

分数阶质量涨落谐振子的共振行为*

蔚涛¹⁾²⁾ 罗懋康^{1)†} 华云²⁾

1) (四川大学数学学院, 成都 610064)

2) (电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

(2013年5月28日收到; 2013年7月23日收到修改稿)

针对黏性介质引起的 Brown 粒子质量存在随机涨落以及阻尼力对历史速度具有记忆性等问题, 本文首次提出分数阶质量涨落谐振子模型, 以考察黏性介质中 Brown 粒子的动力学特性. 首先, 将 Shapiro-Logvinov 公式分数阶化, 使之适用于对含指数关联随机系数的分数阶随机微分方程的求解. 然后, 利用随机平均法和分数阶 Shapiro-Logvinov 公式推导系统稳态响应振幅的解析表达式, 并据此研究系统的共振行为; 最后, 通过仿真实验验证理论结果的可靠性. 研究表明: 1) 质量涨落噪声可诱导系统产生随机共振行为; 2) 记忆性阻尼力可诱导系统产生参数诱导共振行为; 3) 不同参数条件下, 系统表现出单峰共振、双峰共振等多样化的共振形式.

关键词: 黏性介质, 质量涨落, 阻尼记忆性, 分数阶谐振子

PACS: 05.40.-a, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.62.210503

1 引言

谐振子无论在经典物理、量子物理或是统计物理中, 都是一个重要的基础性模型. 任何一个在平衡态附近作往复运动的稳定系统, 都可以用谐振子加以描述. 确定性谐振子的基本形式如下:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = A_0 \cos(\Omega t).$$

在经典物理中, 对确定性谐振子的物理机理和效应的研究已趋成熟^[1]. 然而, 一切自然现象都会受到随机力的影响, 为此, 需针对具体情况在模型中引入随机力以实现对问题的准确刻画和深入研究^[2-5].

在统计物理中, 随机谐振子常用于描述 Brown 粒子在简谐势场力作用下的运动规律, 其基本形式如下:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t).$$

该模型用于刻画 Brown 粒子在理想液体中的运动. 此时, 根据 Stokes 定理^[6], 环境介质对 Brown 粒子

的阻尼力正比于粒子的当前速度, 被建模为 $\gamma \dot{x}(t)$; 根据耗散涨落定理^[7], 环境分子碰撞 Brown 粒子而产生的涨落力 $\eta(t)$ 被建模为高斯白噪声. 然而, 很多物理、生物、化学系统中的环境介质常为黏性介质^[8-11], 这就使得: 1) 环境分子具有一定吸附能力, 会随机地吸附于 Brown 粒子, 使 Brown 粒子质量存在随机涨落; 2) Brown 粒子受到的阻尼力不再仅仅取决于粒子的当前速度, 而是依赖于粒子的所有历史速度, 其运动轨迹为非 Markov 过程. 为此, 需在模型中引入刻画随机质量涨落的噪声, 以及刻画阻尼记忆性的阻尼核函数.

Gitterman 等^[12-14] 在模型中引入质量涨落噪声 $\xi(t)$, 以刻画黏性介质所引起的随机质量涨落, 并考察其对系统动力学特性的影响:

$$\begin{aligned} (m + \xi(t)) \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x(t) \\ = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t). \end{aligned}$$

Mankin 等^[15,16] 在模型中引入幂律阻尼核函数 $\beta(t) = |t|^{-\alpha} / \Gamma(1 - \alpha)$, 以刻画阻尼力对历史速度的

* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)和电子信息控制重点实验室项目(批准号: 2013035)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

记忆特性, 得到如下分数阶谐振子模型:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \mathcal{D}^\alpha x(t) + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta^H(t),$$

也即

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \int_0^t \beta(t-u) \dot{x}(u) du + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta^H(t),$$

并据此研究了阻尼记忆性对系统共振行为的影响. 目前, 对黏性介质中 Brown 运动的研究^[17-19] 都是分别围绕随机质量涨落和阻尼记忆性展开, 尚未见对两者的联合研究. 这些工作为考察黏性介质中 Brown 粒子的运动规律提供了基础, 更为全面、深入的研究工作还有待继续.

本文关注黏性介质对系统共振行为的影响, 为此, 在模型中同时引入了质量涨落噪声 $\xi(t)$ 和幂律阻尼核函数 $\beta(t)$, 得到如下分数阶质量涨落谐振子:

$$(m + \xi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \mathcal{D}^\alpha x(t) + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta^H(t).$$

在此基础上, 推导了系统稳态响应振幅的解析表达式, 并根据相应数值结果, 分析了随机质量涨落和阻尼记忆特性对系统共振行为的影响, 发现该系统具有真实共振、参数诱导共振、随机共振等丰富的共振行为, 以及单峰共振、双峰共振等多样化的共振形式. 最后, 通过仿真实验分析了仿真结果与理论结果的符合情况, 两者的一致性体现了本文研究结果的可靠性及其对实际应用的指导价值.

2 系统模型及系统稳态响应振幅

2.1 系统模型

分数阶质量涨落谐振子可由如下随机微分方程描述:

$$(m + \xi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma \mathcal{D}^\alpha x(t) + m\omega^2 x(t) = A_0 \cos(\Omega t) + \eta^H(t), \quad (1)$$

其中, $0 < \alpha \leq 1$, \mathcal{D}^α 为 Caputo 分数阶微分, $x(t)$ 代表振子位移, m 为振子质量, γ , ω 分别表示系统的阻力系数和固有频率, $A_0 \cos(\Omega t)$ 代表系统的外部驱动信号, 其振幅和频率分别为 A_0 , Ω .

$\xi(t)$ 表示黏性介质引起的振子质量随机涨落, 为系统外噪声. 本文将 $\xi(t)$ 建模为具有指数关联性的对称双态噪声, 在 $\{\sigma, -\sigma\}$, $\sigma \geq 0$ 中取值, 满足如下统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t) \xi(s) \rangle &= \sigma^2 \exp(-\lambda |t-s|), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, σ , λ 分别表示噪声强度和噪声相关率. 为保证涨落质量 $m + \xi(t)$ 始终为正, 噪声参数选取应满足 $\sigma < m$.

$\eta^H(t)$ 表示系统内部环境分子热运动所引起的随机涨落力, 为系统内噪声, 满足如下涨落耗散定理^[7]:

$$\begin{aligned} \langle \eta^H(t) \eta^H(s) \rangle &= k_B T \gamma \beta(t-s) \\ &= k_B T \gamma \frac{|t-s|^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, k_B 为波尔兹曼常数, T 为环境介质的绝对温度. 据此, 本文将 $\eta^H(t)$ 建模为分数阶高斯噪声^[7], 满足如下的统计性质:

$$\begin{aligned} \langle \eta^H(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta^H(t) \eta^H(s) \rangle &= 2DH(2H-1)|t-s|^{2H-2}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中, D 为噪声强度. 进一步, 对比 (3) 式和 (4) 式可得

$$\begin{aligned} H &= (2-\alpha)/2, \\ D &= k_B T \gamma / \Gamma(3-\alpha). \end{aligned} \quad (5)$$

最后, 由于内、外噪声起源不同, 本文假设 $\xi(t)$ 和 $\eta^H(t)$ 互不相关, 即

$$\langle \xi(t) \eta^H(s) \rangle = 0. \quad (6)$$

3 系统稳态响应振幅

3.1 分数阶 Shapiro-Loginov 公式

Shapiro-Loginov 公式是求解含指数关联随机系数的随机微分方程的有效工具, 在求解各种物理和工程问题中具有重要作用, 其一般形式如下:

定理1 (Shapiro-Loginov 公式)^[20] 若 $\zeta(t)$ 为具有如下统计特性的零均值指数关联噪声,

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(t) \zeta(s) \rangle &= D_\zeta \lambda_\zeta \exp(-\lambda_\zeta |t-s|), \end{aligned} \quad (7)$$

$\phi(t)$ 是 $\zeta(t)$ 的函数, 则有如下的 Shapiro-Loginov 公式成立:

$$\langle \zeta(t) \frac{d}{dt} \phi(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \zeta(t) \phi(t) \rangle + \lambda_\zeta \langle \zeta(t) \phi(t) \rangle. \quad (8)$$

对含指数关联随机系数的整数阶随机微分方程而言, 利用 Shapiro-Loginov 公式往往能够实现变量统一, 完成对方程的求解. 对相应的分数阶随机微分方程, 为实现解析求解, 需将经典 Shapiro-Loginov 公式进行推广, 为此, 我们给出如下分数阶 Shapiro-Loginov 公式.

定理2(分数阶 Shapiro-Loginov 公式) 若 $\zeta(t)$ 为具有如下统计特性的零均值指数关联噪声,

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \zeta(t) \zeta(s) \rangle &= D_\zeta \lambda_\zeta \exp(-\lambda_\zeta |t-s|), \end{aligned} \quad (9)$$

$\phi(t)$ 是 $\zeta(t)$ 的函数, 则有如下的分数阶 Shapiro-Loginov 公式成立:

$$\langle \zeta(t) \mathcal{D}^\alpha \phi(t) \rangle = e^{-\lambda_\zeta t} \mathcal{D}^\alpha (\langle \zeta(u) \phi(t) \rangle e^{\lambda_\zeta t}). \quad (10)$$

证明 由 Caputo 分数阶微分定义可得

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t) \mathcal{D}^\alpha \phi(t) \rangle &= \langle \zeta(t) \int_0^t \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \dot{\phi}(u) du \rangle \\ &= \int_0^t \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \langle \zeta(t) \dot{\phi}(u) \rangle du, \end{aligned} \quad (11)$$

对 $\langle \zeta(t) \dot{\phi}(u) \rangle$, 由 Shapiro-Loginov 公式有

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta(t) \dot{\phi}(u) \rangle = -\lambda_\zeta \langle \zeta(t) \dot{\phi}(u) \rangle. \quad (12)$$

求解方程 (12) 可得

$$\langle \zeta(t) \dot{\phi}(u) \rangle = e^{-\lambda_\zeta |t-s|} \langle \zeta(u) \dot{\phi}(u) \rangle, \quad (13)$$

将 (13) 式代入 (11) 式有

$$\begin{aligned} &\langle \zeta(t) \mathcal{D}^\alpha \phi(t) \rangle \\ &= \int_0^t \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{-\lambda_\zeta(t-u)} \langle \zeta(u) \dot{\phi}(u) \rangle du \\ &= \int_0^t \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{-\lambda_\zeta(t-u)} \left(\frac{d \langle \zeta(u) \phi(u) \rangle}{du} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_\zeta \langle \zeta(u) \phi(u) \rangle \right) du \\ &= e^{-\lambda_\zeta t} \int_0^t \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(e^{\lambda_\zeta u} \frac{d \langle \zeta(u) \phi(u) \rangle}{du} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_\zeta e^{\lambda_\zeta u} \langle \zeta(u) \phi(u) \rangle \right) du \\ &= e^{-\lambda_\zeta t} \int_0^t \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d(e^{\lambda_\zeta u} \langle \zeta(u) \phi(u) \rangle)}{du} du \\ &= e^{-\lambda_\zeta t} \mathcal{D}^\alpha (\langle \zeta(t) \phi(t) \rangle e^{\lambda_\zeta t}). \end{aligned} \quad (14)$$

由此, 定理得证.

容易验证, 当 $\alpha = 1$ 时, 分数阶 Shapiro-Loginov (10) 式将退化为经典 Shapiro-Loginov (8) 式. 利用该分数阶 Shapiro-Loginov 公式可实现分数阶随机微分方程的变量统一, 完成对方程的求解.

3.2 系统响应振幅

下面我们利用分数阶 Shapiro-Loginov 公式, 通过随机平均法推导系统稳态响应振幅的解析表达式.

对模型 (1) 两端取均值后结合 Shapiro-Loginov 公式可得

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t) x(t) \rangle \\ + \gamma \mathcal{D}^\alpha \langle x(t) \rangle + m \omega^2 \langle x(t) \rangle = A_0 \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式中出现了耦合项 $\langle \xi(t) x(t) \rangle$, 需另建变量 $\langle x(t) \rangle$, $\langle \xi(t) x(t) \rangle$ 所满足的方程以实现对变量的联立求解. 为此, 在模型 (1) 两端同乘 $\xi(t)$ 后取均值, 结合 Shapiro-Loginov 公式和分数阶 Shapiro-Loginov 公式给出:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t) x(t) \rangle + \sigma^2 \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} \\ + \gamma e^{-\lambda t} \mathcal{D}^\alpha (\langle \xi(t) x(t) \rangle e^{\lambda t}) + m \omega^2 \langle \xi(t) x(t) \rangle \\ = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

(15) 式和 (16) 式即构成了 $\langle x(t) \rangle$, $\langle \xi(t) x(t) \rangle$ 所满足的如下线性微分方程组:

$$\begin{aligned} \left(m \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \mathcal{D}^\alpha + m \omega^2 \right) \langle x(t) \rangle \\ + \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi(t) x(t) \rangle = A_0 \cos(\Omega t), \\ \sigma^2 \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \left[m \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 + m \omega^2 \right] \langle \xi(t) x(t) \rangle \\ + \gamma e^{-\lambda t} \mathcal{D}^\alpha (\langle \xi(t) x(t) \rangle e^{\lambda t}) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

为简化表达, 记 $\langle x(t) \rangle = x_1$, $\langle \xi(t) x(t) \rangle = x_2$. 对方程组 (17) 作 Laplace 变换得

$$\begin{aligned} d_{11} X_1(s) + d_{12} X_2(s) &= A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} + d_{13}, \\ d_{21} X_1(s) + d_{22} X_2(s) &= d_{23}. \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} d_{11} &= ms^2 + \gamma s^\alpha + m \omega^2, \\ d_{12} &= (s + \lambda)^2, \\ d_{13} &= (ms + \gamma s^{\alpha-1}) x_1(0) + m \dot{x}_1(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (s + 2\lambda)x_2(0) + \dot{x}_2(0), \\
 d_{21} & = \sigma^2 s^2, \\
 d_{22} & = m(s + \lambda)^2 + \gamma(s + \lambda)^\alpha + m\omega^2, \\
 d_{23} & = \sigma^2 s x_1(0) + \sigma^2 \dot{x}_1(0) \\
 & + (ms + 2m\lambda + \gamma(s + \lambda)^{\alpha-1})x_2(0) + m\dot{x}_2(0).
 \end{aligned}$$

求解方程组 (18) 可得

$$\begin{aligned}
 X_1(s) & = \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \\
 & + \frac{d_{13}d_{22} - d_{12}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}, \\
 X_2(s) & = -\frac{d_{21}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}} A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \\
 & + \frac{d_{11}d_{23} - d_{21}d_{13}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

对 (19) 式作 Laplace 逆变换, 并记 $x_3(0) = \dot{x}_1(0)$, $x_4(0) = \dot{x}_2(0)$, 可得

$$\begin{aligned}
 x_i(t) & = A_0 \int_0^t h_{i0}(t-t') \cos(\Omega t') dt' \\
 & + \sum_{k=1}^4 h_{ik}(t) x_k(0), \quad i = 1, 2. \quad (20)
 \end{aligned}$$

其中, $h_{ik}(t), k = 0, 1, \dots, 4$ 的 Laplace 变换 $H_{ik}(s)$ 可由方程组 (19) 确定. 特别地, $H_{10}(s)$ 为系统传递函数, 其具体表达式为

$$H_{10}(s) = \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}}. \quad (21)$$

在 (20) 式中, 令 $t \rightarrow \infty$, 经长时间演化, 系统响应对初始条件的依赖性逐渐消失, 系统逐步进入稳定状态. 此时, 系统稳态响应均值为

$$\begin{aligned}
 \langle x(t) \rangle_{as} & = \langle x(t) \rangle|_{t \rightarrow \infty} \\
 & = A_0 \int_0^t h_{10}(t-t') \cos(\Omega t') dt'. \quad (22)
 \end{aligned}$$

从信号与系统的角度, $\langle x(t) \rangle_{as}$ 可看作正弦信号 $A_0 \cos(\Omega t)$ 经传递函数为 $H_{10}(s)$ 的线性时不变系统作用后的输出, 因而可进一步表示为

$$\langle x(t) \rangle_{as} = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad (23)$$

其中, A 和 φ 分别表示系统稳态响应的振幅和相移, 满足

$$A = |H_{10}(j\Omega)|, \quad \varphi = \arg(H_{10}(j\Omega)). \quad (24)$$

利用 $H_{10}(s)$ 的表达式 (21), 可得 A 和 φ 的解析表达式:

$$A = A_0 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_3^2 + f_4^2}},$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 + f_2 f_4}\right). \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned}
 f_1 & = m\omega^2 - m\Omega^2 + m\lambda^2 + \gamma r^\alpha \cos(\alpha\theta), \\
 f_2 & = 2m\lambda\Omega + \gamma r^\alpha \sin(\alpha\theta), \\
 f_3 & = (m\omega^2 - m\Omega^2 + \gamma\Omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2))f_1 \\
 & - \gamma\Omega^\alpha \sin(\alpha\pi/2)f_2 - \sigma^2\Omega^4 + \sigma^2\Omega^2\lambda^2, \\
 f_4 & = (m\omega^2 - m\Omega^2 + \gamma\Omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2))f_2 \\
 & + \gamma\Omega^\alpha \sin(\alpha\pi/2)f_1 + 2\lambda\sigma^2\Omega^3, \\
 r & = \sqrt{\lambda^2 + \Omega^2}, \quad \theta = \arctan(\Omega/\lambda).
 \end{aligned}$$

4 系统稳态响应振幅的共振行为

在上一节中通过理论推导给出了系统稳态响应振幅 A 的解析表达式 (25), 下面结合相应数值结果, 讨论稳态响应振幅 A 随外部驱动频率 Ω 变化而产生的真实共振行为, 随质量涨落噪声强度 σ 变化而产生的随机共振行为, 以及随系统阻尼系数 γ 变化而产生的参数诱导共振行为.

4.1 稳态响应振幅的真实共振行为

4.1.1 质量涨落噪声对系统真实共振行为的影响

图 1(a) 给出了质量涨落噪声强度 $\sigma = 0.1, 0.4, 0.7$ 时的 $A-\Omega$ 变化曲线, 对比发现: 当 $\sigma = 0.1$ 时, 振幅 A 表现出传统的单峰共振行为, 且共振强度较大; 随着 σ 的增大, 当 $\sigma = 0.4$ 时, 振幅 A 表现出明显的双峰共振行为, 此时, 系统具有两个共振频率, 共振强度逐渐减弱; 随着 σ 的进一步增大, 当 $\sigma = 0.7$ 时, 振幅 A 仍然表现出明显的双峰共振行为, 共振峰位置逐渐外移, 共振强度进一步减弱.

图 1(b) 给出了质量涨落噪声相关率 $\lambda = 0.1, 0.4, 0.7$ 时的 $A-\Omega$ 变化曲线, 对比发现: 当 $\lambda = 0.1$ 时, 振幅 A 表现出明显的双峰共振行为, 且共振强度较大; 随着 λ 的增大, 当 $\lambda = 0.4$ 时, 振幅 A 仍然表现出双峰共振行为, 但峰值逐渐减小, 波谷逐渐升高, 双峰现象逐渐减弱; 随着 λ 的进一步增大, 当 $\lambda = 0.7$ 时, 波谷进一步升高, 从而形成了一个新共振峰, 双峰现象消失, 系统恢复到传统的单峰共振状态.

上述结果表明:黏性介质引起的随机质量涨落,使得相应谐振子具有单峰共振、双峰共振等多样化的真实共振形式;系统共振形式与质量涨落噪声统计性质密切相关,特别地,噪声强度较大、相关率较小时,系统将表现出传统谐振子所不具有的双峰真实共振行为。

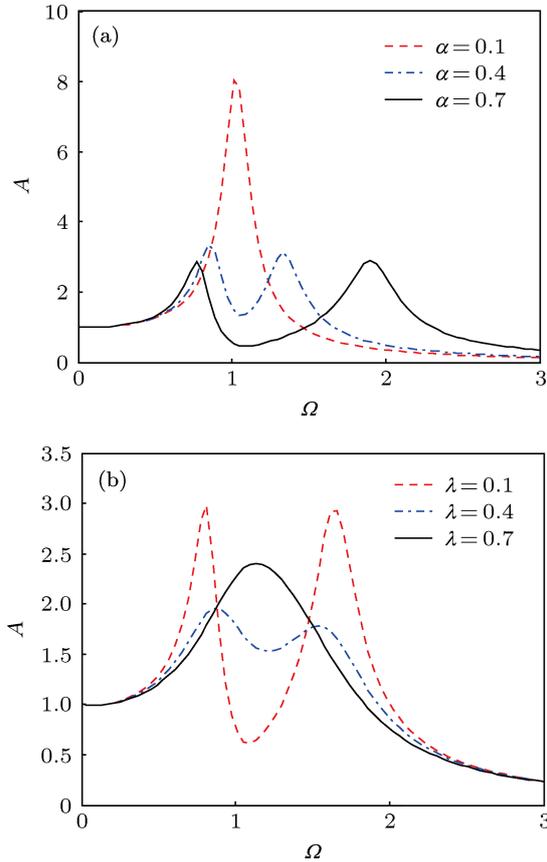


图1 振幅 A 随外部驱动频率 Ω 的变化 ($m = 1, \omega = 1, A_0 = 1, \gamma = 0.1, \alpha = 0.6$) (a) $\lambda = 0.1$; (b) $\sigma = 0.6$

4.1.2 系统阻尼特性对系统真实共振行为的影响

图 2(a) 给出了分数阶阶数 $\alpha = 0.1, 0.4, 1$ 时的 $A-\Omega$ 变化曲线,对比发现:当 $\alpha = 0.1$ 时,振幅 A 表现出明显的双峰共振行为,且第二个共振峰峰值较大;随着 α 的增大,当 $\alpha = 0.4$ 时,振幅 A 仍然表现出双峰共振行为,但峰值逐渐减小,且第二个共振峰的减小速度更快;随着 α 的进一步增大,当 $\alpha = 1$ 时,第一个共振峰逐渐增大,第二个共振峰继续减小直至消失,系统恢复到传统的单峰共振状态。

图 2(b) 给出了阻尼系数 $\gamma = 0.05, 0.5, 1$ 时的 $A-\Omega$ 变化曲线,对比发现:当 $\gamma = 0.05$ 时,振幅 A 表现出明显的双峰共振行为,且第二个共振峰峰值较大;随着 λ 的增大,当 $\lambda = 0.5$ 时,振幅 A 仍然表现出双峰共振行为,但峰值逐渐减小,且第二个共振

峰的减小速度更快;随着 λ 的进一步增大,当 $\lambda = 1$ 时,共振峰继续减小,第二个共振峰消失,系统恢复到传统的单峰共振状态。

上述结果表明:黏性介质引起的记忆性阻尼特性,也能使相应谐振子具有单峰共振、双峰共振等多样化的真实共振形式;系统共振形式与阻尼特性参数密切相关,特别地,分数阶阶数和阻尼系数较小时,系统将表现出传统谐振子所不具有的双峰真实共振行为。

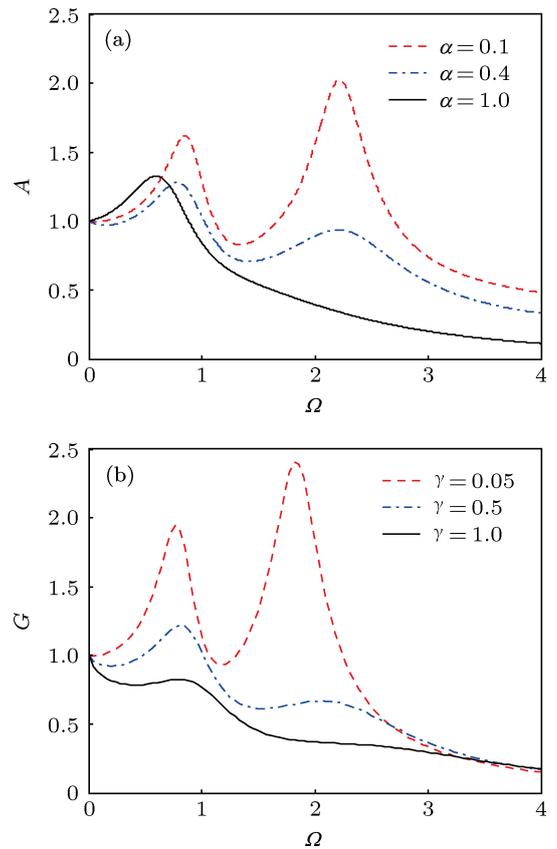


图2 振幅 A 随外部驱动频率 Ω 的变化 ($m = 1, \omega = 1, A_0 = 1, \sigma = 0.7, \lambda = 0.3$) (a) $\gamma = 0.6$; (b) $\alpha = 0.6$

4.2 稳态响应振幅的随机共振行为

图 3(a) 给出了质量涨落噪声相关率 $\lambda = 0.1, 0.5, 1$ 时的 $A-\sigma$ 变化曲线,对比发现:振幅 A 随质量涨落噪声强度 σ 的变化出现了明显的共振峰,也即出现了随机共振行为;随着 λ 的增大,峰值位置逐渐右移,峰值先减小后增大,也即存在某个特定的 λ 使得随机共振峰值达到最小。

图 3(b) 给出了分数阶阶数 $\alpha = 0.1, 0.4, 1$ 时的 $A-\sigma$ 变化曲线,对比发现:振幅 A 随质量涨落噪声强度 σ 的变化出现了明显的随机共振行为;随着 α 的增大,共振峰逐渐减小,峰值位置逐渐右移。

上述结果表明:黏性介质引起的质量涨落噪声,能够诱导线性谐振子产生随机共振行为.噪声相关率和分数阶阶数对系统随机共振的峰值位置和共振强度都有很大影响,特别地,分数阶阶数越小,系统的共振强度越大.

4.3 稳态响应振幅的参数诱导共振行为

图 4(a) 给出了分数阶阶数 $\alpha = 0.1, 0.5, 1$ 时的 $A-\gamma$ 变化曲线,对比发现:振幅 A 随阻尼系数 γ 的变化出现了明显的共振峰,也即具有参数诱导共振行为;随着 α 的增大,共振峰逐渐减小,峰值位置逐渐左移.

图 4(b) 给出了质量涨落噪声强度 $\sigma = 0.4, 0.5, 0.6$ 时的 $A-\gamma$ 变化曲线,对比发现:振幅 A 随阻尼系数 γ 的变化出现了明显的参数诱导共振行为;随着 σ 的增大,共振峰逐渐减小,峰值位置逐渐右移.

上述结果表明:黏性介质引起的记忆性阻尼特性,能够诱导相应谐振子产生参数诱导共振行为.分数阶阶数和噪声强度对参数诱导共振的峰值位置和共振强度都有很大影响,特别地,分数阶阶数

和噪声强度越小,系统的共振强度越大.

5 仿真实验

下面通过仿真实验,模拟模型 (1) 所描述的粒子运动,考察仿真结果与理论结果是否符合.本文后续仿真均采用预估-校正法^[21-23],具体数值计算公式如下:

$$x_n = x_1 + T_s \sum_{i=2}^{n-1} v_i + T_s(v_1 + v_n)/2, \quad (26)$$

这里, T_s 为采样间隔, $t_k = (k-1)T_s$, $x_k = x(t_k)$, $v_k = v(t_k)$, $v = dx/dt$ 表示粒子的运动速度,满足:

$$v_n = \left[(m + \xi_n)v_1 - \frac{\gamma T_s^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \sum_{j=1}^{n-1} a_{j,n} v_j - \frac{\gamma x_1}{\Gamma(2-\alpha)} t_n^{1-\alpha} - \frac{m\omega^2 T_s^2}{\Gamma(4)} \sum_{j=1}^{n-1} b_{j,n} v_j - m\omega^2 x_1 t_n + \frac{A_0}{\Omega} \sin(\Omega t_n) + B_n^H \right] / \left[m + \xi_n + \frac{\gamma T_s^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{m\omega^2 T_s^2}{\Gamma(4)} \right], \quad (27)$$

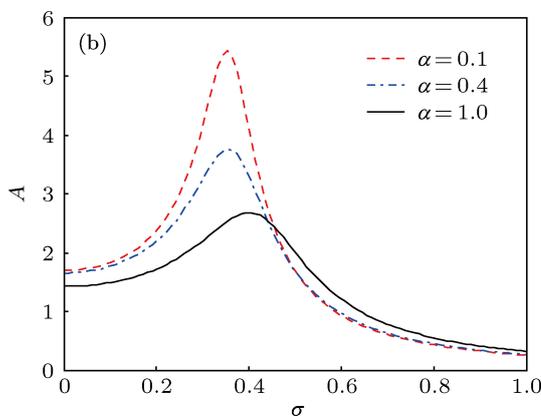
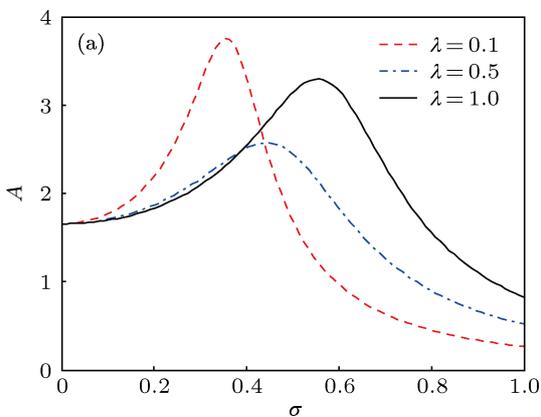


图3 振幅 A 随质量涨落噪声强度 σ 的变化 ($m = 1, \omega = 1, A_0 = 1, \Omega = 1.3, \gamma = 0.1$) (a) $\alpha = 0.4$; (b) $\lambda = 0.1$

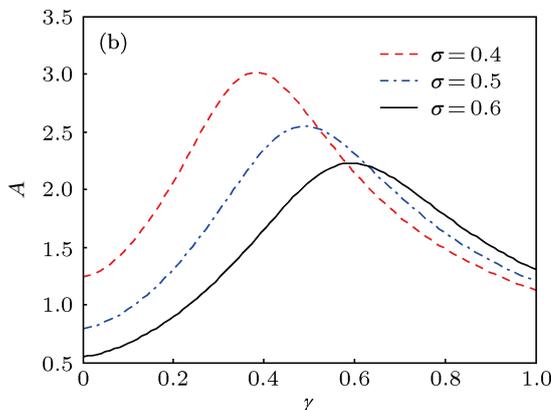
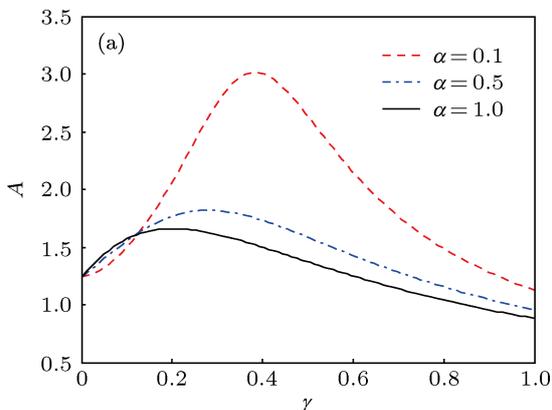


图4 振幅 A 随阻尼系数 γ 的变化 ($m = 1, \omega = 1, A_0 = 1, \Omega = 1, \lambda = 0.1$) (a) $\sigma = 0.4$; (b) $\alpha = 0.1$

其中 $\xi_k = \xi(t_k)$, $B_k^H = B^H(t_k)$, 参数 $a_{j,n}$ 和 $b_{j,n}$ 的取值分别为

$$a_{j,n} = \begin{cases} n^{3-\alpha} - (n+\alpha-2)(n+1)^{2-\alpha}, & j=1, \\ (n-j+2)^{3-\alpha} + (n-j)^{3-\alpha} - 2(n-j+1)^{3-\alpha}, & 2 \leq j \leq n-1, \\ 1, & j=n, \end{cases} \quad (28)$$

$$b_{j,n} = \begin{cases} n^3 - (n-2)(n+1)^2, & j=1, \\ (n-j+2)^3 + (n-j)^3 - 2(n-j+1)^3, & 2 \leq j \leq n-1, \\ 1, & j=n. \end{cases} \quad (29)$$

在图 1(a) 的参数条件下, 取采样间隔 $T_s = 0.01$ s, 仿真时间为 3000 s, 外部驱动频率 $\Omega = 1.6$, 仿真给出系统输出信号频域图如图 5.

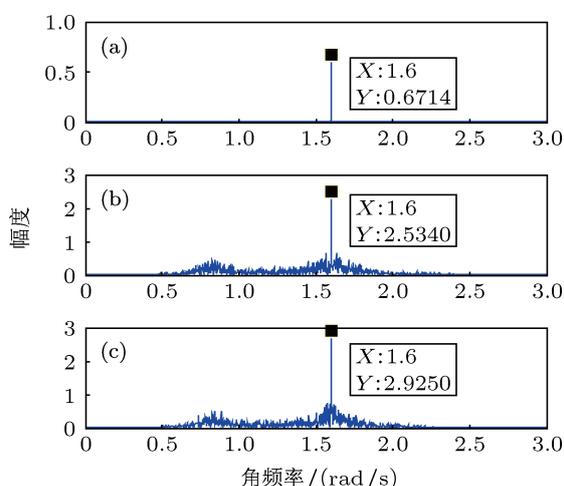


图 5 系统输出信号频域图 (a) $\sigma = 0$; (b) $\sigma = 0.6$; (c) $\sigma = 0.6$

从图 5(a) 可以看出, 在无外噪声 ($\sigma = 0$) 情况下, 系统几乎未受到任何随机扰动 (内噪声强度 $D \sim 10^{-22}$ 极其微弱, 对系统输出的影响可忽略不计), 系统输出信号在频域上表现为驱动频率 ($\Omega = 1.6$) 处的尖峰信号. 该尖峰信号代表系统对外部驱动信号的频率响应, 在时域上表现为与驱动信号同频的正弦信号, 其峰值代表系统响应幅值 A . 在仿真误差允许范围内, 仿真结果 ($A = 0.6714$) 与由 (25) 式给出的理论结果 ($A = 0.6730$) 具有一致性.

图 5(b) 与 (c) 显示了在同样噪声强度 ($\sigma = 0.6$) 下系统输出信号两次仿真实实现的不同结果; 出现这种差异的原因在于, 噪声的引入使得系统输出存在随机噪声基底, 进而使得驱动频率 ($\Omega = 1.6$) 处的响应幅值实际上是一个随机变量, 其均值由前面理论推导表明, 为 (25) 式所代表的稳态响应振幅 ($A = 2.8379$). 为在仿真上对此确认, 采用 Monte-Carlo 方法, 取 N 次相同条件下仿真结果的平均值

作为系统的稳态响应振幅. 在图 5(b) 的参数条件下, 得到仿真结果随仿真次数 N 的变化趋势如图 6 所示.

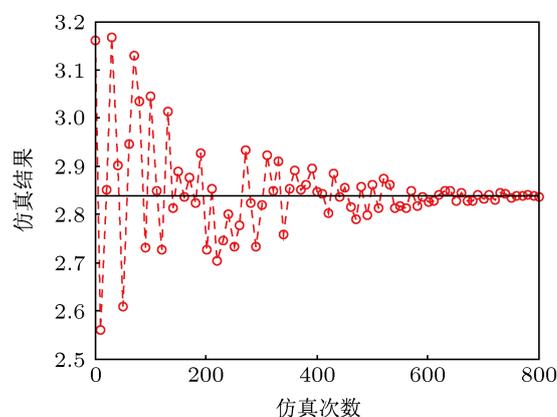


图 6 仿真结果与仿真次数关系图

图 6 表明: 随着仿真次数 N 的增加, 仿真结果将逐渐逼近理论结果. 这充分说明: 在有噪声的情况下, 仿真结果与理论结果仍然具有一致性, 显示了本文研究结果的可靠性及其对实际应用的指导价值.

6 结论

针对黏性介质中 Brown 运动的典型特征: 质量随机涨落与阻尼记忆性, 本文首次提出并建立了分数阶质量涨落谐振子模型, 在此基础上深入研究了黏性介质对系统共振行为的影响. 研究表明:

1. 质量涨落噪声和记忆性阻尼力均对系统真实共振形式具有决定性影响作用, 当噪声参数和阻尼参数在一定范围内取值时, 系统将出现传统谐振子所不具有的双峰真实共振行为.

2. 质量涨落噪声可诱导系统产生随机共振行为, 且共振强度随分数阶阶数的增大而减小, 随噪声相关率的增大先减小, 后增大.

3. 阻尼记忆力可诱导系统产生参数诱导共振行为, 且共振强度随分数阶阶数和噪声强度的增大而减小.

综上所述, 黏性介质以引起质量涨落和阻尼记忆性的方式影响着系统的动力学特性. 有别于理想介质中的 Brown 运动, 黏性介质中的 Brown 运动具

有更丰富的动力学行为, 因而也更适合于对现实复杂问题的准确刻画. 本文的研究工作为黏性介质中 Brown 运动的研究提供了基本的理论模型和研究方向, 相应研究成果对随机共振的实际应用具有指导作用.

-
- [1] Landau L D, Lifshitz E M (Translated by Li J F) 2007 *Mechanics* (5th Edn.) (Beijing: Higher Education Press) pp75–102 (in Chinese) [朗道 L. D., 栗弗席兹 E. M. 著, 李俊峰译 2007 力学 (第五版) (北京: 高等教育出版社) 第 75—102 页]
- [2] Li P, Nie L R, Lü X M, Zhang Q B 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100502
- [3] Li P, Nie L R, Huang Q R, Sun X X 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050503
- [4] Xue S H, Lin M, Meng Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 090504
- [5] Zhang L Y, Jin G X, Cao L, Wang Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120502
- [6] Hu G 1994 *Stochastic forces and nonlinear systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press) p18 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第 18 页]
- [7] Bao J D 2012 *Introduction to Anomalous Statistical Dynamics* (Beijing: Science Press) pp67–70 (in Chinese) [包景东 2012 反常统计动力学导论 (北京: 科学出版社) 第 67—70 页]
- [8] Mason T G, Weitz D A 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1250
- [9] Golding I, Cox E C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 098102
- [10] Banks D S, Fradin C 2005 *Biophys. J.* **89** 2960
- [11] Guigas G, Kalla C, Weiss M 2007 *Biophys. J.* **96** 316
- [12] Gitterman M, Klyatskin V I 2010 *Phys. Rev. E* **81** 051139
- [13] Gitterman M 2012 *Physica A* **391** 3033
- [14] Gitterman M 2012 *Physica A* **391** 5343
- [15] Soika E, Mankin R, Ainsaar A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011141
- [16] Mankin R, Rekker A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 041122
- [17] Zhong S C, Gao S L, Wei K, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170501 (in Chinese) [钟苏川, 高仕龙, 韦鹏, 马洪 2012 物理学报 **61** 170501]
- [18] Tu Z, Wang F, Peng H, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 030502 (in Chinese) [屠浙, 彭皓, 王飞, 马洪 2013 物理学报 **62** 030502]
- [19] Yu T, Zhang Z, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120504 (in Chinese) [蔚涛, 张路, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 120504]
- [20] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563
- [21] Deng W H 2007 *J. Comput. Phys.* **227** 1510
- [22] Deng W H 2009 *Phys. Rev. E* **79** 011112
- [23] Deng W H, Li C 2012 *Numerical Modelling* (Rijeka: InTech) pp355–374 (in Chinese) [邓伟华, 李灿 2012 数值模拟 (里耶卡: InTech 出版社) 第 355—374 页]

The resonant behavior of fractional harmonic oscillator with fluctuating mass*

Yu Tao¹⁾²⁾ Luo Mao-Kang^{1)†} Hua Yun²⁾

1) (*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

2) (*Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China*)

(Received 28 May 2013; revised manuscript received 23 July 2013)

Abstract

When moving in viscous medium, the mass of a Brownian particle is fluctuant and its damping force depends on the past velocity history. Therefore, in order to investigate the characteristics of Brownian motion in viscous medium, fractional harmonic oscillator is proposed in this paper for the first time so far as we know. First, the Shapiro-Loginov formula is fractionized to solve fractional stochastic differential equation with exponential correlative stochastic coefficients. Then, by using stochastic averaging method and fractional Shapiro-Loginov formula, the analytical expression of a system's steady response amplitude is presented and the system's resonant behavior is discussed accordingly. Finally, the reliability of theoretical results is tested by simulation experiments. All the research shows that: (1) Stochastic resonant behavior can be induced by mass fluctuation noise. (2) Parameter-induced resonance can be induced by memory damping force. (3) Under different parameter conditions, the system's resonant forms are diverse.

Keywords: viscous medium, mass fluctuation, memory damping force, fractional harmonic oscillator

PACS: 05.40.-a, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.62.210503

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238), and the Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, China (Grant No. 2013035).

† Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn