

# 自由膨胀准二维玻色-爱因斯坦凝聚中的 密度-密度关联\*

徐岩 樊炜<sup>†</sup> 陈兵 南向红 陈达 周强 张鲁殷

(山东科技大学理学院, 青岛 266510)

(2013年4月5日收到; 2013年8月8日收到修改稿)

利用 Madelung 变换, 考虑密度和相位涨落, 给出了准二维玻色-爱因斯坦凝聚体的有效拉格朗日密度函数和波函数量子涨落的算符化表示, 计算了凝聚体在去除约束势场自由膨胀时两点之间的密度-密度关联函数, 结果表明在长波极限下, 两点之间的密度关联函数正比于波数  $k$ , 而在短波极限下, 密度关联函数趋近于一个常数.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, 量子涨落, 密度关联

**PACS:** 67.85.De, 42.40.Lc, 03.75.Kk

**DOI:** 10.7498/aps.62.216701

## 1 引言

近年来, 玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 的非线性动力学现象引起了人们的广泛兴趣, 如非线性 Josephson 振荡<sup>[1-3]</sup>, Landau-Zener 隧穿<sup>[4,5]</sup>, Rosen-Zener 跃迁<sup>[6,7]</sup>, 动力学不稳<sup>[8,9]</sup>, 自囚禁现象<sup>[10-12]</sup>等. 这些工作大部分研究了 BEC 在平均场近似下的行为, 忽略了量子涨落对系统动力学行为可能造成的影响. 而在非线性情况下, 系统动力学演化过程中往往会伴随有量子涨落放大和准粒子产生<sup>[13]</sup>, 量子涨落很可能会极大的改变系统的动力学行为<sup>[1,12-14]</sup>. 例如, 被约束在简谐势阱中的玻色凝聚体, 当突然去除约束势场时, 凝聚体会急剧膨胀, 原来凝聚体中的热涨落和量子涨落会转变成密度涨落<sup>[15]</sup>, 内部的声子会失去原来集体激发的特性, 短波声子的能量和动量会转移到单个原子的运动中, 而长波声子在膨胀的凝聚体中依然可以以密度涨落的形式存在, 在这个过程中, 凝聚体不同位置之间会产生密度-密度关联. 通过数值模拟, 发现对弱的排斥作用的 BEC 有自相似膨胀, 但对强的排斥

作用, 发现在表面由于耗散而自发形成激波. 不同于经典的黏性流体, 量子流体中可以产生径向膨胀的密度波<sup>[16]</sup>, 这些有趣的非线性效应, 在超冷碱金属原子气体中还没有被观察到.

飞行时间法 (time of flight) 是测量微观物体位置和速度的常用方法, 实验室中第一次确证玻色-爱因斯坦凝聚的获得就是利用飞行时间法观察到<sup>87</sup>Rb 原子团各向异性的自由膨胀<sup>[17]</sup>, 这是因为冷原子气体的密度分布在 Thomas-Fermi 近似下是翻转的抛物线形, 气体在各向异性简谐势场中有非对称的速度分布, 而通常凝聚体在去除约束势场后的膨胀是自相似的<sup>[16,18-20]</sup>. BEC 在去除约束场后的自由膨胀, 与宇宙早期的暴胀过程也有一定的类似之处, 已有不少文献利用模拟弯曲时空引力场的研究方法考察 BEC 的自由膨胀时的量子关联结构<sup>[21-23]</sup>, 声子蒸发<sup>[13]</sup>, 类似霍金辐射<sup>[24-27]</sup>等量子现象.

本文从被囚禁的二维玻色系统的拉氏函数出发, 考虑密度和相位的涨落, 得到了凝聚体的有效拉格朗日密度函数; 通过哈密顿量对角化方法, 给出了凝聚体涨落的算符表示, 并在共动坐标系下计

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11105086)、山东省中青年科学家奖励基金 (批准号: BS2011DX029)、青岛市科技计划 (批准号: 11-2-4-4-(6)-jch) 和山东科技大学杰出青年基金 (2011KYJQ101) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: xly5@hotmail.com

算了凝聚体自由膨胀过程中两点之间的密度 - 密度关联.

## 2 玻色-爱因斯坦凝聚的声子模

### 2.1 有效拉氏函数

对于准二维玻色-爱因斯坦凝聚, 纵向的约束势场远大于横向约束势场, 即  $\omega_z \gg \omega_\perp$ ,  $\omega_\perp$  为  $x$  或  $y$  方向的横向频率,  $\omega_z$  是  $z$  方向的势阱频率, 系统的拉格朗日密度函数为

$$L = \frac{i\hbar}{2} (\dot{\psi}\psi^* - \dot{\psi}^*\psi) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla_\perp \psi|^2 - V_{\text{ext}} |\psi|^2 - \frac{g}{2} |\psi|^4, \quad (1)$$

其中  $m$  是玻色子的质量,  $g = g_0/\sqrt{2\pi}a_z$  是准二维玻色-爱因斯坦凝聚的非线性耦合系数,  $g_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  为三维玻色气体的相互作用常数,  $a_s$  为原子间低能  $s$  波散射长度,  $a_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$  为纵向约束势场等效谐振子长度. 为简单起见, 采取 Madelung 变换,  $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$ , 其中凝聚体密度  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ , 相位  $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ ,  $\rho_0 = \mu/g$ ,  $\theta_0 = -\mu t/\hbar$  是凝聚体基态的密度和相位,  $\delta\rho$  和  $\delta\theta$  分别对应密度和相位涨落,  $\mu$  为单粒子化学势. 代入到拉氏密度函数, 在 Thomas-Fermi 近似下得到含二阶小量的拉氏密度函数为  $L = L_0 + L_1 + L_2 + L_3$ . 其中  $L_0$  为纯凝聚部分的拉氏函数, 为一常量,  $L_1$  含密度和相位的一阶涨落, 其平均值为 0,  $L_3$  为三阶涨落项, 此部分可以忽略. 因此, 对涨落起主要作用的是含二阶小量的部分, 其表达式为

$$L_2 = -\delta\rho \left[ \delta\dot{\theta} + \mathbf{v}_0 \cdot (\nabla_\perp \delta\theta) \right] - \frac{\hbar^2 \rho_0}{2m} \left[ \frac{(\nabla_\perp \delta\rho)^2}{4\rho_0} + (\nabla_\perp \delta\theta)^2 \right] - \frac{g}{2} \delta\rho^2, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{v}_0 = \hbar\nabla\theta_0/m$  为凝聚体的速度. 上式对  $\delta\rho$  变分可得到密度涨落和相位涨落之间的关系

$$g\delta\rho + \delta\dot{\theta} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\perp \delta\theta - \frac{\hbar^2}{4m\rho_0} \nabla_\perp^2 \delta\rho = 0, \quad (3)$$

若假设凝聚体的密度起伏足够平滑, 最后一项可以忽略. 代入到 (2) 式得到仅由相位涨落所表示的有效拉氏密度函数

$$L_2^{\text{eff}} = \frac{1}{2g} (\delta\dot{\theta} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\perp \delta\theta)^2 - \frac{\hbar^2 \rho_0}{2m} (\nabla_\perp \delta\theta)^2. \quad (4)$$

### 2.2 哈密顿量对角化

在动量空间中, 对密度和相位涨落做 Fourier 变换

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \sum_k \delta\rho_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \delta\theta &= \sum_k \delta\theta_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{r}$  为粒子在坐标空间的位矢,  $\mathbf{k}$  为对应动量空间的波矢. 在静态近似下  $\mathbf{v}_0 = 0$  (纯凝聚部分可以认为速度为 0), 由 (3) 式得,  $\delta\rho_k = -\left(g + \frac{\hbar^2 \rho_0}{4m}\right) \delta\dot{\theta}_k$ , 系统的拉氏函数为

$$L = \frac{V}{4} \sum_k \left[ \left(g + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho_0}\right)^{-1} \delta\dot{\theta}_k \delta\dot{\theta}_{-k} - \frac{\rho_0 \hbar^2 k^2}{m} \delta\theta_k \delta\theta_{-k} \right], \quad (6)$$

其中  $V$  是准二维玻色-爱因斯坦凝聚体的体积. 取广义坐标

$$q_k = \frac{\delta\theta_k}{\sqrt{\frac{2}{V} \left(g + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho_0}\right)}}, \quad (7)$$

系统的拉氏函数变为

$$L = \sum_k \left[ \frac{\dot{q}_k^2}{2} + \frac{\rho_0 \hbar^2 k^2}{m} \left(g + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho_0}\right) q_k^2 \right]. \quad (8)$$

定义广义动量  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ , 则系统的哈密顿函数

$$\begin{aligned} H &= -L + \sum_k p_k \dot{q}_k \\ &= \sum_k \left( \frac{p_k^2}{2} + \frac{1}{2} \omega^2 q_k^2 \right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\omega = k \sqrt{\frac{\mu}{m} \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\mu}\right)}$ , 即为流体中著名的 Bogoliubov 色散关系式. 引入准粒子的产生湮没算符为

$$\begin{aligned} a_k &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left( q_k + i \frac{p_k}{\omega} \right), \\ a_k^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left( q_k - i \frac{p_k}{\omega} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

可将系统的哈密顿函数对角化,

$$H = \sum_k \hbar\omega \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right).$$

从而, 密度和相位涨落算符可写为

$$\delta\hat{\theta}_k = \sqrt{\frac{1}{V\omega} \left(g + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho_0}\right)} (a_k + a_k^\dagger),$$

$$\delta\hat{\rho}_k = i\sqrt{\frac{\omega}{V}\left(g + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho_0}\right)^{-1}}(a_k - a_k^\dagger). \quad (11)$$

若把凝聚体的场算符写成  $\hat{\psi} = \psi_0 + \hat{\psi}' = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$  的形式, 式中  $\psi_0$  是凝聚部分波函数,  $\hat{\psi}'$  是涨落部分对应算符, 则  $\delta\hat{\rho} = \psi_0^* \hat{\psi}' + \psi_0 \hat{\psi}'^*$ ,  $\hat{\psi}' = \hat{\chi}' = \psi_0(\delta\hat{\rho}/2\rho_0 + i\delta\hat{\theta})$ . 在 Thomas-Fermi 近似下, 凝聚体涨落的湮灭算符可表示为准粒子的产生、湮没算符.

$$\hat{\chi}_k = i\sqrt{\frac{1}{V}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\rho_0}\left(g + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho_0}\right)^{-1}}(a_k - a_k^\dagger) + \sqrt{\frac{\rho_0}{\omega}\left(g + \frac{\hbar^2 k^2}{4m\rho_0}\right)}(a_k + a_k^\dagger)\right]}. \quad (12)$$

### 3 两点间的密度-密度关联

当约束势场随时间变化时, 凝聚体的密度和相互作用也是时间依赖的函数. 引入随凝聚体共动的空间坐标  $\zeta = r/b(t)$ , 时间坐标  $\tau(t) = \int^t \frac{dt'}{b^2(t')}$ , 其中标度函数  $b(t)$  在初始时刻  $t=0$  时,  $b=1$ , 在任意  $t$  时刻满足  $\ddot{b}(t) + \omega(t)b^2(t) = \omega_0^2/b^3(t)$ . 式中  $\omega_0$  是凝聚体约束势场的初始频率, 当去掉约束势场, 凝聚体自由膨胀时,  $V_{\text{ext}} = 0$ ,  $b(t)$  正比于时间  $t$ . 对二维玻色凝聚体, 凝聚体波函数可表示为 [22]

$$\begin{aligned} \psi_0(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{b(t)}\chi_0(\zeta, \tau)e^{i\theta(\mathbf{r}, t)}, \\ \hat{\psi}'(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{b(t)}\hat{\chi}'(\zeta, \tau)e^{i\theta(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned} \quad (13)$$

假设密度  $\rho_0(t) = \frac{\rho_0}{b^2(t)}$ , 则标度化后的波函数  $\chi_0(\zeta, \tau)$  和  $\hat{\chi}'(\zeta, \tau)$  的运动方程

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\chi_0}{\partial\tau} &= \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\zeta^2\right]\chi_0 \\ &\quad + g\left[|\chi_0|^2 + 2n'\right]\chi_0, \\ i\hbar\frac{\partial\hat{\chi}'}{\partial\tau} &= \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\zeta^2\right]\hat{\chi}' \\ &\quad + 2g\left[|\chi_0|^2 + n'\right]\hat{\chi}' + g\chi_0^2\hat{\chi}'^\dagger. \end{aligned} \quad (14)$$

上述方程与标度函数  $b(t)$  无关, 其中  $n'(\zeta, \tau) = \langle\hat{\chi}'^\dagger(\zeta, \tau)\hat{\chi}'(\zeta, \tau)\rangle$ . 因此在共动坐标系中, 只需求解势场恒定的情况, 然后通过  $b(t)$  的演化方程就可以得到任意时刻势场变化情况问题的解.

在共动坐标系下, 密度涨落算符

$$\delta\hat{\rho}(\zeta, \tau) = \left[\chi_0^*(\zeta, \tau)\hat{\chi}'(\zeta, \tau) + \chi_0(\zeta, \tau)\hat{\chi}'^\dagger(\zeta, \tau)\right]/b(t). \quad (15)$$

在 Thomas-Fermi 近似下, 取凝聚体凝聚部分波函数  $\chi_0(\zeta, \tau) = \sqrt{\mu/g}e^{-i\mu\tau/\hbar}$ , 涨落部分算符  $\hat{\chi}'(\zeta, \tau) = \sum_k \hat{\chi}_k e^{-i\mu\tau/\hbar} \cos(\mathbf{k}\cdot\zeta)$ , 则在凝聚体自由膨胀过程中两点之间的密度-密度关联所引起的相对密度涨落大小为

$$\begin{aligned} C_2(k) &= \int \frac{\langle\delta\hat{\rho}(0, \tau)\delta\hat{\rho}(\zeta, \tau)\rangle}{\rho_0^2(t)} e^{i\mathbf{k}'\cdot\zeta} d^2\zeta \\ &= \int \frac{g}{\mu} \left\langle \sum_k (\hat{\chi}_k \hat{\chi}_k + \hat{\chi}_k \hat{\chi}_k^\dagger + \hat{\chi}_k^\dagger \hat{\chi}_k + \hat{\chi}_k^\dagger \hat{\chi}_k^\dagger) \cos(\mathbf{k}\cdot\zeta) \right\rangle e^{i\mathbf{k}'\cdot\zeta} d^2\zeta \\ &= \frac{g\hbar k}{\mu\sqrt{4m\mu + \hbar^2 k^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

由上式可知, 对准二维玻色-爱因斯坦凝聚体, 在长波极限下, 两点间的密度关联函数正比于波数  $k$ , 而在短波极限下, 密度关联函数趋近于一个常数  $g/\mu$ . 为了形象地理解相对密度涨落大小随波数的变化规律, 我们给出了标度化后的  $C'_2(k) = C_2(k)/(g/\mu)$  随标度化后的波数  $k' = k/(\sqrt{m\mu}/\hbar)$  的变化趋势图 (见图 1).

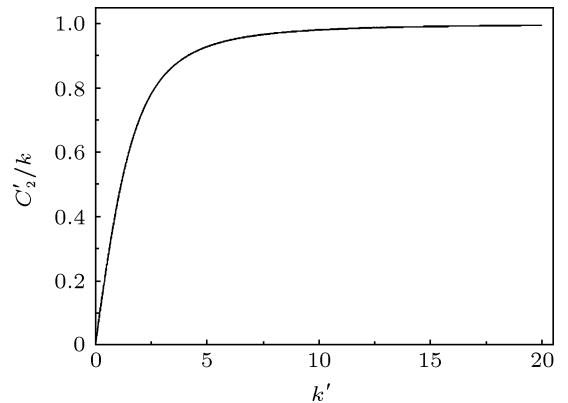


图 1 标度化后的相对密度涨落大小  $C'_2(k)$  随标度化后的波数  $k'$  的变化趋势图

在一般情况下, 对二维玻色-爱因斯坦凝聚体, 相互作用强度  $g = \frac{2\sqrt{2\pi\hbar^2}a_s}{ma_z}$ , 恢复长度  $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mu}}$ , 对波数为  $k = 2\pi/\xi$  的声子模, 在相体积中由涨落所引起的相对密度涨落大小为  $C_2(k)/\xi^2 = 4\sqrt{\pi}a_s/a_z$ . 取典型的二维玻色-爱因斯坦凝聚的实验值 [28]  $a_s = 2.8 \text{ nm}$ ,  $a_z = 0.746 \text{ }\mu\text{m}$ , 可以得到  $C_2(k)/\xi^2 = 2.66\%$ .

## 4 结论

本文研究了准二维玻色-爱因斯坦凝聚体自由膨胀时两点之间的密度-密度关联. 在推导过程中考虑了密度和相位涨落, 给出了准二维玻色-爱因斯坦凝聚系统的有效拉格朗日密度函数和量子涨落

的算符化表示, 计算结果表明在长波极限下, 两点间的密度关联函数正比于波数  $k$ , 而在短波极限下, 密度关联函数趋近于一个常数, 并应用实验参数, 计算了由涨落所引起的相对密度涨落大小, 为进一步的实验设计提供了思路.

- [1] Yasunaga M, Tsubota M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 023624  
Yasunaga M, Tsubota M 2011 *Phys. Rev. A* **83** 013618
- [2] Levy S, Lahoud E, Shoroni I, Steinhauer J 2007 *Nature* **449** 579
- [3] Liu B, Fu L B, Yang S P, Liu J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 033601
- [4] Zhang J N, Sun C P, Yi S, Nori F 2011 *Phys. Rev. A* **83** 033614
- [5] Wang W Y, Meng H J, Yang Y, Qi P T, Ma Y Y, Ma Y, Wang S J, Duan W S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 087302 (in Chinese) [王文元, 蒙红娟, 杨阳, 祁鹏堂, 马云云, 马莹, 王善进, 段文山 2012 物理学报 **61** 087302]
- [6] Meng H J, Yang Y, Wang W Y, Qi P T, Ma Y Y, Ma Y, Wang S J, Duan W S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 060303 (in Chinese) [蒙红娟, 杨阳, 王文元, 祁鹏堂, 马云云, 马莹, 王善进, 段文山 2012 物理学报 **61** 060303]
- [7] Wang J Z, Cao H, Dou F Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220305 (in Chinese) [王建忠, 曹辉, 豆福全 2012 物理学报 **61** 220305]
- [8] Liu J, Zhang C W, Raizen M G, Niu Q 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013601
- [9] Teng F, Xie Z W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 026701 (in Chinese) [滕斐, 谢征微 2013 物理学报 **62** 026701]
- [10] Cui B, Wang L C, Yi X X 2010 *Phys. Rev. A* **82** 062105
- [11] Wuster S, Dabrowska-Wuster B J, Davis M J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 080401
- [12] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [13] Tozzo C, Dalfovo F 2004 *Phys. Rev. A* **69** 05360  
Liu S J, Xiong H W 2009 *Physica B-Condensed Matter* **404** 3510  
Wu M Z, Zhou X J, Liu W M, Chen X Z 2010 *Phys. Rev. A* **81** 033625
- [14] Xu Y, Xiong Z Z, Li Z X, Chen B, Tan L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4734
- [15] Imambekov A, Mazets I E, Petrov D S, Gritsev V, Manz S, Hofferberth S, Schumm T, Demler E, Schmiedmayer J 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033604
- [16] Salasnich L, Manini N, Bonelli F, Korbman M, Parola A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 043616
- [17] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [18] Castin Y, Dum R, 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 5315 Ohberg P, Santos L 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 240402
- [19] Kagan Yu, Surkov E L, Shlyapnikov G V 1996 *Phys. Rev. A* **54** R1753  
Kagan Yu, Surkov E L, Shlyapnikov G V 1997 *Phys. Rev. A* **55** R18
- [20] Salasnich L, Parola A, Reatto L, 2005 *Phys. Rev. A* **72** 025602  
Diana G, Manini N, Salasnich L 2006 *Phys. Rev. A* **73** 065601
- [21] Prain A, Fagnocchi S, Liberati S 2010 *Phys. Rev. D* **82** 105018
- [22] Carusotto I, Fagnocchi S, Recati A, Balbinot R, Fabbri A, 2008 *New J. Phys.* **10** 103001
- [23] Balbinot R, Fabbri A, Fagnocchi S, Recati A, Carusotto I 2008 *Phys. Rev. A* **78** 021603
- [24] Recati A, Pavloff N, Carusotto I 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043603
- [25] Zapata I, Albert M, Parentani R, Sols F 2011 *New J. Phys.* **13** 063048
- [26] Carusotto I, Balbinot R, Fabbri A, Recati A 2010 *Eur. Phys. J. D* **56** 391
- [27] Larre P E, Recati A, Carusotto I, Pavloff N 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013621
- [28] Gorlitz A, Vogels J M, Leanhardt A E, Raman C, Gustavson T L, Abo-Shaeer J R, Chikkatur A P, Gupta S, Inouye S, Rosenband T, Ketterle W 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 130402

# Density-density correlation in quasi two-dimensional free expanding Bose-Einstein condensates\*

Xu Yan Fan Wei<sup>†</sup> Chen Bing Nan Xiang-Hong Chen Da  
Zhou Qiang Zhang Lu-Yin

( College of Science, Shandong University of Science & Technology, Qingdao 266510, China )

( Received 5 April 2013; revised manuscript received 8 August 2013 )

## Abstract

The effective Lagrangian density function and the quantum fluctuation of the wave function in the form of quantized operators are presented for a quasi two-dimensional Bose-Einstein condensate by means of Madelung transformation. This paper calculates the two-point density-density correlation function of the condensate during its free expansion after its confinement potential is removed. Results show that the two-point density-density correlation function in the long-wave limit is proportional to the wave number  $k$  and it tends to be a constant in the short-wave limit.

**Keywords:** Bose-Einstein condensates, quantum fluctuation, density correlation

**PACS:** 67.85.De, 42.40.Lc, 03.75.Kk

**DOI:** 10.7498/aps.62.216701

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11105086), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. BS2011DX029), the basic scientific research project of Qingdao, China (Grant No. 11-2-4-4-(6)-jch), and the SDUST research fund (2011KYJQ101).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: x1y5@hotmail.com