

基于拉盖尔-高斯光束的通信系统在非 Kolmogorov 湍流中传输的系统容量*

江月松 王帅会[†] 欧军 唐华

(北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191)

(2013年6月1日收到; 2013年6月28日收到修改稿)

涡旋波束在大气湍流中的传输有非常重要的理论研究和实际应用意义. 本文基于利托夫近似和广义惠更斯-菲涅耳原理, 推导出拉盖尔-高斯 (LG) 光束在非 Kolmogorov 湍流中斜程传输时的螺旋谱, 并进一步推导出系统的容量. 对基于 LG 光束的通信系统容量进行了数值计算, 并对指数参数、光束波长、天顶角、湍流内尺度、外尺度、结构常数对系统容量的影响进行了分析比较. 本文的结论能够为 LG 光束在非 Kolmogorov 湍流中的通信提供一定的参考价值.

关键词: 拉盖尔-高斯光束, 非 Kolmogorov 湍流, 平均容量

PACS: 42.25.Dd, 42.68.Bz, 42.79.Sz

DOI: 10.7498/aps.62.214201

1 引言

涡旋光束, 是中心光强为零且具有螺旋状相位波前的奇点光束. 涡旋光束携带 $\exp(is\varphi)$ 的相位因子, 每个光子具有 $\hbar s$ 的轨道角动量, 其中 s 称为拓扑荷. 鉴于轨道角动量的重要性, 涡旋光束在生物医学、信息传输等领域得到了极大的重视^[1-6]. 从理论上讲, 光束的拓扑荷 s 可以为任意整数, 构成无穷维厄米空间. 因此与利用强度调制等传统的二进制编码相比, 利用轨道角动量进行通信可以在不增加带宽的情况下极大的提高数据传输容量.

然而在实际应用中, 大气湍流会引起波束的强度以及相位变化, 导致误码率的增加以及通信容量的降低^[7-10]. 因此, 研究影响基于轨道角动量的通信系统容量的各种因素, 对于提高系统容量具有重要的意义. Paterson 等人研究了涡旋波束在 Kolmogorov 湍流中水平传输的系统容量, 而 Anguita 等人利用相位屏模拟的方法研究了 LG 光束在 Kolmogorov 湍流中水平传输时的系统容量^[11]. 在以前的研究中, Kolmogorov 功率谱被广泛应用. 然而, 实验结果表明, 在一些大气层中, Kolmogorov 功率

谱会产生很大的偏差, 因此建立了非 Kolmogorov 功率谱模型^[12]. 本文主要研究 LG 光束在非 Kolmogorov 湍流中斜程传输时的系统容量, 并对影响容量的各种因素进行分析比较.

2 理论推导

LG 波束是一种典型的且易实现的涡旋波束. 当拓扑荷 s 不为 0 时, 光束中心强度为零, 相位为螺旋结构. 在柱坐标系中, LG 光束在 $z=0$ 处的表达式为^[13]

$$u(r, \varphi, 0) = E_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{w_0} \right)^2 \right] L_p^s \left[2 \left(\frac{r}{w_0} \right)^2 \right] \times \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^s \exp(is\varphi), \quad (1)$$

式中, r, φ 分别为 $z=0$ 平面的径向坐标和角向坐标. w_0 为束腰半径, s 为拓扑荷, p 为径向指数, $E_0 = \sqrt{2p!(p+|s|)!} \pi$ 为一常数.

为了阐明轨道角动量的成分, 任何一种光束都可以分解成一系列螺旋谐波 $\exp(im\varphi)$ 的叠加^[14]

$$u(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(r, z) \exp(im\varphi), \quad (2)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 61101005) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: wshcan912@hotmail.com

其中 $a_m(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(r, \phi, z) \exp(-im\phi) d\phi$ 且 $C_m = \int_0^\infty |a_m(r, z)|^2 r dr$. 拓扑荷 m 的能量可以由 $U_m = 2\epsilon_0 C_m$ 表示, 光束的总能量为 $2\epsilon_0 \sum_{q=-\infty}^\infty C_q$, ϵ_0 为真空中的介电常数. 因此, 任一光束的螺旋谐波 m 的权重可以表示为

$$P_m = \frac{C_m}{\sum_{q=-\infty}^\infty C_q}, \quad (3)$$

也称为螺旋谱.

根据菲涅耳-惠更斯积分公式, 在自由空间传输一段距离 z 后, LG 光束的复振幅可以表示为

$$\begin{aligned} u_0(\rho, \phi, z) &= \frac{w_0 A}{w} \exp\left[-\left(\frac{\rho}{w}\right)^2\right] \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w}\right)^s \\ &\times L_p^s\left[2\left(\frac{\rho}{w}\right)^2\right] \exp(-is\phi) \\ &\times \exp\left[i(2p+s+1)\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right. \\ &\left.-i\frac{k\rho^2}{2R(z)} + ikz\right], \end{aligned} \quad (4)$$

ρ, ϕ 分别为 z 处的角向坐标与径向坐标, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, $w = w_0\sqrt{1 + (z/z_0)^2}$ 为 z 处的光束半径. $z_0 = \frac{1}{2}kw_0^2$ 为瑞利距离,

$$\begin{aligned} R(z) &= z[1 + (z_0/z)^2], \\ A &= E_0[1 + (z/z_0)^2]^{-0.5}. \end{aligned}$$

利用利托夫近似, LG 光束在弱湍流中传输一段距离 z 后, 其光束可以表示为 [3,15]

$$u(\rho, \phi, z) = u_0(\rho, \phi, z) \exp[\psi(\rho, \phi, z)], \quad (5)$$

其中 $\psi(\rho, \phi, z)$ 表示由大气湍流引起的相位畸变.

为了求得 C_m , 首先需要求得 $|a_m(\rho, z)|^2$ 的表达式, $|a_m(\rho, z)|^2$ 表示为

$$\begin{aligned} |a_m(\rho, z)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(\rho, \phi, z) \exp(-im\phi) d\phi \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(\rho, \phi, z) \exp(-im\phi) d\phi \right]^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \phi_1, z) \exp(-im\phi_1) \\ &\times u^*(\rho, \phi_2, z) \exp(im\phi_2) d\phi_1 d\phi_2, \end{aligned} \quad (6)$$

将 (4), (5) 式代入 (6) 式, 有

$$|a_m(\rho, z)|^2 = \frac{A^2 w_0^2}{2\pi w^2} \left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right)^s \left[L_p^s\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right)\right]^2$$

$$\begin{aligned} &\times \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[\langle \psi(\rho, \phi_1, z) \\ &+ \psi^*(\rho, \phi_2, z) \rangle] \\ &\times \exp[i(s-m)(\phi_1 - \phi_2)] d\phi_1 d\phi_2. \end{aligned} \quad (7)$$

* 为复共轭, $\langle \cdot \rangle$ 表示系综统计平均. $\exp[\langle \psi(\rho, \rho_1, z) + \psi^*(\rho, \rho_2, z) \rangle]$ 可以表示为 [16,17]

$$\begin{aligned} &\langle \psi(\rho, \rho_1, z) + \psi^*(\rho, \rho_2, z) \rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{3}\pi^2 k^2 z |\rho_1 - \rho_2|^2 \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\Phi_n(\kappa)$ 为大气湍流的功率谱, 这里采用非 Kolmogorov 功率谱

$$\begin{aligned} \Phi_n(\kappa, \alpha) &= A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp[-(\kappa^2/\kappa_m^2)]}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}}, \\ 0 &\leq \kappa < \infty, \quad 3 < \alpha < 4, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\Gamma(\alpha - 1) \cos(a\pi/2)/4\pi^2$, $A(\alpha) = \kappa_0 = 2\pi/L_0$, $\kappa_m = c(\alpha)/l_0$ 且

$$c(\alpha) = \left[\Gamma\left(5 - \frac{\alpha}{2}\right) A(\alpha) \frac{2\pi}{3} \right]^{1/(\alpha-5)}.$$

L_0, l_0 分别为大气湍流的外尺度与内尺度. \tilde{C}_n^2 表示大气湍流的折射率结构常数, 采用最常用的 Hufnagel-Vally (H-V) 模型 [18],

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n^2 &= \gamma C_n^2, \\ C_n^2(z \cos \theta) &= 0.00594 (v/27)^2 (z \cos \theta \times 10^{-5})^{10} \\ &\times \exp(-z \cos \theta / 1000) \\ &+ 2.7 \times 10^{-16} \exp(-z \cos \theta / 1500) \\ &+ C_n^2(0) \exp(-z \cos \theta / 100), \end{aligned} \quad (10)$$

γ 为常数 1, 单位为 $m^{-\alpha+11/3}$, 当 $\alpha = 11/3$ 时, $\tilde{C}_n^2 = C_n^2$. v 为高空中的风速, 一般取 $v = 21$ m/s, θ 为天顶角, 即入射光线与地面法线间的夹角. 设定 $T = \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa$, T 可以表示为 [19,20]

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa = \frac{A(\alpha) \tilde{C}_n^2}{2} \\ &\times \frac{\kappa_m^{2-\alpha} \beta \exp\left(\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) \Gamma\left(2 - \alpha/2, \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) - 2\kappa_0^{4-\alpha}}{\alpha - 2}, \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $\beta = 2\kappa_0^2 - 2\kappa_m^2 + \alpha\kappa_m^2$, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数. 将 (8)–(11) 式代入 (7) 式, 有

$$|a_m(\rho, z)|^2 = \exp\left(-\frac{2}{3}\pi^2 k^2 z \rho^2 T\right)$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2\pi^2 k^2 z \rho^2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}{3} T\right] \\ & \times \exp[i(s-m)(\phi_1 - \phi_2)] d\phi_1 d\phi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

利用以下两个公式 [21]:

$$\int_0^{2\pi} \exp(im\phi) = \begin{cases} 2\pi, & (m=0), \\ 0, & (m \neq 0), \end{cases} \quad (14)$$

$$\exp(\cos\phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l I_l(x) \exp(il\phi), \quad (15)$$

其中 $I_l(\cdot)$ 为第一类修正贝塞尔函数. 最终, $|a_m(\rho, z)|^2$ 可以表示为

$$\begin{aligned} |a_m(\rho, z)|^2 &= \frac{2\pi A^2 w_0^2}{w^2} \left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right)^s \left[L_p^s\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right)\right]^2 \\ & \times \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2} - \frac{2}{3}\pi^2 k^2 z \rho^2 T\right) \\ & \times I_{m-s}\left(\frac{2\pi^2 k^2 z \rho^2}{3} T\right). \end{aligned} \quad (16)$$

因此, C_m 可以表示为

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{2\pi^2 A^2 w_0^2}{w^2} \int_0^R \left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right)^s \left[L_p^s\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right)\right]^2 \\ & \times \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2} - \frac{2}{3}\pi^2 k^2 z \rho^2 T\right) \\ & \times I_{m-s}\left(\frac{2\pi^2 k^2 z \rho^2}{3} T\right) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

对于利用携带单拓扑荷的 LG 光束进行通信的系统, 其系统容量可以表示为

$$C = \max[H(x) - H(x|y)]. \quad (18)$$

根据文献 [3] 以及一系列的推导, 系统容量 C 最终可以表示为

$$\begin{aligned} C &= \log(2L+1) + 1/(2L+1) \sum_l \sum_{l_i} P(l|l_i) \\ & \log \frac{P(l|l_i)}{\sum_{l_i} P(l|l_i)}, \end{aligned} \quad (19)$$

式中, l_i 为发送端拓扑荷, $l_i \in \{-L, -L+1, \dots, L-1, L\}$, L 为拓扑荷集中最大拓扑荷, $P(l|l_i)$ 为条件概率.

3 数值计算及分析

根据上面推导出的系统容量公式, 对基于 LG 光束的通信系统在非 Kolmogorov 湍流中斜程传输时的系统容量与各种参数的关系进行数值计算与分析, 其结果如图 1 至图 5 所示.

图 1 描述了系统容量 C 与指数参数 α 的关系. 各参数取值如下: $p=0$, $\lambda=632.8$ nm, $w_0=0.01$ m, $\tilde{C}_n^2=1 \times 10^{-14} \text{ m}^{3-\alpha}$, $l_0=0.01$ m, $L_0=1$ m, $\theta=80^\circ$, 拓扑荷集合为 $M=\{-5, -4, \dots, 4, 5\}$. 图 1 表明, 系统容量 C 首先随着指数参数 α 的增大而减小, 当达到最低点后 (α 大约为 3.1), 随着 α 的增大而增大. 这与 (17) 式中的 T 密切相关. 从 (12) 式可以看出, T 表征大气湍流的强度, T 越大, 意味着湍流强度越强. T 与指数参数 α 的关系如图 2 所示, 参数取值与图 1 相同. 从图 2 可以看出, α 约为 3.1 时, 湍流强度最大. 此时, LG 光束受湍流影响最大, 螺旋谱弥散最严重, 系统容量最低.

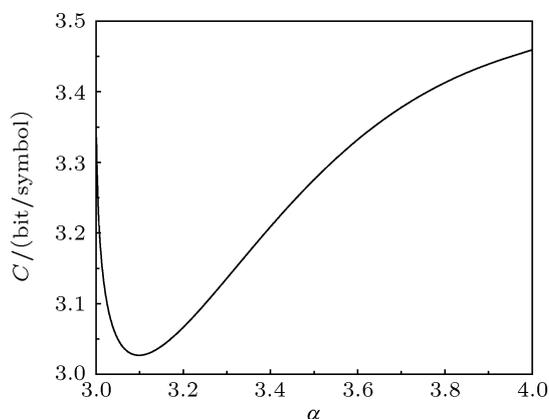


图 1 系统容量 C 与指数参数 α 图

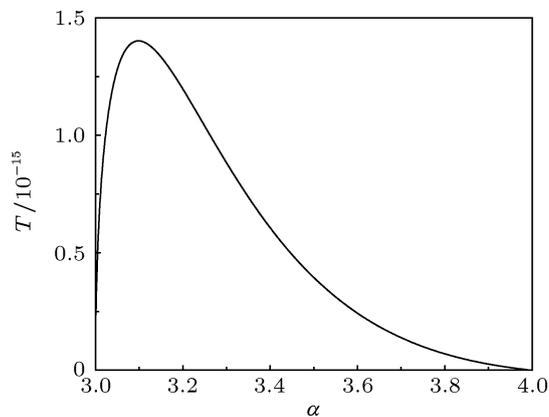


图 2 T 与指数参数 α 的关系图

系统容量 C 与天顶角 θ 的关系如图 3 所示. $\alpha=3.3$, 其他参数取值与图 1 相同. 由图可知, 系统容量随着天顶角 θ 的增大而减小. 当天顶角 θ 为 90° 时, 为水平传输, 此时结构常数可视作常数, 系统容量随着传输距离的增加而减小. 而当天顶角 θ 小于 90° 时, 随着传输距离的增加, 系统容量先减小, 后增加, 但小于初始的系统容量值. 这是因为在斜程传输时, 随着距离的增加, \tilde{C}_n^2 会减小. 图 3 是结构常数 \tilde{C}_n^2 与传输距离 z 共同作用的结果. 系统容

量与波长的关系如图 4 所示, $\alpha = 3.3$, 其他参数取值与图 1 相同. 光束的波长越长, 粒子与涡旋之间的作用越小, 光束受大气湍流的影响越小, 系统容量越大.

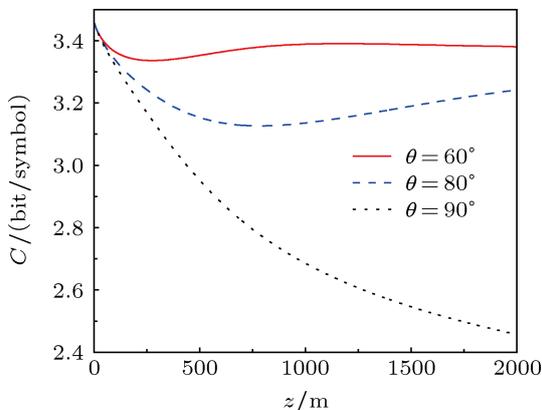


图 3 系统容量 C 与天顶角 θ 的关系

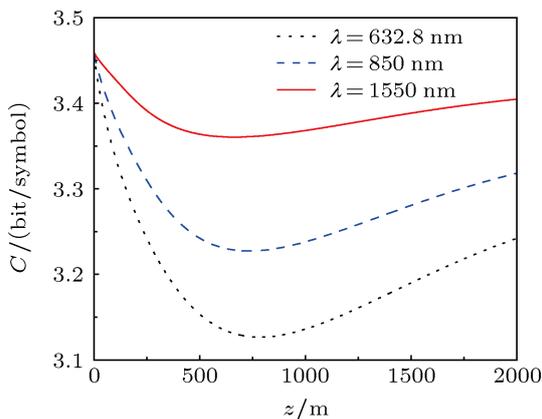


图 4 系统容量与波长的关系

图 5(a), (b), (c) 分别描述了系统容量 C 与结构常数 \tilde{C}_n^2 、内尺度 l_0 、外尺度 L_0 的变化关系, 参数取值与图 1 相同. 可以看到, 当结构常数 \tilde{C}_n^2 增大, 内尺度 l_0 减小, 外尺度 L_0 增大时, 系统容量 C 减小. 较大的外尺度 L_0 与较小的内尺度 l_0 意味着有更多的涡旋, 即湍流强度较大. LG 光束受到湍流的影响越大, 系统误码率越高, 系统容量就越低. 而且, 内尺度 l_0 对系统容量 C 的影响大于外尺度 L_0 对系统容量 C 的影响.

4 结论

本文对基于 LG 光束的空间通信系统在非 Kolmogorov 湍流中进行斜程传输时的系统容量进行了研究, 详细研究了指数参数、光束波长、天顶角、

湍流内尺度、外尺度、结构常数对系统容量的影响. 当天顶角、湍流内尺度减小, 光束波长、结构常数、湍流外尺度增大时, LG 光束受到的影响增大, 系统容量减小. 斜程传输时, 随着传输距离的增加, 系统容量先减小, 后增加, 但小于初始的系统容量值. 系统容量首先随着指数参数 α 的增大而减小, 当达到最低点后 (α 大约为 3.1), 随着 α 的增大而增大. 本文所得到的结论对非 Kolmogorov 湍流中涡旋光束通信有潜在的应用价值.

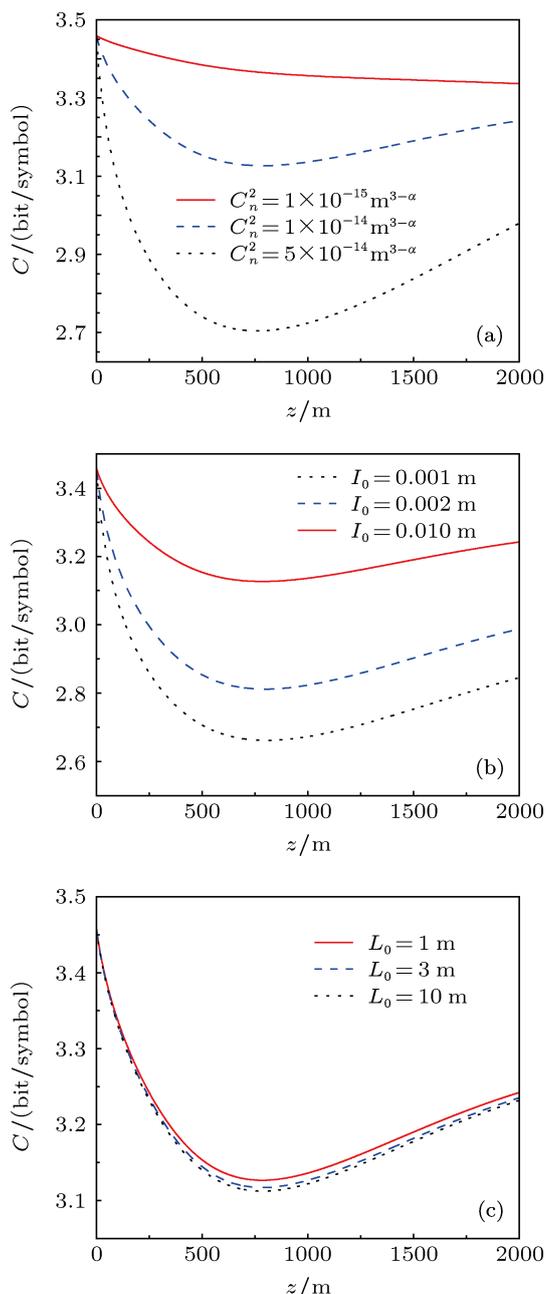


图 5 系统容量 C 与结构常数 \tilde{C}_n^2 、内尺度 l_0 、外尺度 L_0 的关系 (a) 系统容量 C 与结构常数 \tilde{C}_n^2 的关系图; (b) 系统容量 C 与内尺度 l_0 的关系; (c) 系统容量 C 与外尺度 L_0 的关系

- [1] Gibson G, Courtial J, Padgett M J, Vasnetsov M, Pas'ko V, Barnett S M, Franke-Arnold S 2004 *Opt. Express* **12** 5448
- [2] Gbur G, Tyson R K 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 225
- [3] Paterson C 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 153901
- [4] Molina-Terriza G, Torres J P, Torner L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 013601
- [5] He H, Friese M E J, Heckenberg N R, Rubinsztein-Dunlop H 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 826
- [6] Simpson N B, Dholakia K, Allen L, Padgett M J 1997 *Opt. Lett.* **22** 52
- [7] Bouchal Z, Celechovský R 2004 *New J. Phys.* **6** 131
- [8] Tyler G A, Boyd R W 2009 *Opt. Lett.* **34** 142
- [9] Roux F S 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053822
- [10] Li F, Tang H, Jiang Y S, Ou J 2012 *Acta Phys. Sin.* **60** 014204 (in Chinese) [黎芳, 唐华, 江月松, 欧军 2012 物理学报 **60** 014204]
- [11] Anguita J A, Neifeld M A, Vasic B V 2008 *Appl. Opt.* **47** 2414
- [12] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, Ferrero V 2008 *Opt. Eng.* **47** 026003
- [13] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [14] Torner L, Torres J P, Carrasco S 2005 *Opt. Express* **13** 873
- [15] Zhang Y, Wang Y, Xu J, Wang J, Jia J 2011 *Opt. Commun.* **284** 1132
- [16] Xu H, Cui Z, Qu J 2011 *Opt. Express* **19** 21163
- [17] Xue-Mei H, Bai-Da L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 094210
- [18] Yi-Xin Z, Ji C 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 074220
- [19] Wu G, Guo H, Yu S, Luo B 2010 *Opt. Lett.* **35** 715
- [20] Huang Y P, Zhao G P, Xiao X, Wang F H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 144202 (in Chinese) [黄永平, 赵光普, 肖希, 王藩侯 2012 物理学报 **61** 144202]
- [21] Grashteyn I S, Ryzhik I M 2007 *Table of Integrals, Series And Products* 7Edn. (Salt Lake City: Academic Press) p933, p340

Average capacity of free-space optical systems for a Laguerre-Gaussian beam propagating through non-Kolmogorov turbulence*

Jiang Yue-Song Wang Shuai-Hui[†] Ou Jun Tang Hua

(School of Electrical and Information Engineering, BeiHang University, Beijing 100191, China)

(Received 1 June 2013; revised manuscript received 28 June 2013)

Abstract

The propagation of vortex beam in atmospheric turbulence is of great importance in theoretical study and practical applications. Based on the Rytov approximation and extended Huygens-Fresnel integral, the analytical expressions for the spiral spectrum of the Laguerre-Gaussian (LG) beam propagating in a slant non-Kolmogorov turbulence channel have been derived and the average capacity of free space optical system is given. The average capacity of free space optical system is examined and the effects of exponent parameter, wavelength, zenith angle, inner scale, outer scale, and structure constant on average capacity are also analyzed. Results obtained in this paper may be beneficial to optical communication.

Keywords: Laguerre-Gaussian beam, non-Kolmogorov turbulence, average capacity

PACS: 42.25.Dd, 42.68.Bz, 42.79.Sz

DOI: 10.7498/aps.62.214201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61101005).

[†] Corresponding author. E-mail: wshean912@hotmail.com