电压型双频率控制开关变换器的动力学建模与多周期行为分析*

吴松荣[1)†] 何圣仲[1)] 许建平[1)] 周国华[1)] 王金平[2)]

1) (磁浮技术与磁浮列车教育部重点实验室, 西南交通大学电气工程学院, 成都 610031)

2) (合肥工业大学电气与自动化工程学院, 合肥 230009)

(2013 年 6 月 28 日收到; 2013 年 7 月 23 日收到修改稿)

在断续导电模式下, 建立了电压型双频率控制开关变换器的动力学模型, 并推导了相应的特征值方程. 根据动力学模型, 采用分岔图研究了电路参数变化时变换器存在的边界碰撞分岔行为和周期 2, 周期 3, 周期 4 等多周期行为, 结果表明: 变换器经历了周期 1 态、多周期态、周期 1 态的分岔路由; 周期态的转变均是由边界碰撞分岔引起的. 根据特征值方程, 采用 Lyapunov 指数研究了变换器的稳定性, 结果表明: 随着电路参数的变化, Lyapunov 指数始终小于零, 变换器一直工作于稳定的周期态, 验证了电压型双频率控制开关变换器的周期 3 行为并不意味着变换器会必然发生混沌. 通过电路仿真, 分析了负载变化时变换器的时域波形、相轨图和频谱图, 验证了动力学模型的可行性和理论分析的正确性. 实验结果验证了文中的仿真结果.

关键词: 开关变换器, 双频率控制, 边界碰撞分岔, 多周期行为

PACS: 84.30.Jc, 05.45.−a **DOI:** 10.7498/aps.62.218403

1 引 言

开关变换器是一种典型的非线性时变动力学系统, 存在倍周期分岔 [1,2]、边界碰撞分岔 [3,4]、Hopf 分岔 [5,6]、Neimark-Sacker 分岔 [7,8]、间歇与混沌 [9] 等丰富的动力学行为. 这些非线性动力学行为揭示了开关变换器的运行机理和内在特性, 同时也影响了开关变换器的性能. 因此, 分析和研究开关变换器的动力学行为, 对于开关变换器的设计和应用都具有重要的指导意义和实用价值.

近年来, 已有不少文献对电压型控制、电流型控制、V^2 控制、脉冲序列控制开关变换器的动力学行为进行了深入的分析和研究, 揭示了其存在的倍周期分岔、边界碰撞分岔等典型的分岔行为 [4,8,10−17]. 开关变换器的控制方式不同, 其内在的运行特性及动力学行为也有所不同. 结合峰值电流控制和谷值电流控制, 文献 [11—13] 揭示并证明了开关变换器存在的对称动力学行为, 为电流型控制开关变换器的设计提供了有益的指导和参考; 文献 [18, 19] 对单周控制开关变换器的动力学行为进行了研究, 揭示了开关变换器存在的降频现象和低频波动现象, 并指出降频现象是由于复位器积分的输出无法到达参考电压造成的; 采用脉冲序列控制, 文献 [20] 发现了开关变换器存在的低频波动现象, 并分析了其存在的机理和抑制方法; 文献 [21, 22] 对恒定导通时间控制、固定关断时间控制开关变换器的多开关周期振荡、脉冲簇发等现象进行了分析和探讨, 并指出输出电容等效串联电阻是造成多开关周期振荡现象、脉冲簇发现象的关键因素. 在相同的控制方式下, 若开关变换器的工作模式不同, 其动力学特性也不同. 当变换器工作于连续导电模式 (continuous conduction mode, CCM) 时, 可以建立二维动力学模型来研究开关变换器的动力学

* 国家自然科学基金 (批准号: 51177140)、四川省青年科技基金 (批准号: 2013JQ0033) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2682013ZT20, SWJTU11CX032) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: srwu88@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

行为; 当变换器工作于断续导电模式 (discontinuous conduction mode, DCM) 时, 变换器的电感电流在每一个开关周期的起始和结束时刻均为零, 系统降阶成一维, 只需建立开关变换器的一维动力学模型来研究它的动力学行为, 但此时的动力学特性与 CCM 时截然不同. 例如, 工作于 CCM 模式的脉冲序列控制 Buck 变换器存在低频波动现象 [20]; 而工作于 DCM 模式的脉冲序列控制 Buck 变换器却不存在低频波动现象 [4].

电压型双频率控制是一种的新颖的、特殊的开关变换器控制方法, 具有独特的动力学行为. 与上述文献中的控制技术不同, 电压型双频率控制的思想是: 根据输出电压和参考电压之间的大小关系, 选择预先设置的具有相同导通时间的高、低频率脉冲作为控制脉冲, 对变换器的开关管进行控制, 从而实现变换器输出电压的调节 [23,24]. 电压型双频率控制适用于对开关变换器瞬态响应速度要求较高和电磁干扰噪声要求较低的应用场合 [24]. 关于电压型双频率控制开关变换器的动力学建模与分析, 目前未有文献报道. 本文以 Buck 变换器为研究对象, 对电压型双频率控制开关变换器进行了深入研究, 建立其动力学模型和特征值方程, 并在此基础上开展了相应的理论分析、仿真研究和实验研究, 揭示了边界碰撞分岔引起的多周期行为以及周期 3 并不意味着系统会必然发生混沌行为.

2 动力学建模

2.1 工作原理

图 1(a) 所示为电压型双频率控制 Buck 变换器, 其中功率开关管 S、整流二极管 D、电感 L 和电容 C 都假设是理想的, 即不含有寄生参数; $v_{\rm in}$, $v_{\rm o}$, R 分别表示输入电压、输出电压、负载电阻. 电压型双频率控制 DCM Buck 变换器的工作波形示意图如图 1(b) 所示 [23].

从图 1 可以看出, 在任意开关周期开始时刻, 控制脉冲上升沿来临, 使能采样/保持电路进行采样, 当采样的输出电压 $v_{\rm o}$ 低于参考电压 $V_{\rm ref}$ 时, 比较器输出高电平, 选择器采用高频率脉冲 $P_{\rm H}$ 作为控制脉冲, 以提升输出电压; 反之, 比较器输出低电平, 选择器采用低频率脉冲 $P_{\rm L}$ 脉冲作为控制脉冲, 以降低输出电压. 电压型双频率控制能够根据输出电压和参考电压之间的大小关系, 简单的采用高、低频率脉冲作为控制脉冲, 经驱动电路后对主功率开关管进行控制, 从而实现 DCM Buck 变换器输出电压的快速调节. 图 1(b) 中高频率脉冲 $P_{\rm H}$ 和低频率脉冲 $P_{\rm L}$ 具有相同的导通时间 $t_{\rm ON}$、不同的开关频率 $f_{\rm H}=1/T_{\rm H}$ 和 $f_{\rm L}=1/T_{\rm L}$, 其中 $f_{\rm H}>f_{\rm L}$, $T_{\rm H}$, $T_{\rm L}$ 分别为高、低频率脉冲的开关周期.

2.2 动力学模型

当 Buck 变换器工作于 DCM 模式时, 电路存在三个工作状态: 开关管导通、二极管关断, 开关管关断、二极管导通, 开关管关断、二极管关断. 采用电感电流 $i_{\rm L}$ 和电容电压 $v_{\rm c}$ 作为状态变量, 并定义状态矢量 $\boldsymbol{x}=[i_{\rm L}\quad v_{\rm c}]^{\rm T}$, 其中 T 表示矩阵转置, 可得 DCM Buck 变换器的三个状态方程, 如下:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1 v_{\rm in}, \\
&\qquad nT_X \leqslant t < nT_X + t_{\rm ON}, \\
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_2 v_{\rm in}, \\
&\qquad nT_X + t_{\rm ON} \leqslant t < nT_X + t_{\rm ON} + t_{{\rm F}n}, \\
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_3 v_{\rm in}, \\
&\qquad nT_X + t_{\rm ON} + t_{{\rm F}n} \leqslant t < (n+1)T_X, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

其中 T_X 为参考电压 $V_{\rm ref}$ 与第 n 次采样的输出电压比较后选择的开关周期, $t_{{\rm F}n}$ 为二极管在第 n 个开关

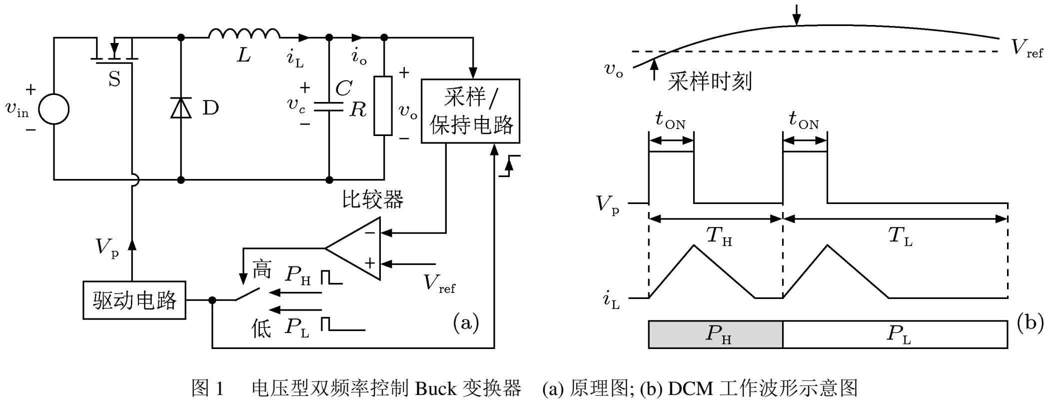


图 1 电压型双频率控制 Buck 变换器 (a) 原理图; (b) DCM 工作波形示意图

周期内的导通时间, 矩阵矢量 $\boldsymbol{A}_j (j=1,2,3)$ 和 $\boldsymbol{B}_j (j=1,2,3)$ 分别为

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

对于图 1 所示的电压型双频率控制 Buck 变换器, 其动力学模型可以表示成第 $(n+1)T_X$ 时刻的状态矢量 $\boldsymbol{x}_{n+1}$ 与第 nT_X 时刻的状态矢量 $\boldsymbol{x}_n$ 之间的关系, 即 $\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$, 其中 $\boldsymbol{x}_n=[i_n \quad v_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{n+1}=[i_{n+1} \quad v_{n+1}]^{\mathrm{T}}$, i_n, v_n 分别为电感电流 i_{L}、电容电压 v_{c} 在第 nT_X 时刻的采样值.

记电感电流和电容电压在第 n 个开关周期的初始值分别为 $i_n=0$ 和 v_n, 根据 (1) 式的第一个方程, 可得 Buck 变换器在 $t=nT_X+t_{\mathrm{ON}}$ 时刻的电感电流和电容电压, 分别为

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{L}}(nT_X+t_{\mathrm{ON}}) = {} & \mathrm{e}^{-\alpha t_{\mathrm{ON}}}[c_{11}\cos(\omega t_{\mathrm{ON}}) \\ & + c_{12}\sin(\omega t_{\mathrm{ON}})]+v_{\mathrm{in}}/R, \end{aligned} \tag{3}$$
$$\begin{aligned} v_{\mathrm{c}}(nT_X+t_{\mathrm{ON}}) = {} & \mathrm{e}^{-\alpha t_{\mathrm{ON}}}[c_{21}\cos(\omega t_{\mathrm{ON}}) \\ & + c_{22}\sin(\omega t_{\mathrm{ON}})]+v_{\mathrm{in}}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\alpha=1/(2RC),\quad \omega=\sqrt{1/(LC)-\alpha^2},$$
$$c_{11}=-\frac{v_{\mathrm{in}}}{R},\quad c_{12}=\frac{\alpha}{\omega}c_{11}+\frac{v_{\mathrm{in}}-v_n}{\omega L},$$
$$c_{21}=v_n-v_{\mathrm{in}},\quad c_{22}=-\frac{\alpha}{\omega}(v_{\mathrm{in}}+v_n).$$

经过时间间隔 t_{ON} 后, 开关管 S 关断、二极管 D 导通, 电感电流 i_{L} 线性下降; 当 i_{L} 下降到零时, 二极管 D 关断. 根据 (1) 式的第二个状态方程, 以 (3), (4) 式为初值, 可得 Buck 变换器在 $t=nT_X+t_{\mathrm{ON}}+t_{\mathrm{Fn}}$ 时刻的电感电流和电容电压, 分别为

$$\begin{aligned} & i_{\mathrm{L}}(nT_X+t_{\mathrm{ON}}+t_{\mathrm{Fn}}) \\ & =\mathrm{e}^{-\alpha t_{\mathrm{Fn}}}[c_{31}\cos(\omega t_{\mathrm{F}n})+c_{32}\sin(\omega t_{\mathrm{F}n})], \end{aligned} \tag{5}$$
$$\begin{aligned} & v_{\mathrm{c}}(nT_X+t_{\mathrm{ON}}+t_{\mathrm{F}n}) \\ & =\mathrm{e}^{-\alpha t_{\mathrm{F}n}}[c_{41}\cos(\omega t_{\mathrm{F}n})+c_{42}\sin(\omega t_{\mathrm{F}n})], \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$c_{31}=i_{\mathrm{L}}(nT_X+t_{\mathrm{ON}}),\quad c_{41}=v_{\mathrm{c}}(nT_X+t_{\mathrm{ON}}),$$
$$c_{32}=\frac{\alpha}{\omega}c_{31}-\frac{c_{41}}{\omega L},\quad c_{42}=\frac{c_{31}}{\omega C}-\frac{\alpha}{\omega}c_{41}.$$

令 (5) 式为零, 可以求得第 n 个开关周期内二极管 D 的导通时间 $t_{\mathrm{F}n}$. 由于此时的方程为三角函数方程, 很难求得 t_{Fn} 的解析解. 如果变量 x 足够小, 有近似关系: $\cos(x)=1$, $\sin(x)=x$. 文献 [8] 指出采用这样的近似是合理的, 且减少了计算时间. 于是, $t_{\mathrm{F}n}$ 有如下近似解:

$$t_{\mathrm{F}n}=\frac{-c_{31}}{\omega c_{32}}. \tag{7}$$

经过时间间隔 $t_{\mathrm{ON}}+t_{\mathrm{Fn}}$ 后, 开关管 S 关断、二极管 D 关断; 电感电流 i_{L} 保持为零, 电容给负载供能, 电容电压下降. 根据 (1) 式的第三个状态方程, 以 (5) 式, (6) 式为初值, 可得 Buck 变换器在 $t=(n+1)T_X$ 时刻的电感电流和电容电压, 分别为

$$i_{\mathrm{L}}((n+1)T_X)=i_{n+1}=0, \tag{8}$$
$$\begin{aligned} & v_{\mathrm{c}}((n+1)T_X) \\ & =v_{n+1}=v_{\mathrm{c}}(nT_X+t_{\mathrm{ON}}+t_{\mathrm{Fn}})\mathrm{e}^{-2\alpha(T_X-t_{\mathrm{ON}}-t_{\mathrm{F}n})}. \end{aligned} \tag{9}$$

当 Buck 变换器工作于 DCM 模式时, $i_n=i_{n+1}=0$, 二维动力学模型降阶成一维, 即动力学模型可以表示为 $v_{n+1}=f(v_n)$. 当 $v_n\leqslant V_{\mathrm{ref}}$ 时, 选择高频率脉冲 P_{H} 作为控制脉冲, 即 $T_x=T_{\mathrm{H}}$; 当 $v_n>V_{\mathrm{ref}}$ 时, 选择低频率脉冲 P_{L} 作为控制脉冲, 即 $T_x=T_{\mathrm{L}}$. (9) 式可以进一步写成

$$v_{n+1}=f(v_n)=\begin{cases} v_{\mathrm{c}}(nT_{\mathrm{H}}+t_{\mathrm{ON}}+t_{\mathrm{Fn}})\mathrm{e}^{-2\alpha(T_{\mathrm{H}}-t_{\mathrm{ON}}-t_{\mathrm{F}n})}, & v_n\leqslant V_{\mathrm{ref}}, \\ v_{\mathrm{c}}(nT_{\mathrm{L}}+t_{\mathrm{ON}}+t_{\mathrm{Fn}})\mathrm{e}^{-2\alpha(T_{\mathrm{L}}-t_{\mathrm{ON}}-t_{\mathrm{F}n})}, & v_n>V_{\mathrm{ref}}. \end{cases} \tag{10}$$

(10) 式与 (3) 式、(4) 式、(6) 式、(7) 式紧密关联, 它们构成了电压型双频率控制 DCM Buck 变换器的动力学模型, 通过该模型, 可以分析电压型双频率控制 Buck 变换器的动力学行为.

3 多周期行为分析

3.1 分岔分析

根据 2.2 节建立的动力学模型, 采用数值仿真

对电压型双频率控制 DCM Buck 变换器的分岔行为进行分析. 固定电路参数: 输入电压 $v_{in} = 14$ V, 输出参考电压 $V_{ref} = 6$ V, 电容 $C = 470$ μF, 电感 $L = 5.6$ μH, 固定导通时间 $t_{ON} = 6$ μs, 高频率脉冲周期 $T_H = 18$ μs, 低频率脉冲周期 $T_L = 72$ μs. 选择负载 R 为分岔参数, 变化范围为 1.5—7.6 Ω, 得到如图 2 所示的电容电压 (亦即输出电压) 分岔图.

从图 2(a) 可以看出: 随着负载 R 的逐渐增大, 当 $R = 1.81$ Ω 时, 变换器发生了第一次边界碰撞分岔, 从周期 1 态进入了多周期态. 随着负载进一步增大, 变换器的多周期轨道不断与边界 $v_n = V_{ref}$ 发生碰撞, 每发生一次边界碰撞, 变换器的周期轨道发生改变. 当 $R = 7.33$ Ω 时, 变换器发生了最后一次边界碰撞分岔, 从多周期态进入了周期 1 态. 从全负载范围来看, 变换器经历了周期 1 态、多周期态 (周期 2、周期 3、周期 4 等)、周期 1 态的分岔路由. 为了清晰地观察多周期态, 图 2(b)—(d) 给出了几个典型的局部分岔图.

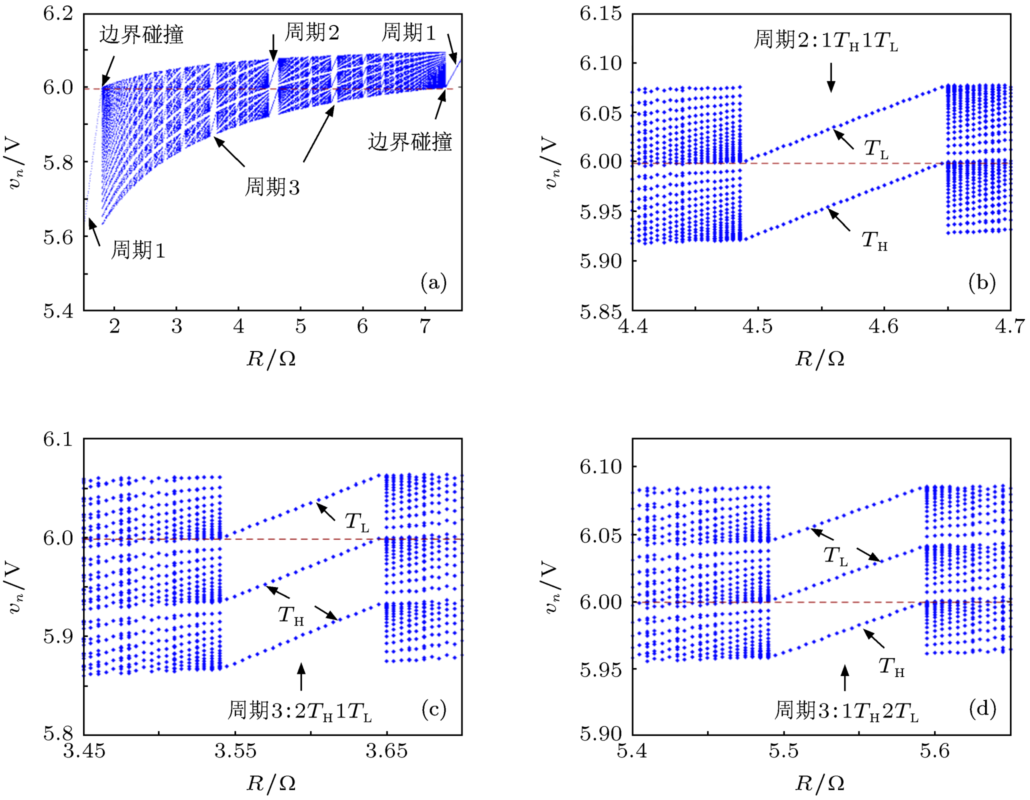


图 2 以 R 为参数的分岔图 (a) 全局分岔图 $R = 1.5$—7.6Ω; (b) 局部分岔图 $R = 4.4$—4.7 Ω; (c) 局部分岔图 $R = 3.45$—3.7 Ω; (d) 局部分岔图 $R = 5.4$—5.65 Ω

在图 2(a) 中, 当 $R < 1.81$ Ω 时, 负载较重、输出电压小于参考值, 电压型双频率控制器选择高频率脉冲 T_H 作为控制脉冲, 变换器工作于周期 1 态 (1T_H); 当 $R > 7.33$ Ω 时, 负载较轻、输出电压大于参考值, 控制器选择低频率脉冲 T_L 作为控制脉冲, 变换器工作于周期 1 态 (1T_L); 以 $v_n = 6$ V 为边界, 边界以下 ($v_n < 6$ V) 的离散点代表高频率脉冲, 边界以上 ($v_n > 6$ V) 的离散点代表低频率脉冲, 对于任意一个 R 值, 若存在 μ_H 个 T_H 和 μ_L 个 T_L 的离散点组合, 则变换器工作于周期 $\mu_H + \mu_L$ 态. 从图 2(a) 中还可以观察出: 当 $R \in [4.49\ \Omega, 4.64\ \Omega]$ 时, 电路处于额定负载区, 有 $\mu_H = \mu_L = 1$, 变换器工作于周期 2 态, 如图 2(b) 所示; 当 $R < 4.49$ Ω 时, 电路处于负载较重区, 有 $\mu_H > \mu_L$; 当 $R > 4.64$ Ω 时, 电路处于负载较轻区, 有 $\mu_H < \mu_L$. 电路在负载较重区出现周期 3 态, 其高、低频率脉冲组合方式为 $2T_H1T_L$, 如图 2(c) 所示; 电路在负载较轻区也会出现周期 3 态, 相应的高、低频率脉冲组合方式为 $1T_H2T_L$, 如图 2(d) 所示. 根据图 2, 可以得到电阻变化时高、低频率脉冲组合方式以及相应的变换器工作状态, 如表 1所示.

图 3(a) 和 (b) 分别给出了以 v_{in} 和 T_H 为参数的分岔图, 此时负载 $R = 4.5$ Ω. 从图 3(a) 可以看出: 随着参数 v_{in} 的逐渐增大, 变换器经历了周期 1 态 (1T_H)、多周期态、周期 1 态 (1T_L) 的分岔路由, 与图 2(a) 的分岔路由一致. 当 $v_{in} = 10.35$ V 时, 变

换器发生第一次边界碰撞分岔, 从周期 1 态 ($1T_H$) 进入了多周期态. 当 $v_{in} = 16.90$ V 时, 变换器发生最后一次边界碰撞分岔, 从多周期态进入了周期 1 ($1T_L$) 态. 在负载功率一定下, 当 v_{in} 较小时, 控制脉冲中包含较多的高频率脉冲; 反之, 包含较多的低频率脉冲 [24]. 当 $v_{in} \in [13.98$ V, 14.18 V], 变换器工作于周期 2 态, 控制脉冲组合方式为 $1T_H1T_L$; 当 $v_{in} < 13.98$ V 时, 为输入电压较小区, 此时分岔图中边界 ($v_n = 6$ V) 以下的离散点明显增多; 当 $v_{in} > 14.18$ V 时, 为输入电压较大区, 此时分岔图中边界以上的离散点明显增多.

表 1　电阻 R 变化时高、低频率脉冲的组合方式及变换器工作状态

R/Ω	组合方式	工作状态
[1.50,　1.81]	$1T_H$	周期 1
[2.47,　2.50]	$6T_H1T_L$	周期 7
[2.60,　2.64]	$5T_H1T_L$	周期 6
[2.79,　2.84]	$4T_H1T_L$	周期 5
[3.07,　3.14]	$3T_H1T_L$	周期 4
[3.55,　3.64]	$2T_H1T_L$	周期 3
[3.96,　4.01]	$3T_H2T_L$	周期 5
[4.49,　4.64]	$1T_H1T_L$	周期 2
[5.13,　5.18]	$2T_H3T_L$	周期 5
[5.50,　5.59]	$1T_H2T_L$	周期 3
[6.00,　6.06]	$1T_H3T_L$	周期 4
[6.30,　6.34]	$1T_H4T_L$	周期 5
[7.33,　7.60]	$1T_L$	周期 1

从图 3(b) 可以看出: 随着参数 T_H 的逐渐减小, 变换器电路经历了周期 1 态 ($1T_H$)、多周期态的分岔路由; 由于 T_H 的最小值为 t_{ON}, 所以当前电路参数下, 变换器不可能工作于由 $1T_L$ 构成的周期 1 态. 在低频率脉冲 T_L 确定的情况下, 图 3(b) 提供了 T_H 参数的选择依据. 例如, 要使变换器工作于周期 2 态, T_H 应该在 [14.98 μs, 18.28μs] 范围内取值. 类似地, 在高频率 T_H 脉冲确定的情况下, 也可以得到 T_L 为分岔参数的分岔图, 据此而设计 T_L 的大小.

图 2、图 3 中的分岔图中均出现了周期 3 行为. 对于传统的连续、离散动力学系统而言, 周期 3 意味着系统存在混沌行为, 这里的周期 3 是指一个周期的 3 倍而言. 但是, 电压型双频率控制 DCM Buck 变换器中的周期 3 行为是两个周期 (T_H 和 T_L) 的组合行为, 它仅仅是多周期行为中的一种, 并不意味着变换器系统会必然发生混沌行为. 由此可以看出: 电压型双频率控制开关变换器是一种特殊的离散动力学系统, 其周期行为与传统动力学系统是不一致的, 比如, 它存在两个周期 1 行为 ($1T_H$ 和 $1T_L$). 下面用 Lyapunov 指数给予验证.

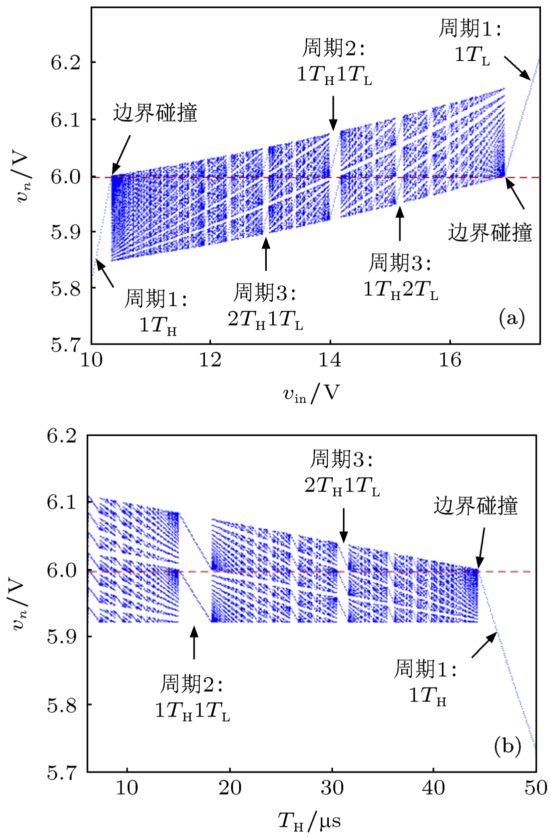


图 3　以 v_{in} 和 T_H 为参数的分岔图　(a) v_{in} = 10—17.5 V; (b) T_H = 6—50 μs

3.2　Lyapunov 指数

根据动力学模型 (10) 式与 (3) 式、(4) 式、(6) 式、(7) 式, 可得第 n 个开关周期的特征值 λ_n 方程

$$\lambda_n = \frac{dv_{n+1}}{dv_n} = \begin{cases} e^{-2\alpha(T_H - t_{ON} - t_{Fn})}[\rho_2 + 2\alpha\rho_1 v_c(nT_H + t_{ON} + t_{Fn})], & v_n \leqslant V_{ref}, \\ e^{-2\alpha(T_L - t_{ON} - t_{Fn})}[\rho_2 + 2\alpha\rho_1 v_c(nT_L + t_{ON} + t_{Fn})], & v_n > V_{ref}, \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$\rho_1 = -L(c_{31}\sigma_1 - c_{41}\sigma_2)/(\alpha L c_{31} - c_{41})^2,$$

$$\rho_2 = e^{-\alpha t_{Fn}}[(\sigma_1 + c_{42}\omega\rho_1 - c_{41}\alpha\rho_1)\cos(\omega t_{Fn})$$

$$+ (\sigma_3 - c_{41}\omega\rho_1 - c_{42}\alpha\rho_1)\sin(\omega t_{Fn})],$$

$$\sigma_1 = e^{-\alpha t_{ON}}[\cos(\omega t_{ON}) - \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t_{ON})],$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{\omega L}e^{-\alpha t_{ON}}\sin(\omega t_{ON}),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{\omega C}\sigma_2 - \frac{\alpha}{\omega}\sigma_1.$$

根据 (11) 式, 可进一步得到变换器系统的 Lyapunov 指数 λ_L 为

$$\lambda_L = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\ln|\lambda_n|. \tag{12}$$

要使电压型双频率控制 Buck 变换器工作于稳定的周期态, Lyapunov 指数 λ_L 必须小于或等于零. 若电压型双频率控制 Buck 变换器发生了混沌行为, 则 Lyapunov 指数必然是大于零的.

根据 (3) 式、(4) 式、(6) 式、(10) 式 —(12) 式, 选择与图 2(a) 和图 3(a) 相同的电路参数, 可以得到如图 4 所示的以 R 和 v_{in} 为参数的 Lyapunov 指数. 由图 4(a) 可知, 随着 R 的不断增加, Lyapunov 指数存在多次跳变, 该跳变是由边界碰撞分岔引起的; 在整个负载变化范围内, Lyapunov 指数均小于零, 表明变换器一直处于稳定的周期态, 不会发生混沌行为. 由图 4(b) 可知, 在整个输入电压变化范围内, Lyapunov 指数均小于零, 说明变换器也一直处于稳定的周期态. 图 4(a) 和 (b) 的 Lyapunov 指数分别与图 2(a) 和图 3(a) 的分岔图相对应, 因此, 验证了周期 3 并不意味着变换器会必然发生混沌行为.

3.3 多周期态分析

为了进一步观察和分析变换器出现的多周期行为, 以及验证动力学模型数值计算的结果, 选取与图 2(a) 相同的电路参数, 对图 1 进行 PSIM 电路仿真.

图 5(a)—(g) 分别给出了 $R = 1.7\ \Omega$, $R = 7.5\ \Omega$, $R = 4.5\ \Omega$, $R = 3.6\ \Omega$, $R = 5.5\ \Omega$, $R = 3.1\ \Omega$, $R = 2.8\ \Omega$ 时的 i_L 和 v_o 仿真波形, v_o-i_L 相轨图和 i_L 的频谱图. 从图 5(a1) 可以看出, 变换器工作于周期 1 态 ($1T_H$), 循环周期 $T_1 = T_H$, 由于电感电流存在保持为零的阶段, 所以变换器工作于 DCM 模式; 图 5(a2) 的相轨图为 1 个环, 表明变换器工作于周期 1 轨道; 图 5(a3) 的频谱图表现出离散的频谱, 说明变换器工作于周期态, 图中 f_0 为电感电流直流分量的频率, f_1 为基波频率且 $f_1 = 1/T_1 = 55.56$ kHz. 从图 5(b) 可以看出, 变换器工作于周期 1 态 ($1T_L$), 循环周期 $T_1 = T_L$, 相轨图表现为 1 个环, 频谱图表现出离散的频谱, $f_1 = 1/T_1 = 13.89$ kHz.

类似地, 从图 5(c) 可以看出变换器工作于周期 2 态, 循环周期 $T_1 = 1T_H + 1T_L$, 基波频率 $f_1 = 1/T_1 = 11.11$ kHz. 从图 5(d), (e) 可以看出变换器工作于周期 3 态, 循环周期分别为 $T_1 = 2T_H + 1T_L$, $T_1 = 1T_H + 2T_L$, 对应图 5(d3), (e3) 的基波频率 $f_1 = 9.26$ kHz, $f_1 = 6.17$ kHz. 图 5(f), (g) 的仿真波形表明变换器工作于周期 4 态 ($3T_H1T_L$)、周期 5 态 ($4T_H1T_L$). 根据图 5(a)—(g) 的仿真结果可知: 若变换器时域波形中的循环周期 $T_1 = \mu_H T_H + \mu_L T_L$, 则相轨图表现为 $\mu_H + \mu_L$ 个环, 变换器工作于周期 $\mu_H + \mu_L$ 轨道, 频谱图中的基波频率 $f_1 = 1/T_1 = 1/(\mu_H T_H + \mu_L T_L)$; 另一方面, 结合时域波形、相轨图、离散的频谱图可知, 变换器具有很强的多周期行为, 不存在混沌行为, 与 3.1 和 3.2 节分析一致, 验证了理论分析和动力学模型的正确性.

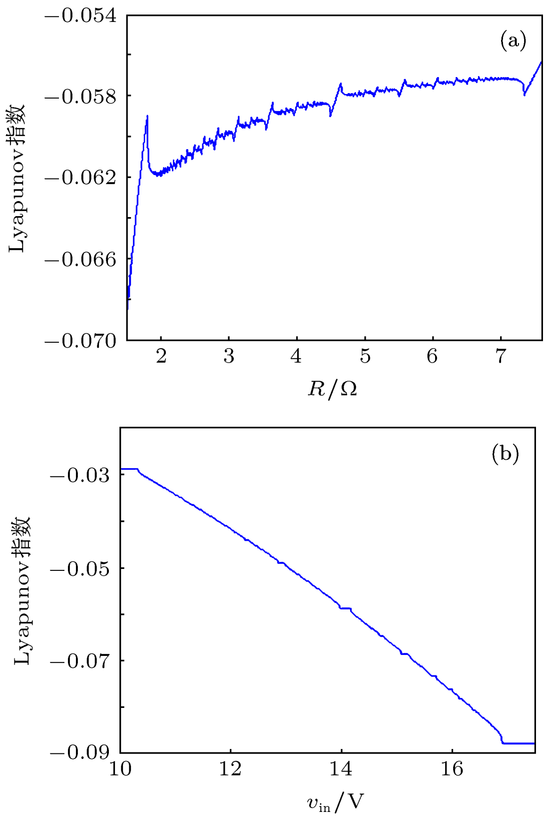
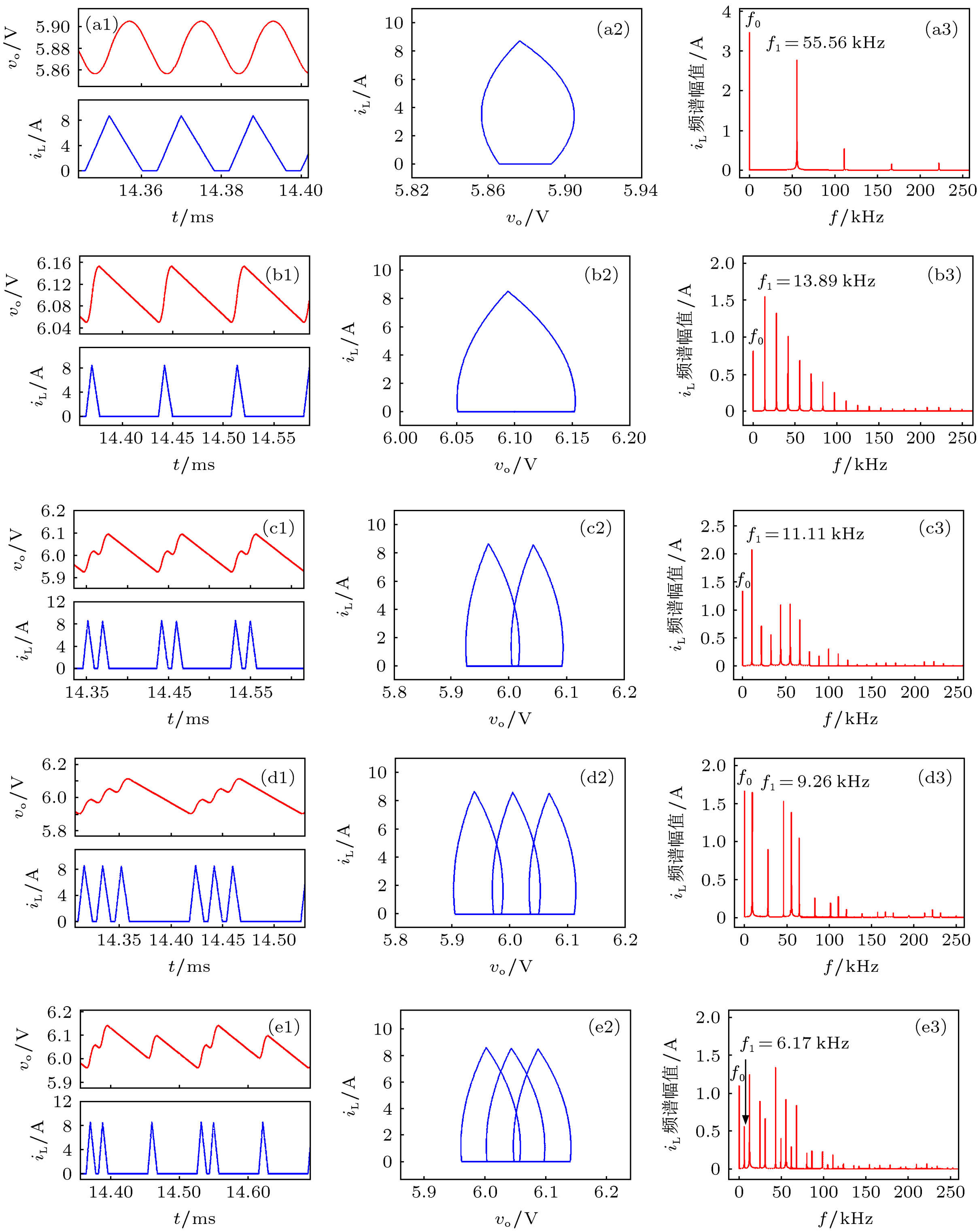


图 4 以 R 和 v_{in} 为参数的 Lyapunov 指数 (a) $R = 1.5$—$7.6\ \Omega$; (b) $v_{in} = 10$—17.5 V

4 电路实验验证

为了验证电路仿真结果的正确性, 采用与电路仿真相同的参数对电压型双频率控制 Buck 变换器进行实验研究. 图 6(a)—(g) 分别给出了 $R = 1.7\ \Omega$, $R = 7.5\ \Omega$, $R = 4.5\ \Omega$, $R = 3.6\ \Omega$, $R = 5.5\ \Omega$, $R = 3.1\ \Omega$, $R = 2.8\ \Omega$ 时的实验结果. 从图 6(a) 中可以看出: 图 6(a1) 的电感电流波形与图 5(a1) 一致, 输出电压波形存在明显的高频毛刺, 这是输出电容存在寄生电感造成的, 总体上与图 5(a1) 的输出电压基本一致;

图 6(a2) 的实验相轨图与图 5(a2) 的仿真相轨图基本一致, 实验相轨图略有倾斜的原因是因为电感存在寄生电阻, 实验相轨图的顶部有交叉状是输出电容的寄生电感造成的; 图 6(a3) 的实验频谱图与图 5(a3) 的基波频率一致, 每个频率点上的幅值与图 5(a3) 仅有微小差异, 这种差异性是计算频谱幅值的数据量不同引起的. 进一步对比图 6 和图 5 可知: 周期 1 ($R=1.7\ \Omega$ 和 $R=7.5\ \Omega$)、周期 2($R=4.5\ \Omega$)、周期 3($R=3.6\ \Omega$ 和 $R=5.5\ \Omega$)、周期 4($R=3.1\ \Omega$), 周期 5($R=2.8\ \Omega$) 的实验时域波形、相轨图和电感电流频谱与仿真结果相符. 实验结果验证了文中的仿真结果.



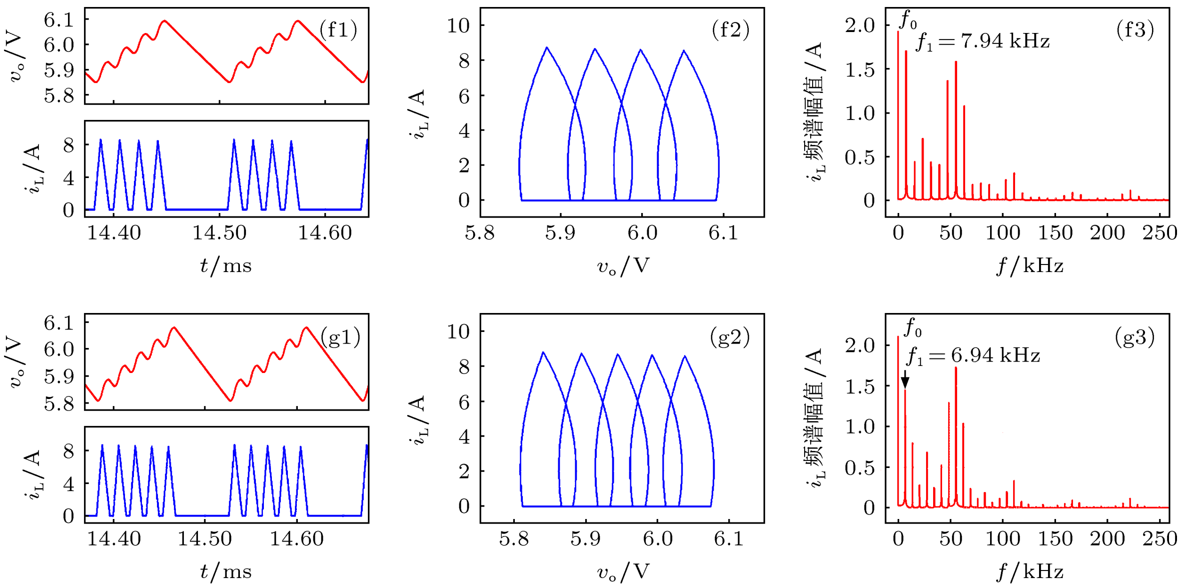
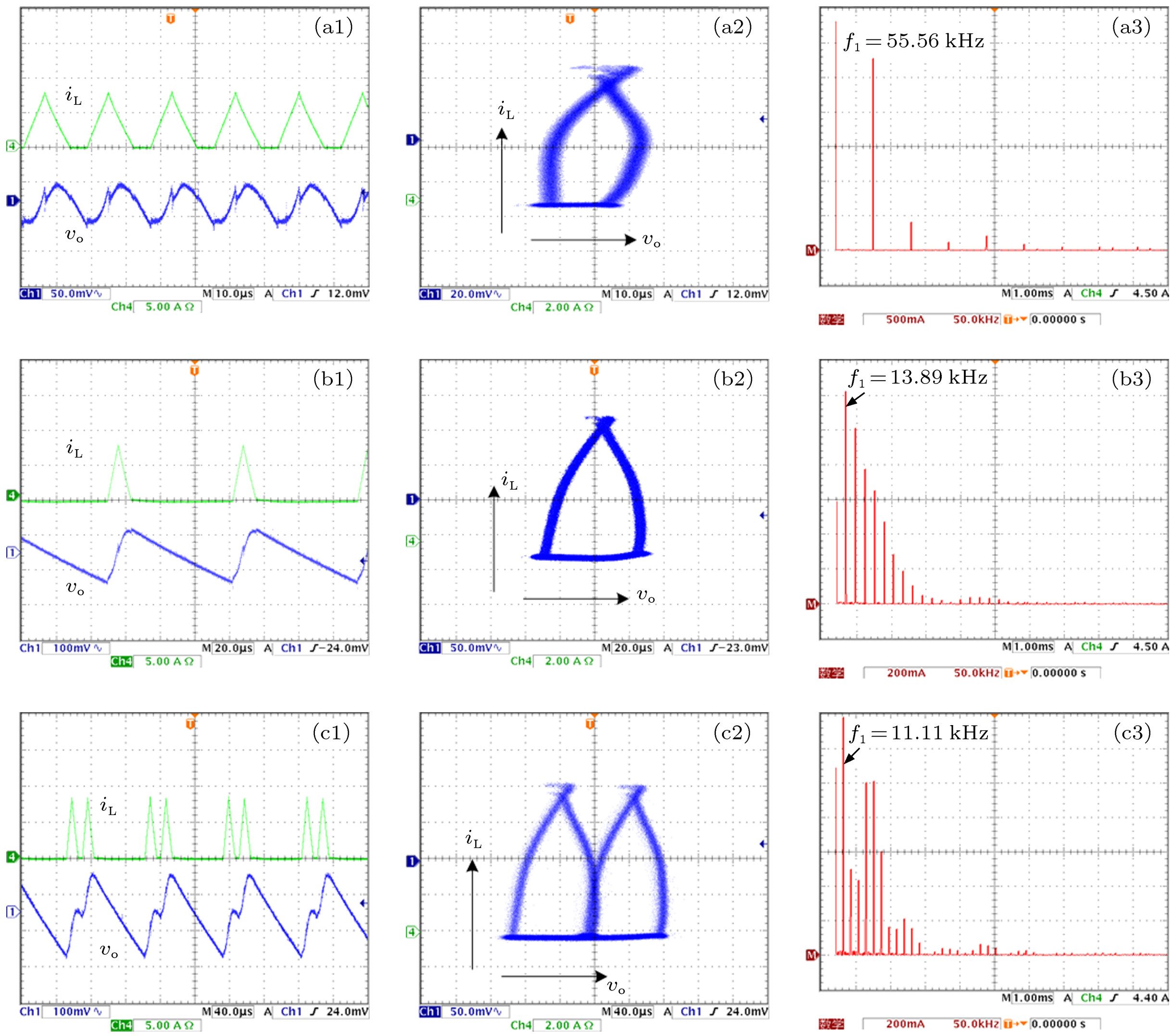


图 5　电路仿真的 i_L 和 v_o 波形 (左)、v_o-i_L 相轨图 (中)、i_L 的频谱图 (右)　(a) $R = 1.7\ \Omega$; (b) $R = 7.5\ \Omega$; (c) $R = 4.5\ \Omega$; (d) $R = 3.6\ \Omega$; (e) $R = 5.5\ \Omega$; (f) $R = 3.1\Omega$; (g) $R = 2.8\ \Omega$



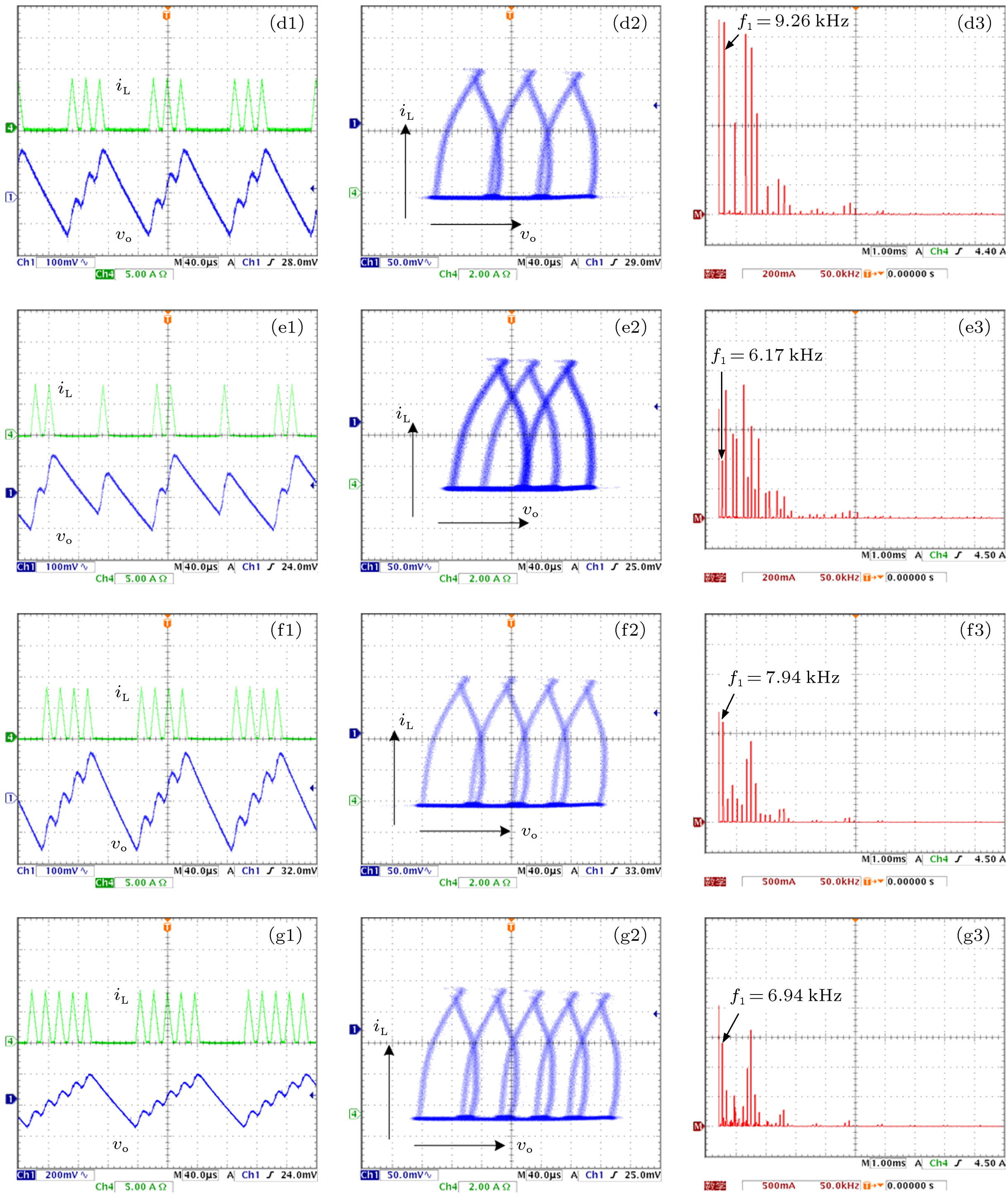


图 6 电路实验的 i_L 和 v_o 波形 (左)、v_o-i_L 相轨图 (中)、i_L 的频谱图 (右) (a) $R = 1.7\ \Omega$; (b) $R = 7.5\ \Omega$; (c) $R = 4.5\ \Omega$; (d) $R = 3.6\Omega$; (e) $R = 5.5\ \Omega$, (f) $R = 3.1\ \Omega$; (g) $R = 2.8\ \Omega$

5 结 论

根据开关管和二极管导通、关断时的状态方程, 本文建立了电压型双频率控制 DCM Buck 变换器的一维动力学模型, 并在此基础上, 推导了变换器的特征值方程. 基于动力学学模型, 采用分岔图研究了电路参数变化下变换器存在的边界碰撞分岔行为和多周期行为, 结果表明变换器经历了周期 1 态、多周期态 (周期 2、周期 3、周期 4 等)、周期 1 态的分岔路由, 不存在混沌行为. 根据特征值

方程, 进一步研究了变换器的 Lyapunov 指数, 结果表明变换器一直工作于稳定的周期态, 且验证了分岔图的正确性以及周期 3 并不意味着变换器会必然发生混沌行为.

采用 PSIM 电路仿真, 进一步分析了变换器出现的多周期行为, 结果表明: 变换器时域波形中的循环周期 $T_1 = \mu_H T_H + \mu_L T_L$, 其中 μ_H, μ_L 分别为 T_H, T_L 的个数, 相轨图表现为 $\mu_H + \mu_L$ 个环, 变换器工作于周期 $\mu_H + \mu_L$ 轨道, 离散频谱图中的基波频率 $f_1 = 1/T_1$, 验证了理论分析和离散迭代映射模型的正确性. 最后, 搭建实验装置, 对变换器进行了实验研究, 用实验结果验证了仿真结果的正确性.

[1] Chan W C Y, Tse C K 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* I **44** 1129

[2] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2012 *Chin. Phys.* B **21** 020505

[3] Banerjee S, Parui S, Gupta A 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst.* II **51** 649

[4] Sha J, Bao B C, Xu J P, Gao Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120501 (in Chinese) [沙金, 包伯成, 许建平, 高玉 2012 物理学报 **61** 120501]

[5] Aroudi A El, Bernadero L, Toribio E, Olivar G 1999 IEEE *Trans. Circuits Syst.* I **46** 1374

[6] Wang F Q, Ma X K, Yan Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060510 (in Chinese) [王发强, 马西奎, 闫晔 2011 物理学报 **60** 060510]

[7] Iu H H C, Tse C K, Pjevalica V, Lai Y M 2001 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **29** 281

[8] Zhou G H, Bao B C, Xu J P 2013 *Int J Bifurcation and Chaos* **23** 1350062

[9] Zhou Y F, Chen J N, IU H H C, Tse C K 2008 *Int J Bifurcation and Chaos* **18** 121

[10] Maity S, Tripathy D, Bhattacharya T K, Banerjee S 2007 *IEEE Trans. on Circuits and Systems* I **54** 1120

[11] Zhou G H, Xu J P, Bao B C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2272 (in Chinese) [周国华, 许建平, 包伯成 2010 物理学报 **59** 2272]

[12] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys.* B **19** 060508

[13] Zhou G H, Xu J P, Bao B C 2012 *Int J Bifurcation and Chaos* **22** 1250008

[14] Zhou G H, Bao B C, Xu J P, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys.* B **19** 050509

[15] Yang P, Bao B C, Sha J, Xu J P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010504 (in Chinese) [杨平, 包伯成, 沙金, 许建平 2013 物理学报 **62** 010504]

[16] Yang N N, Liu C X, Wu C J 2012 *Chin. Phys.* B **21** 080503

[17] He S Z, Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Yang P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110503 (in Chinese) [何圣仲, 周国华, 许建平, 包伯成, 杨平 2013 物理学报 **62** 110503]

[18] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2842 (in Chinese) [王发强, 张浩, 马西奎 2008 物理学报 **57** 2842]

[19] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1522 (in Chinese) [王发强, 张浩, 马西奎 2008 物理学报 **57** 1522]

[20] Wang J P, Xu J P, Zhou G H, Mi C B, Qin M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 048402 (in Chinese) [王金平, 许建平, 周国华, 米长宝, 秦明 2011 物理学报 **60** 048402]

[21] Wang J P, Xu J P, Xu Y J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 058401 (in Chinese) [王金平, 许建平, 徐扬军 2011 物理学报 **60** 058401]

[22] Zhang X, Bao B C, Wang J P, Ma Z H, Xu J P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160503 (in Chinese) [张希, 包伯成, 王金平, 马正华, 许建平 2012 物理学报 **61** 160503]

[23] Wang J P, Xu J P, Qin M, Mu Q B 2003 *Proceeding of the CSEE* **30** 1 (in Chinese) [王金平, 许建平, 秦明, 牟清波 2010 中国电机工程学报 **30** 1]

[24] Xu J P, Wang J P 2011 *IEEE Trans Industrial Electronics* **58** 3658

Dynamical modeling and multi-period behavior analysis of voltage-mode bi-frequency controlled switching converter*

Wu Song-Rong[1)†] He Sheng-Zhong[1)] Xu Jian-Ping[1)]
Zhou Guo-Hua[1)] Wang Jin-Ping[2)]

1) (*Key Laboratory of Magnetic Suspension Technology and Maglev Vehicle, Ministry of Education, School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *China*)

2) (*School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei* 230009, *China*)

(Received 28 June 2013; revised manuscript received 23 July 2013)

Abstract

A dynamical model is proposed and the corresponding characteristic aligns are derived for voltage-mode bi-frequency controlled switching converter operating in discontinuous conduction mode. According to the dynamical model, the border-collision bifurcation and multi-period behaviors, such as period-2, period-3, period-4, and so on, are studied using bifurcation diagrams as the circuit parameters are varied. It is found that the converter behaves along the bifurcation route of period-1, multi-period, and period-1, and the change of period state is induced by border-collision bifurcation. Based on the characteristic equation, the converter stability is investigated by the Lyapunov exponent. It is shown that Lyapunov exponent is always smaller than zero with the variation of circuit parameters and the converter operates in stable period state all the time. Also, it is validated that period-3 behavior of voltage-mode bi-frequency controlled switching converter does not predicate its inevitable chaos. Time-domain waveforms, phase portraits, and frequency spectra of voltage-mode bi-frequency controlled switching converter are analyzed by circuit simulation, which validates the feasibility of dynamical model and the correctness of theoretical analysis. Simulation results are verified by experiments in this paper.

Keywords: switching converter, bi-frequency control, border-collision bifurcation, multi-period behavior

PACS: 84.30.Jc, 05.45.−a **DOI:** 10.7498/aps.62.218403

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51177140), the Sichuan Provincial Youth Science and Technology Fund (Grant No. 2013JQ0033), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant Nos. 2682013ZT20, SWJTU11CX032).

† Corresponding author. E-mail: srwu88@163.com