结构为有限周期时 (如图 1 所示), 采用传递矩阵法来计算该有限周期结构的声压透射系数  $t_p = p_t/p_i$  的强度. 以铝 - 水周期结构为例, 其晶格参数和图 2(a) 中的一致, 令两个半无限层也同样为水, 并且取晶体中的层数  $N = 12$  (五个固 - 流周期 + 额外一层铝板), 图 3 给出了透射系数随着入射角  $\theta_i$  和入射波频率  $f$  的变化, 图中颜色的变化标示了透射的强弱. 可以看到, 图 3 中的透射率分布与图 2(a) 中的禁带和通带分布相符合.

观察图 2(a) 和图 3 发现, 在低频区域 (50—3700 Hz), 入射角为 0.28 rad 左右时存在一个通带

裂隙. 为了研究该声通带裂隙的特点及其在频率坐标上的逐渐形成过程, 保持晶格参数和图 2(a) 的一致, 将入射角  $\theta_i$  固定为 0.28 rad, 图 4(a) 给出了在无限周期铝 - 水周期结构中,  $\cos(kD)$  随频率  $f$  变化图, 两条黑色水平实线分别标示了  $\pm 1$  的位置; 图 4(b), (c) 和 (d) 分别给出了在有限周期结构中当  $N = 2, N = 4$  和  $N = 12$  (分别对应一层铝板、两层铝板和六层铝板), 入射角固定  $\theta_i = 0.28$  rad 时, 声压透射系数  $t_p$  随着频率的变化 (实线). 可以观察到, 当  $N$  足够大时, 如图 4(d), 有限周期结构的透射系数和图 4(a) ( $|\cos(kD)| > 1$  时为禁带) 符合, 且随着  $N$  的增加, 第二禁带从无到有逐渐形成, 基于布拉格散射理论<sup>[13]</sup>, 该禁带是由于周期结构的周期性作用而形成. 而对于第一禁带, 该禁带在  $N = 2$  就已经形成雏形, 即只要在水中插入一层铝板就会导致这个禁带的形成. 比较图 4(b) 和 (a) 可知, 图 4(b) 第一禁带的位置对应着图 4(a) 中布洛赫波矢的虚部趋于无穷大 (迅速衰减), 而第二禁带 (布拉格禁带) 对应的布洛赫波矢的虚部仅仅是有限数. 作为对照, 图 4(b) 中还给出了同一条件下声压反射系数  $r_p$  随着频率的变化曲线, 如图中虚线所示, 声压反射系数  $r_p$  随频率的变化能够与声压透射系数  $t_p$  相符合, 满足声能流守恒. 而当纵波以  $\theta_i = 0.28$  rad 从半无限水层入射半无限铝层时, 声压反射系数  $r_p$  并不随着频率的变化, 为一恒定值, 如图 4(b) 中点线所示. 观察图 2(b) 中无限周期有机玻璃 - 水周期结构的能带结构, 同样能够发现在低频区域中存在一通带裂隙, 位于 0.70—0.83 rad 处. 可以看出, 在所有类似的一维固 - 流周期结构中都存在这样一个通带裂隙, 且对应的布洛赫波矢虚部趋于无穷大.

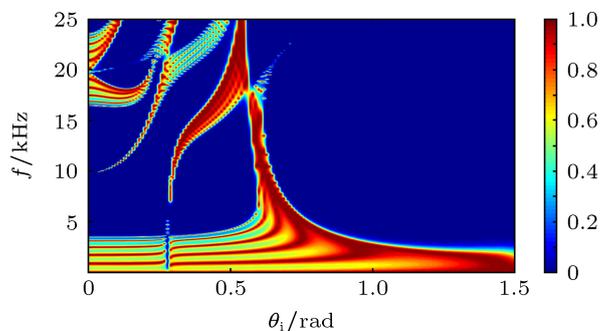


图 3 有限周期铝 - 水周期结构的声压透射系数随入射角和频率的变化

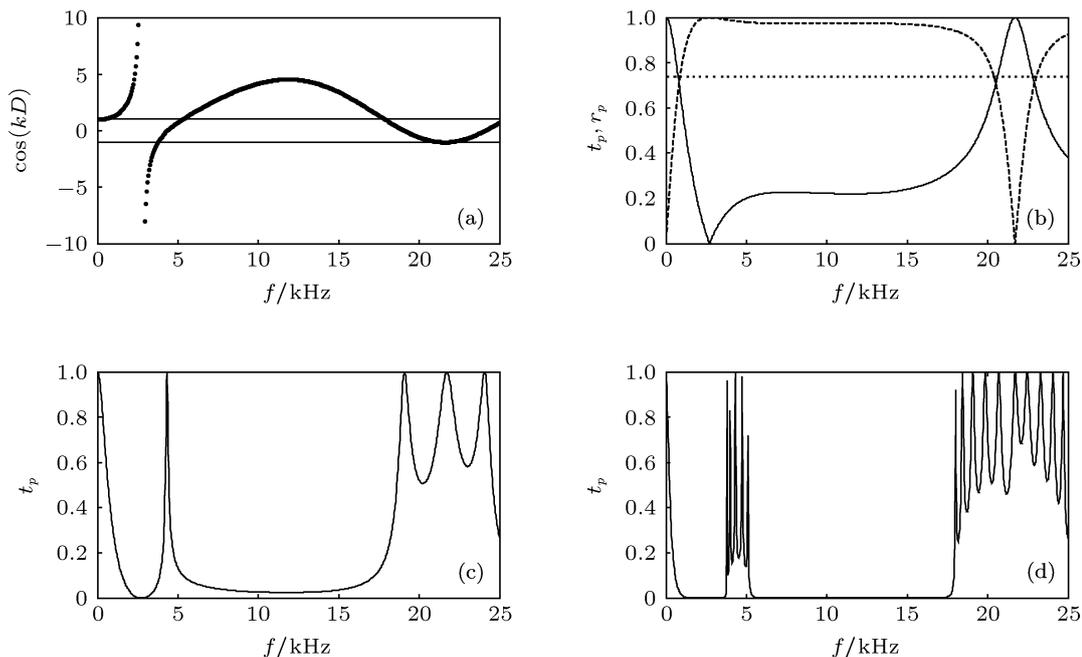


图 4 (a) 在无限周期铝 - 水周期结构中,  $\cos(kD)$  随频率的变化; (b) 当  $N = 2$ , 入射角固定在  $\theta_i = 0.28$  rad 时, 透射系数  $t_p$  (实线) 和反射系数  $r_p$  (虚线) 随着频率的变化以及纵波以  $\theta_i = 0.28$  rad 从半无限水层入射半无限铝层时的反射系数  $r_p$  (点线); (c) 当  $N = 4$ , 入射角固定在  $\theta_i = 0.28$  rad 时, 透射系数  $p_t/p_i$  随频率的变化; (d) 当  $N = 12$ , 入射角固定在  $\theta_i = 0.28$  rad 时, 透射系数  $p_t/p_i$  随频率的变化

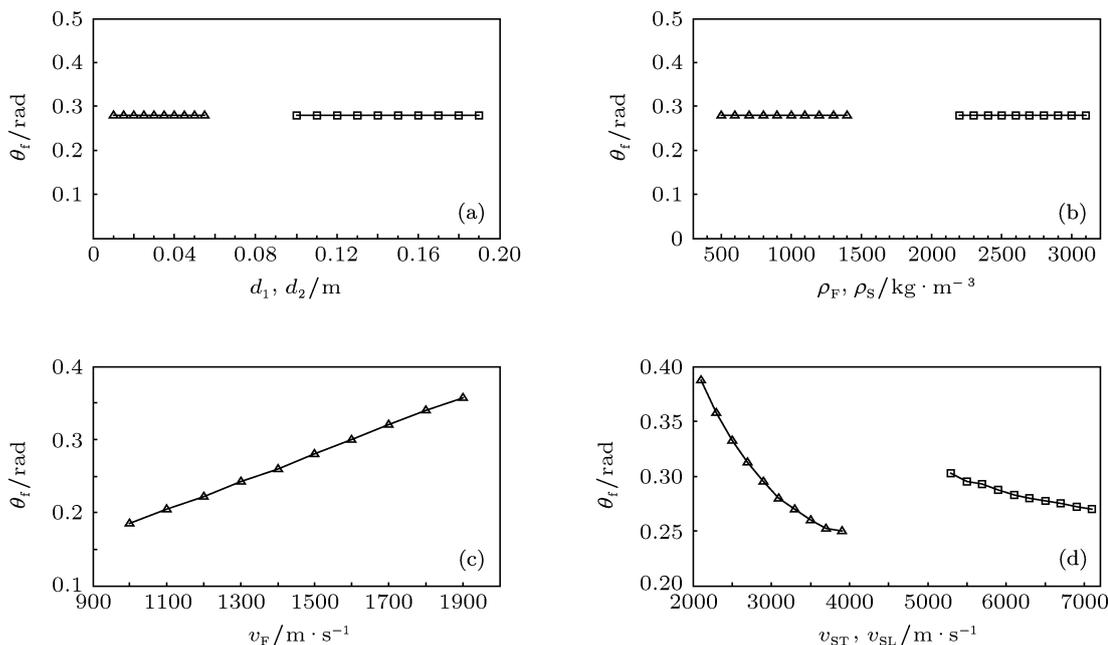


图 5 (a) 低频通带裂隙的位置随着流体层厚度和固体层厚度的变化; (b) 低频通带裂隙的位置随着流体层和固体层材料密度的变化; (c) 低频通带裂隙的位置随着流体层材料声速的变化; (d) 低频通带裂隙的位置随着固体层材料横波波速和纵波波速的变化

保持晶格参数和图 2(a) 中的一致, 分别改变固体层和流体层的厚度、密度等参数, 仅考虑这个低频通带裂隙的位置  $\theta_i$  随固体层和流体层某一材料参数或结构参数变化的规律. 计算结果发现, 此裂隙所对应的角度不随固体层和流体层的密度、尺寸变化, 仅和它们的声波波速相关. 如图 5 所示, 图 5(a) 和 (b) 分别展示了该低频通带裂隙的位置随着

固体层厚度  $d_1$  (图 5(a) 中方块)、固体层密度  $\rho_S$  (图 5(b) 中方块)、流体层厚度  $d_1$  (图 5(a) 中正三角) 和流体层密度  $\rho_F$  (图 5(b) 中正三角) 的变化规律; 图 5(c) 和 (d) 分别展示了该低频通带裂隙的位置随着流体层材料声速  $v_F$  (图 5(c) 中正三角)、固体层材料横波波速  $v_{ST}$  (图 5(d) 中正三角) 和固体层材料纵波波速  $v_{SL}$  (图 5(d) 中方块) 的变化规律. 由图 5 可

可以看出,该低频通带声裂隙的位置不受  $d_1, d_2, \rho_S$  和  $\rho_F$  改变的影响,而仅随  $v_F, v_{ST}$  和  $v_{SL}$  的改变单调变化. 在波速相对不宽的变化范围内,裂隙的位置随  $v_F$  的增大呈单调近似线性递增(如图 5(c) 所示);另一方面,裂隙位置受  $v_{ST}$  的影响相对较大,并随着  $v_{ST}$  的增大下移速度减缓,同时,其位置受  $v_{SL}$  影响相对较小并随  $v_{SL}$  的增大呈单调递减(如图 5(d) 所示).

## 4 结论

基于传递矩阵法,从理论上推导了全向入射条件下一维固-流周期结构的传递矩阵. 在此理论的基础上,分别计算了无限周期和有限周期的一维固-流周期结构在全向入射条件下的能带结构和传输特性. 计算结果表明,当入射角大于第二临界角

$\theta_{C2} = \arcsin(v_f/v_{ST})$  的时候,声波在固体中仅仅以倏逝波的形式存在,此时,通带并不是立即消失,而是从某个大于第二临界角的角度开始逐渐衰减. 在全向入射条件下,固-流周期结构的能带结构在低频处存在一个声通带裂隙. 该裂隙的布洛赫波矢与其他禁带的不同:该禁带所对应的布洛赫波矢的虚部趋于无穷大,即声波衰减十分迅速,仅需在流体中插入一层固体层该禁带就会出现;而其他禁带所对应的布洛赫波矢的虚部为有限数,禁带是由于周期结构的周期性作用而形成. 进一步研究表明,该通带裂隙的位置仅随固体层和流体层材料的声波波速单调变化,而和它们的材料密度和晶格尺寸无关. 利用此性质不但可以通过控制材料声速以调节低频通带裂隙的位置,相反也可通过确定低频通带裂隙的位置,以表征材料的声学特性.

## 附录 A

结合 (4), (5) 和 (6) 式在边界  $n-$  和  $n+$  处的表达形式有:

$$\begin{cases} T_x|_{z=0, x=0} = j\mu_S [(\beta^2 - \sigma^2)(C + D) - 2\sigma\alpha(A - B)]/\omega = 0, \\ T_x|_{z=d_1, x=0} = j\mu_S [(\beta^2 - \sigma^2)(Ce^{j\beta d_1} + De^{-j\beta d_1}) - 2\sigma\alpha(Ae^{j\alpha d_1} - Be^{-j\alpha d_1})]/\omega = 0, \end{cases} \quad (A1)$$

由此可得 (9) 式中  $Q$  的表达式为

$$Q = \frac{2\sigma\alpha}{(\beta^2 - \sigma^2)(e^{j\beta d_1} - e^{-j\beta d_1})} \begin{pmatrix} e^{j\alpha d_1} - e^{-j\beta d_1} & e^{-j\beta d_1} - e^{-j\alpha d_1} \\ e^{j\beta d_1} - e^{j\alpha d_1} & e^{-j\alpha d_1} - e^{j\beta d_1} \end{pmatrix}. \quad (A2)$$

(5) 和 (6) 式中法向速度和法向应力在边界  $n-$  处的表达式可描述为

$$\begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix} \Big|_{z=0, x=0} = \begin{pmatrix} j\alpha(A - B) + j\sigma(C + D) \\ j[(-\lambda_S\sigma^2 - \lambda_S\alpha^2 - 2\mu_S\alpha^2)(A + B) - 2\mu_S\beta\sigma(C - D)]/\omega \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + P_2 \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (P_1 + P_2Q) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (A3)$$

即有  $L_1 = P_1 + P_2Q$ , 其中:

$$P_1 = \begin{pmatrix} j\alpha & -j\alpha \\ j(-\lambda_S\sigma^2 - \lambda_S\alpha^2 - 2\mu_S\alpha^2)/\omega & j(-\lambda_S\sigma^2 - \lambda_S\alpha^2 - 2\mu_S\alpha^2)/\omega \end{pmatrix}, \quad (A4)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} j\sigma & j\sigma \\ -j(2\mu_S\beta\sigma)/\omega & j(2\mu_S\beta\sigma)/\omega \end{pmatrix}. \quad (A5)$$

同理, (5) 和 (6) 式中法向速度和法向应力在边界  $n+$  处的表达式具体写作:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_z \\ T_z \end{pmatrix} \Big|_{z=d_1, x=0} &= \begin{pmatrix} j\alpha(Ae^{j\alpha d_1} - Be^{-j\alpha d_1}) + j\sigma(Ce^{j\beta d_1} + De^{-j\beta d_1}) \\ j[(-\lambda_S\sigma^2 - \lambda_S\alpha^2 - 2\mu_S\alpha^2)(Ae^{j\alpha d_1} + Be^{-j\alpha d_1}) - 2\mu_S\beta\sigma(Ce^{j\beta d_1} - De^{-j\beta d_1})]/\omega \end{pmatrix} \\ &= P_3 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + P_4 \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = (P_3 + P_4Q) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (A6)$$

即有  $L_2 = P_3 + P_4 Q$ , 其中:

$$P_3 = \begin{pmatrix} j\alpha e^{j\alpha d_1} & -j\alpha e^{-j\alpha d_1} \\ j(-\lambda_S \sigma^2 - \lambda_S \alpha^2 - 2\mu_S \alpha^2) e^{j\alpha d_1} / \omega & j(-\lambda_S \sigma^2 - \lambda_S \alpha^2 - 2\mu_S \alpha^2) e^{-j\alpha d_1} / \omega \end{pmatrix}, \quad (A7)$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} j\sigma e^{j\beta d_1} & j\sigma e^{-j\beta d_1} \\ -j(2\mu_S \beta \sigma e^{j\beta d_1}) / \omega & j(2\mu_S \beta \sigma e^{-j\beta d_1}) / \omega \end{pmatrix}, \quad (A8)$$

那么, 对于流体层, 可分别推得:

$$L_3 = \begin{pmatrix} j\gamma & -j\gamma \\ -j\rho_F \omega & -j\rho_F \omega \end{pmatrix}, \quad (A9)$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} j\gamma e^{j\gamma d_2} & -j\gamma e^{-j\gamma d_2} \\ -j\rho_F \omega e^{j\gamma d_2} & -j\rho_F \omega e^{-j\gamma d_2} \end{pmatrix}. \quad (A10)$$

- 
- [1] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [2] Martinezsala R, Sancho J, Sanchez J V, Gomez V, Llinares J, Meseguer F 1995 *Nature* **378** 241
- [3] Wang G, Wen J H, Han X Y, Zhao H G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1943 (in Chinese) [王刚, 温激鸿, 韩小云, 赵宏刚 2003 物理学报 **52** 1943]
- [4] Wen J H, Wang G, Yu D L, Zhao H G, Liu Y Z 2005 *J. Appl. Phys.* **97** 114907
- [5] Gao G Q, Ma S L, Jin F, Kim T B, Lu T J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 393 (in Chinese) [高国钦, 马守林, 金峰, 金东范, 卢天健 2010 物理学报 **59** 393]
- [6] Zhao D G, Liu Z Y, Qiu C Y, He Z J, Cai F Y, Ke M Z 2007 *Phys. Rev. B* **76** 144301
- [7] Jia H, Ke M Z, He Z J, Peng S S, Liu G Q, Mei X F, Liu Z Y 2009 *J. Appl. Phys.* **106** 044512
- [8] Wei Q, Cheng Y, Liu X J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 124301 (in Chinese) [魏琦, 程营, 刘晓峻 2011 物理学报 **60** 124301]
- [9] El Hassouani Y, El Boudouti E H, Djafari-Rouhani B, Aynaou H, Dobrzynski L 2006 *Phys. Rev. B* **74** 144306
- [10] El Hassouani Y, El Boudouti E H, Djafari-Rouhani B, Rais R 2007 *J. Phys.: Conf. Ser.* **92** 012113
- [11] Kafesaki M, Economou E N 1999 *Phys. Rev. B* **60** 11993
- [12] Sigalas M M, Garcia N 2000 *J. Appl. Phys.* **87** 3122
- [13] Notomi M 2000 *Phys. Rev. B* **62** 10696

# Acoustic band fracture variation of low frequency transmission zone in one-dimensional solid-fluid periodic structures under omnidirectional incidence\*

Liu Cong Xu Xiao-Dong<sup>†</sup> Liu Xiao-Jun<sup>‡</sup>

(Key Laboratory of Modern Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

(Received 30 May 2013; revised manuscript received 1 July 2013)

## Abstract

In order to study the characteristics of acoustic/elastic wave propagation in one-dimensional (1D) solid-fluid periodic structure incited by omnidirectional incidence, a theoretical model of wave propagation in 1D solid-fluid periodic structure is established using a transfer matrix method. Based on this model, the band structures of the infinite case and the transmission properties of the finite one are further calculated and analyzed. The results show that an acoustic band fracture appears in the low frequency transmission zone for a certain incident angle. The corresponding incident angle of the fracture is non-relevant to the mass densities or the thicknesses of the solid and fluid layers constituting the periodic structure, and determined only by the wave velocity of the constituent material.

**Keywords:** transfer matrix, omnidirectional incidence, solid-fluid periodic structure, acoustic band fracture

**PACS:** 43.35.Gk, 63.20.D-, 63.22.Np

**DOI:** 10.7498/aps.62.204302

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11074126, 11274171, 11074124) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20120091110001).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xdxu@nju.edu.cn

<sup>‡</sup> Corresponding author. E-mail: liuxiaojun@nju.edu.cn