

# 两时间尺度下非光滑广义蔡氏电路系统的簇发振荡机理<sup>\*</sup>

李旭 张正娣<sup>†</sup> 毕勤胜

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2013年7月24日收到; 2013年8月19日收到修改稿)

通过引入周期变化的电流源并选择适当参数, 使得周期激励频率与系统固有频率之间存在量级差距, 建立了两时间尺度即快慢耦合非光滑广义蔡氏电路模型. 基于相应的广义自治系统, 考察了其不同区域中的平衡态及其稳定性, 得到了不同分岔行为及其相应的临界条件. 同时, 利用广义 Clarke 导数得到的广义 Jacobian 矩阵, 探讨了系统轨迹穿越非光滑分界面时的各种非常规分岔模式, 进而结合广义相图, 深入分析了 Fold/Fold 周期簇发振荡以及 Fold/Hopf 周期簇发振荡两种典型的周期簇发行为及其相应的分岔机制.

**关键词:** 非光滑, 广义蔡氏电路, 两时间尺度, 分岔机制

**PACS:** 05.45.-a, 84.30.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.220502

## 1 引言

许多实际模型都会涉及到多时间尺度问题<sup>[1,2]</sup>, 这种多时间尺度因素不仅来自于真实时间上的快慢效应, 同时也可能来自于几何尺寸上的尺度效应, 还有诸如反应系统结构效应、系统内部的物理效应等等, 通过无量纲化后, 在相应的数学模型中形成状态变量在变化速率上的差异, 此类系统也可称为快慢耦合系统. 如 Oregonator 化学反应模型中存在的不同量级反应速度的催化和自催化过程<sup>[3]</sup>; 在生物细胞中, 快速的代谢过程可以结合到很慢的遗传变化上<sup>[4]</sup>; 各种飞行器涉及高速的旋转动力学与相对较慢的平移动力学的组合; 其他还有诸如带有饱和吸收器的激光系统<sup>[5,6]</sup>、神经动力学<sup>[7]</sup>等领域都会涉及多时间尺度问题. 一般来说, 快慢系统的周期振荡通常表现为由具有相对较大振幅的振荡和近似简谐振动的微幅振荡组合而成的, 这种周期运动被称为混合模态振动<sup>[8,9]</sup>, 通常用符号  $L^S$  表示, 其中  $L$  和  $S$  分别表示每一周期运

动内大幅振动和微幅振荡的次数, 而连接快慢两过程的行为一般被称为簇发. 簇发现象在神经元模型中已经被广泛研究, 对于一般的光滑快慢系统, Izhikevich<sup>[10]</sup> 对低维情形下的各种簇发现象及其分岔机制做了很好的总结, 而对于高维系统和非光滑系统中的不同尺度效应及其分岔机制, 目前还有很多问题值得研究.

作为一个经典的混沌电路, 蔡氏电路<sup>[11]</sup> 由于结构简单在实验中能很方便地加以搭建, 同时也具有如阵发混沌<sup>[12]</sup>、加周期分岔<sup>[13]</sup> 等非常丰富的动力学行为, 因而引起了广泛的关注. 为深入探讨非线性系统的复杂性及相应的产生机理, 许多学者基于经典蔡氏电路, 通过相应的修改或扩展, 建立了一系列的广义蔡氏电路, 并取得了大量的成果. 例如, Stouboulos 等<sup>[14]</sup> 和 Kolipanos 等<sup>[15]</sup> 应用蔡氏二极管替代非线性电阻建立了一个四阶自治非线性电路, 讨论了其中混沌演化过程并解释了由危机引起的间歇现象.

由于非光滑系统在分界面上会出现各种非常规分岔, 尤其是多次穿越时可能会发生组合分岔,

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 11272135, 21276115)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: dyzhang@ujs.edu.cn

当非光滑系统存在不同的时间尺度时, 这些相对比较特殊的非常规分岔, 不仅可能影响系统沉寂态和激发态的形式, 同时也可能使得沉寂态和激发态之间发生转换, 从而导致具有特殊行为的簇发振荡. 因此, 深入探讨非光滑系统中的不同尺度效应, 对于揭示非光滑和多尺度两种因素同时存在下系统的复杂性及其机理具有一定的理论意义.

本文重点关注非光滑系统中的不同尺度效应. 基于蔡氏电路, 建立了含分段线性非光滑因素的四阶广义蔡氏电路系统; 同时, 通过串联一个周期变化的交变电流源并适当选取参数, 使得电流源的周期变化频率与系统的固有频率之间存在量级上的差距, 导致系统存在快慢两不同两时间尺度的耦合. 通过其相应的广义自治系统的平衡点及非光滑分界面上的分岔分析, 结合转换相图, 给出了两种典型的对称式 Fold/Fold 周期簇发和 Fold/Hopf 周期簇发现象, 并揭示了两类簇发振荡的分岔机理.

## 2 数学模型

作为典型的第一类非光滑系统, 含有分段线性特性二极管的蔡氏振子 (图 1) 由于系统相对简单, 同时具有丰富的动力学现象以及在实验室容易重现<sup>[16]</sup>, 一直是分析各种非线性特征的重要系统之一<sup>[17]</sup>. 基于各种广义的蔡氏振子模型, 得到了许多有价值的研究结果<sup>[18]</sup>.

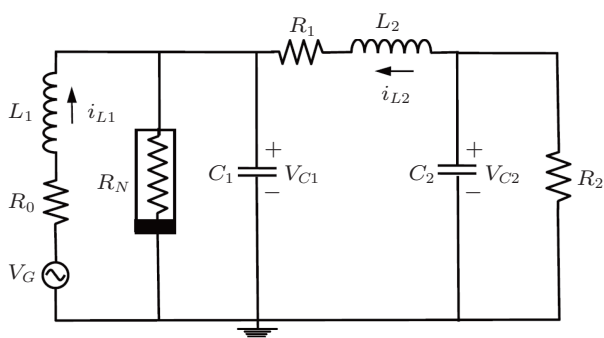


图 1 电路原理图

为深入分析非光滑系统中的不同尺度效应, 在此引入周期变化的交变电流源  $V_G$  (图 1), 其相应的动力学模型可以表示为<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned} di_{L1}/dt &= (i_{L1}R_0 - V_{C1})/L_1 + V_G, \\ di_{L2}/dt &= (V_{C2} - V_{C1} - i_{L2}R_1)/L_2, \\ dV_{C1}/dt &= (G(V_{C1}) + i_{L1} + i_{L2})/C_1, \end{aligned}$$

$$dV_{C2}/dt = -(i_{L1} + V_{C2}/R_2)/C_2, \quad (1)$$

其中非线性电阻的伏安特性  $G(V_{C1}) = P_2V_{C1} + \frac{1}{2}(P_1 - P_2)(|V_{C1} + E_0| - |V_{C1} - E_0|)$ , 周期变化电源特性  $V_G = A_G \sin(\omega t)$ , 引入变化  $x = i_{L1}R_1/E_0$ ,  $y = i_{L2}R_1/E_0$ ,  $u = V_{C1}/E_0$ ,  $v = V_{C2}/E_0$ ,  $t = \sqrt{L_1C_1}\tau$ , 则 (1) 式可以表示为如下无量纲形式:

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= \alpha(-\beta x - u) + A \sin(\Omega \tau), \\ dy/d\tau &= \gamma(-y - u + v), \\ du/d\tau &= \eta(x + y) + g(u), \\ dv/d\tau &= -\delta(x + cv), \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= R_1\sqrt{C_1/L_1}, \quad \beta = R_0/R_1, \\ \gamma &= R_1\sqrt{R_1C_1/L_2}, \quad \delta = \sqrt{L_1C_1}/(R_1C_2), \\ c &= R_1/R_1, \quad \eta = \sqrt{L_1/C_1}/R_1, \\ a &= \sqrt{L_1/C_1}P_1, \quad b = \sqrt{L_1/C_1}P_2, \\ A &= A_GR_1\sqrt{L_1C_1}/E_0, \quad \Omega = \omega\sqrt{L_1C_1}, \\ g(u) &= bu + \frac{1}{2}(a - b)(|u + 1| - |u - 1|). \end{aligned}$$

显然, 四维非线性系统 (2) 式在  $u = \pm 1$  处存在着非光滑特征, 同时, 当系统的固有频率与周期激励频率之间存在着量级差距时, 会产生不同尺度效应, 导致诸如大幅振荡和微幅振荡联合作用的多模态耦合振荡行为<sup>[20]</sup>. 为深入揭示其中的复杂动力学特性, 探讨非光滑因素对其行为的影响, 我们首先考察系统的各种分岔特性.

## 3 广义平衡点及其稳定性

簇发振荡过程中的沉寂态大都表现为围绕平衡态的微幅振荡, 因此, 从沉寂态到激发态的分岔行为基本上都是局部分岔, 而周期激励下的非自治系统, 通常表现为周期振荡, 不会存在严格意义下的不动点. 为分析其相应的沉寂态形式及其可能产生的分岔行为, 进而揭示簇发振荡的机制, 在此我们引入了广义平衡点的概念.

注意系统中的周期激励项  $w = A \sin(\Omega \tau)$ , 设系统的固有频率为  $\omega$ , 当周期激励频率  $\Omega \ll \omega$  时, 则在每一固有频率的振动周期时间段  $\Psi$  内,  $w$  变化很小, 也就是说, 在系统每一固有频率振荡周期  $\Psi$  内, 即  $\tau \in [T_0, T_0 + \Psi]$ , 其中  $T_0$  为开始计时的起始点,  $w$

虽然在  $w_A = A \cos \Omega T_0$  和  $w_B = A \cos \Omega(T_0 + \Psi)$  之间变化, 由于  $w_A$  与  $w_B$  非常接近, 因此在每时间段  $\Psi$  内,  $w$  可以近似视为常数, 系统的行为则主要由  $w$  取  $w_A$  和  $w_B$  之间的某一近似常数时相应的自治系统决定, 而  $w$  的微小变化则起到调谐作用<sup>[21]</sup>. 因此在  $\Omega \ll \omega$  时, 虽然整体  $w$  会在  $[-A, A]$  之间变化, 而在每一考察的相对较短时间范围内,  $w$  可以近似作为常数, 此时周期激励下的非自治系统可以看作相应的自治系统, 称为广义自治系统, 其相应的平衡点则称为广义平衡点.

令系统 (2) 中周期激励项为  $w = A \sin(\Omega \tau)$ ,  $A$  和  $\Omega$  分别代表外激励的振幅和频率, 则其相应的广义自治系统可以表示为

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= \alpha(-\beta x - u) + W, \\ dy/d\tau &= \gamma(-y - u + v), \\ du/d\tau &= \eta(x + y) + g(u), \\ dv/d\tau &= -\delta(x + cv), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $g(u) = bu + \frac{1}{2}(a-b)(|u+1| - |u-1|)$ . 由于  $G(u)$  的分段线性特性, 系统的向量场存在两个非光滑分界面  $\Sigma_{1,2} = \{(x, y, u, v) \in R^4 | u = \pm 1\}$ , 从而系统的状态空间被划分为由非光滑分界面连接的三个不同的区域:  $D_0 = \{(x, y, u, v) | |u| < 1\}$ ,  $D_- = \{(x, y, u, v) | u < -1\}$ ,  $D_+ = \{(x, y, u, v) | u > 1\}$ .

### 3.1 区域 $D_0$ 中的平衡点及其稳定性

在区域  $D_0$  中, 系统仅存在一个平衡点  $E_0 = (m_1/M, m_2/M, m_3/M, m_4/M)$ , 其中  $M = \alpha(\beta ac - \beta c - c - 1)$ ,  $m_1 = c(a-1)w$ ,  $m_2 = (a+c)w$ ,  $m_3 = -(c+1)w$ ,  $m_4 = (a-1)w$ , 其稳定性由其相应的特征多项式决定, 表示为

$$P_0(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = -\delta c - a + \gamma + \alpha\beta, \\ a_2 &= \alpha\beta\gamma + agc - \alpha\alpha\beta - \gamma a - \alpha\beta\delta c + \alpha + \gamma - \gamma\delta c, \\ a_3 &= \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma\delta c - \gamma\delta c - \alpha\delta c + \alpha\alpha\beta\delta c + \gamma a\delta c \\ &\quad - \alpha\beta\gamma a + \alpha\gamma, \\ a_4 &= \alpha\beta\gamma a\delta c - \delta\alpha\gamma - \alpha\gamma\delta c - \alpha\beta\gamma\delta c. \end{aligned}$$

因此, 当参数满足条件  $a_1 > 0$ ,  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ,

$a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0$  时, 其相应的所有特征值均具有负实部, 即平衡点  $E_0$  为渐近稳定的.

### 3.2 区域 $D_{\pm}$ 中的平衡点及其稳定性

在两区域  $D_{\pm}$  中, 系统均存在着惟一的平衡点  $E_{\pm} = (n_1/N, n_2/N, n_3/N, n_4/N)$ , 其中

$$\begin{aligned} N &= \alpha(-\beta c - 1 + b\beta c - c), \\ n_1 &= c(\alpha a - \alpha b - w + wb), \\ n_2 &= -\alpha b\beta c + wb - \alpha b + \alpha a + cw + \alpha\beta ca, \\ n_3 &= -\alpha b\beta c + cw + \alpha\beta ca + w, \\ n_4 &= -\alpha b + \alpha a - w + wb. \end{aligned}$$

由于对称性, 其相应的特征多项式相同, 统一表示为

$$P_{\pm}(\lambda) = b_0 \lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \quad b_1 = \alpha\beta - b + \gamma - \delta c, \\ b_2 &= \gamma - \gamma\delta c - \alpha\beta\delta c + \alpha - \gamma b + b\delta c - \alpha\beta b + \alpha\beta\gamma, \\ b_3 &= -\alpha\beta\gamma b - \alpha\beta\gamma\delta c + \gamma b\delta c + \alpha\beta b\delta c + \alpha\beta\gamma \\ &\quad - \alpha\delta c + \alpha\gamma - \gamma\delta c, \\ b_4 &= -\alpha\gamma\delta - \alpha\gamma\delta c + \alpha\beta\gamma b\delta c - \alpha\beta\gamma\delta c. \end{aligned}$$

因此, 当参数满足条件  $b_1 > 0$ ,  $b_1 b_2 - b_3 > 0$ ,  $b_3(b_1 b_2 - b_3) - b_1^2 b_4 > 0$  时,  $P_{\pm}(\lambda) = 0$  的所有解的实部均为负值, 故  $E_{\pm}$  是渐近稳定的.

## 4 广义自治系统的分岔分析

随着参数的变化, 不同子区域中的平衡点会失去稳定性, 产生不同的分岔行为, 导致各种动力学特性. 为此, 首先考察各区域中平衡点失稳的分岔条件及其相应的分岔模式.

### 4.1 区域 $D_0$ 中的平衡点的分岔

由特征多项式 (4) 可知, 平衡点  $E_0$  存在两种失稳模式, 也即当参数满足条件

$$FB_0: \quad a_4 = 0 \quad (a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0) \quad (6)$$

时存在单零特征值, 可能会导致平衡点产生跳跃现象; 而当参数满足

$$HB_0: \quad a_3 a_1 a_2 - a_3 - a_1^2 a_4 = 0,$$

$$(a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0) \quad (7)$$

时存在一对纯虚根, 可能产生 Hopf 分岔, 导致周期振荡行为.

## 4.2 区域 $D_{\pm}$ 中的平衡点的分岔

由于对称性,  $D_{\pm}$  中的平衡点具有相同的特征方程, 因此也相应地存在着相同的失稳条件及其分岔模式. 由 (5) 式可知, 当参数满足

$$FB_{\pm}: b_4 = 0 \quad (b_1 > 0, b_1 b_2 - b_3 > 0, b_3 > 0) \quad (8)$$

时存在单零特征值, 可能会导致平衡点之间的跳跃现象; 而当参数满足

$$HB_{\pm}: b_3(b_1 b_2 - b_3) - b_1^2 b_4 = 0 \quad (b_1 > 0, b_1 b_2 - b_3 > 0) \quad (9)$$

时存在一对纯虚根, 可能产生 Hopf 分岔, 导致系统产生周期振荡行为.

## 4.3 分界面上的非光滑分岔

下面着重分析系统在分界面  $\Sigma_{1,2}$  处的分岔. 考虑到系统 (3) 的向量场依然保持连续性, 可以利用广义 Clarke 导数得到一个广义 Jacobian 矩阵, 表示为

$$J(\pm 1) = \{qJ_0 + (1-q)J_{1\pm}, \forall q \in [0, 1]\}, \quad (10)$$

其中  $J_0$  和  $J_1$  分别表示分界面两边平衡点的特征矩阵, 从而可得广义 Jacobian 矩阵的特征方程为

$$P_{J\pm 1}(\lambda) = q(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) + (1-q)(b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4), \quad (11)$$

通过辅助参数  $q$ , 分界面两边的 Jacobian 矩阵光滑连接. 取定参数

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.6, & \beta &= 1.5, & \gamma &= 2.0, \\ \delta &= -1, & a &= -5.5, & b &= 0.9, \end{aligned} \quad (12)$$

图 2(a) 和 (b) 分别给出了参数  $c = 0.1$  和  $c = 0.2$  时广义 Jacobian 矩阵  $J(\pm 1)$  的特征值分布情况.

对于  $c = 0.1$ , 当  $q = 0.9219$ , 其特征曲线在复平面上穿越原点, 其相应的广义 Jacobian 矩阵具有零特征值 (图 2(a)), 说明当系统轨迹穿越非光滑分界

面时, 可能产生非常规 Fold 分岔. 对于  $c = 0.2$ , 当  $q = 0.0004$  时, 其相应的广义 Jacobian 矩阵穿越纯虚轴, 即产生了一对纯虚根, 而当  $q = 0.401$  时, 其特征曲线又穿越原点, 即产生零特征值. 这说明, 当辅助参数  $q$  从 0 变化到 1, 也即轨迹穿越非光滑分界面, 其广义 Jacobian 矩阵会产生多次穿越分岔, 该非常规分岔不仅具有 Fold 分岔的特征, 同时也具有 Hopf 分岔的特征, 也即非常规 Fold/Hopf 分岔. 计算表明, 此时与 Hopf 分岔相应的振荡频率为 0.9210.

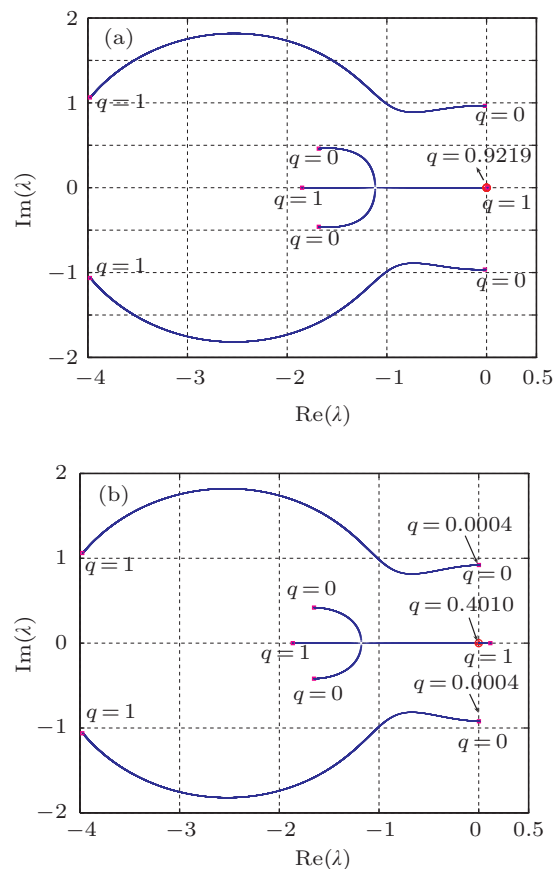


图 2 随辅助参数变化的广义 Jacobian 矩阵特征曲线 (a)  $c = 0.1$ ; (b)  $c = 0.2$

为描述非光滑分界面上的非常规分岔特性, 下面结合分界面两边平衡点特性做示例说明. 表 1 分别给出了参数  $c = 0.1$  和  $c = 0.2$  时,  $D_0$  和  $D_{\pm}$  区域中平衡点相应的特征值. 对于  $c = 0.1$ , 注意到在  $D_0$  区域中不同的焦点  $E_0$  穿越分界面到  $D_{\pm}$  中的稳定焦点  $E_{\pm}$  时, 其中的特征值从正变为负, 即穿越零点, 产生非常规 Fold 分岔. 同样对于  $c = 0.2$ , 两边的平衡点不仅穿越零点, 也要穿越虚轴, 会产生 Fold 和 Hopf 的组合分岔, 即非常规 Fold/Hopf 分岔.

表 1 不同区域中平衡点的特征值及非光滑分岔

	特征值	平衡点特性	非光滑分岔
$c = 0.1$	$\lambda_1^0 = 0.0076$		
	$\lambda_{2,3}^0 = -3.9788 \pm 1.064i$	不稳定的焦点	
	$\lambda_4^0 = -1.8500$		Fold 分岔
	$\lambda_{1,2}^\pm = -0.0172 \pm 0.9644i$	稳定的焦点	
	$\lambda_{3,4}^\pm = -1.6828 \pm 0.4605i$		
$c = 0.2$	$\lambda_1^0 = 0.1165$		
	$\lambda_{2,3}^0 = -3.9759 \pm 1.062i$	不稳定的焦点	
	$\lambda_4^0 = -1.8648$		Fold/Hopf 分岔
	$\lambda_{1,2}^\pm = 0.0019 \pm 0.9211i$	不稳定的焦点	
	$\lambda_{3,4}^\pm = -1.6519 \pm 0.4188i$		

## 5 簇发振荡及其机理分析

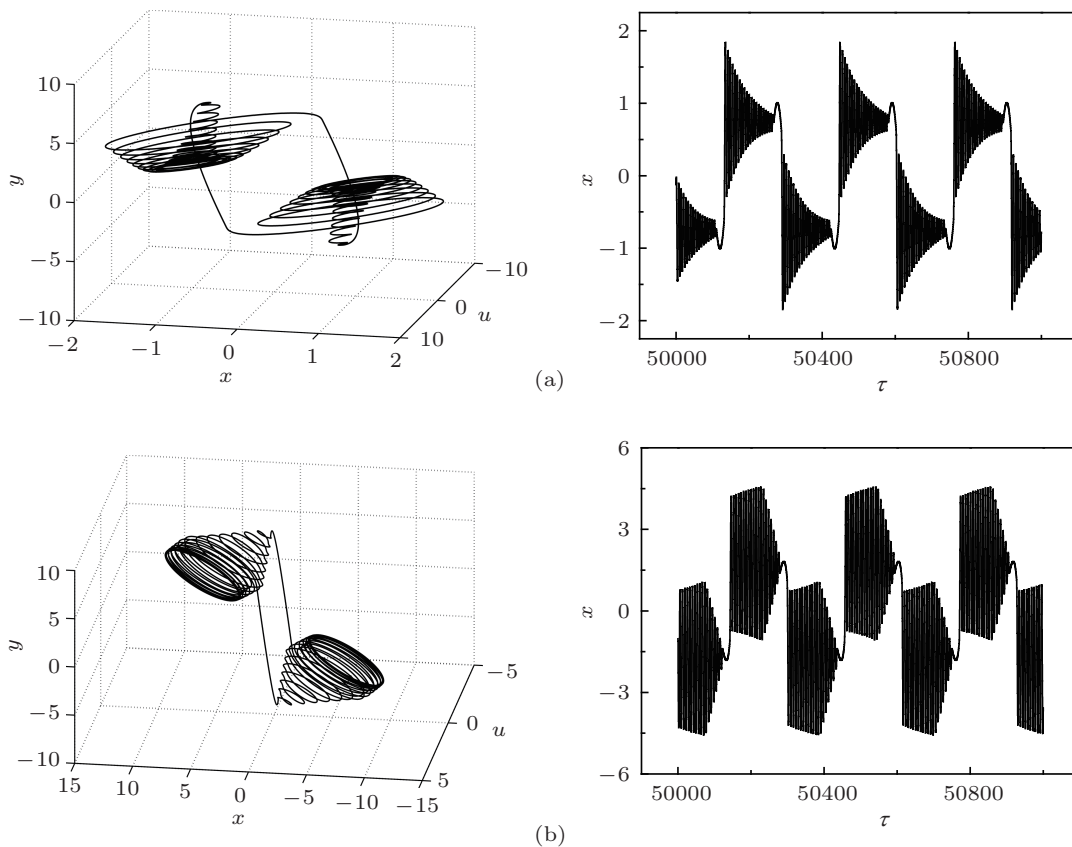
当系统 (2) 中激励项的频率远小于系统的固有频率时, 系统会产生簇发振荡现象, 当参数如 (12) 式取定时, 计算可知  $c = 0.1$  的系统的固有频率为  $\omega_1 = 0.964$ , 而在  $c = 0.2$  时, 其固有频率为  $\omega_2 = 0.921$ , 此时取激励频率  $\Omega = 0.02$ , 显然该频率与系统的固有频率之间存在着量级差距, 因此会产生不同尺度耦合效应. 图 3 分别给出了在激励幅值

$A = 7.0$  下  $c = 0.1$  和  $c = 0.2$  时系统的相图及其相应的时间历程.

从图 3 可以看出, 系统表现为关于原点对称的周期振荡, 此时两个频率均参与系统的振荡行为, 呈现出快变振荡与慢变振荡交替进行的典型快慢特征, 也即周期簇发振荡.

### 5.1 转换相图

为进一步探讨其中的分岔机制, 在此我们引入转换相图的概念. 所谓转换相图, 指的是将系统的相轨迹投影到非真实状态变量空间或平面中, 如对于 (3) 式的周期激励系统, 其轨迹可以表示为  $(x, y, z) = (x_1(\tau), y_1(\tau), z_1(\tau))$ . 该轨迹可以在  $(x, y, z)$  三维空间或  $(x, y)$  等二维平面上投影, 得到传统的相图, 也可以向  $(x, w)$  或  $(y, w)$  等平面上投影, 其中  $w = A \sin(\Omega \tau)$ , 其相应的平面轨迹为  $(x, w) = [x_1(\tau), A \sin(\Omega \tau)]$  或  $(y, w) = [y_1(\tau), A \sin(\Omega \tau)]$ . 由于  $w = A \sin(\Omega \tau)$  不是真实的状态变量, 此时称  $(x, w) = [x_1(\tau), A \sin(\Omega \tau)]$  或  $(y, w) = [y_1(\tau), A \sin(\Omega \tau)]$  等为转换相图.

图 3 簇发振荡的相图及时间历程图 (a)  $c = 0.1$ ; (b)  $c = 0.2$

## 5.2 对称的 Fold/Fold 簇发振荡

图 4 给出了  $c = 0.1$  时系统在  $(u, x)$  和  $(u, y)$  平面上的相图, 此时系统表现为典型的周期簇发振荡. 结合图 3 中的空间结构及其相应的时间历程图可以看出, 此时簇发振荡存在着两种不同的阶段, 一是相对平缓的运动, 对应于簇发过程的沉寂态 (quiescent state), 二是相对剧烈的大幅振荡, 对应于激发态 (spiking state).

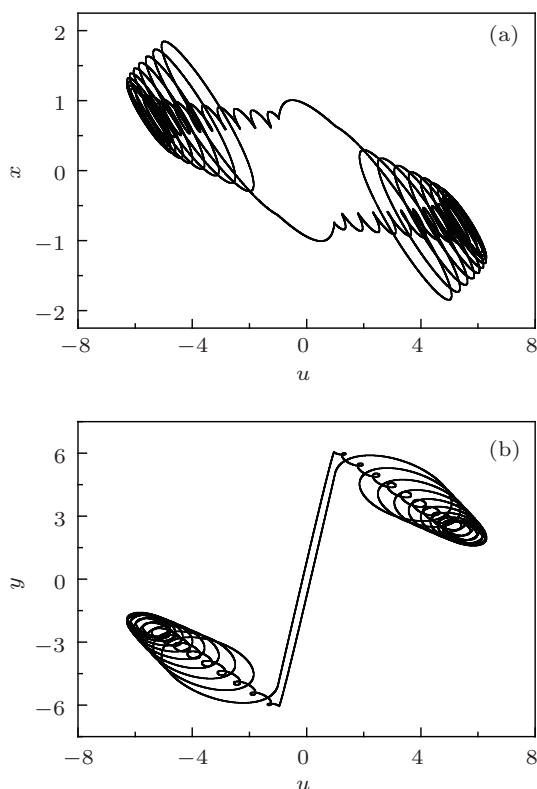


图 4 (a)  $u$ - $x$  平面的相图; (b)  $u$ - $y$  平面的相图

在簇发振荡过程中存在两种重要的分岔行为, 也即从沉寂态到激发态的分岔以及从激发态到沉寂态的分岔. 下面我们结合转换相图来分析两种不同状态之间的分岔连接过程. 图 5 给出了  $(w, u)$  平面上相应的转换相图以及  $dw/d\tau$  与  $u$  之间的关系图.

## 5.3 簇发振荡机制

周期簇发振荡的轨迹穿越了两条分界面, 注意到此时系统在不同区域的平衡点在广义相平面  $(w, u)$  形成倒 Z 形曲线 (见图 5(a)), 其中在两分界面之间的中间部分为不稳定平衡点, 而在区域  $D_{\pm}$

中为稳定的焦点  $E_{\pm}$ . 以转换相图中的轨迹与非光滑分界面  $\Sigma_{1+}$  的交点  $A_1$  作为起点, 由上节的分析知当辅助参数  $q = 0.9219$  时, 广义 Jacobian 具有零特征值, 说明系统在穿越非光滑分界面  $\Sigma_{1+}$  可能会产生 Fold 分岔, 同时从图 5(b) 可以发现, 在  $A_1$  点  $dw/d\tau < 0$ , 因此轨迹在穿越  $\Sigma_{1+}$  时由 Fold 分岔导致轨迹从  $A_1$  点向倒 Z 形曲线的下半支也即稳定焦点  $E_-$  跳跃.

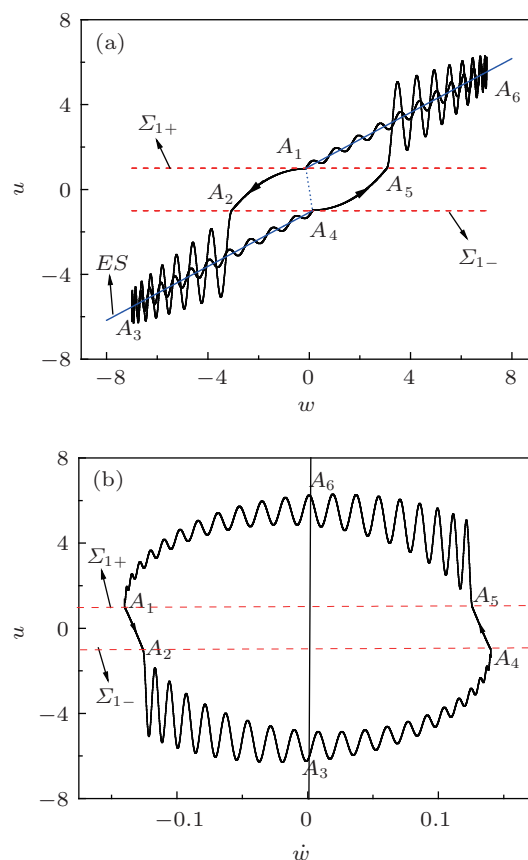


图 5 对称的 Fold/Fold 簇发机制 (a)  $w$ - $u$  转换相图和对自治系统平衡点分岔以及非光滑分界面叠加; (b)  $\dot{w}$  与  $u$  的关系

注意到在区域  $D_0$  没有稳定的平衡点, 所以轨迹会穿过  $D_0$  区域. 经计算, 系统在区域  $D_0$  中的不稳定平衡点所对应的四个特征值分别为  $\lambda_1 = 0.0076$ ,  $\lambda_{2,3} = -3.9788 \pm 1.064i$ ,  $\lambda_4 = -1.8500$ , 由于  $\lambda_1$  在数值上相对较小, 因此轨线从点  $A_1$  到点  $A_2$  的过程比较慢, 这也可以从相应的时间历程得到证实 (见图 3(a)).

当轨迹穿过区域  $D_0$  到达  $A_2$  点, 也即非光滑分界面  $\Sigma_{1-}$  上时, 虽然轨迹穿越  $\Sigma_{1-}$  也可能产生非常规 Fold 分岔, 但是该分岔并未发生.

从图 5(b) 可以发现, 轨迹在  $A_1$  和  $A_2$  产生的区别的主要原因在于在  $A_1$  和  $A_2$  点处均满足



$dw/d\tau < 0$ , 也即轨迹在  $A_1$  将通过分界面  $\Sigma_{1+}$  进入区域  $D_0$ , 而在  $A_2$  点将通过  $\Sigma_{1-}$  进入区域  $D_-$ , 注意到区域  $D_0$  中不存在稳定的平衡点, 所以产生轨迹的跳跃现象, 而在区域  $D_-$  中,  $E_-$  是稳定的, 这就使得轨迹直接趋于稳定的  $E_-$ , 无法产生跳跃, 导致潜在的 Fold 分岔没有发生.

相应地, 由于轨迹在两非光滑分界面  $\Sigma_{1\pm}$  之间穿过  $D_0$  区域, 不会产生剧烈的振荡行为, 对应着簇发振荡中的沉寂态, 说明从  $D_+$  中的激发态通过  $A_1$  点的 Fold 分岔进入在  $D_0$  区域中的沉寂态.

轨迹从  $A_2$  点开始, 在区域  $D_-$  中运动, 在区域  $D_-$  中的平衡点经计算分别为  $\lambda_{1,2}^{\pm} = -0.0172 \pm 0.9644i$ ,  $\lambda_{3,4}^{\pm} = -1.6828 \pm 0.4605i$ , 也即存在一对实部绝对值非常小而虚部是常规量的共轭复特征根, 注意到  $A_2$  与倒 Z 形曲线平衡曲线的下半支存在一定的距离, 当轨迹从  $A_2$  逐渐收敛到平衡曲线时, 会产生按照固有频率且振荡幅值减小很慢的逼近平衡曲线的振荡过程, 从而导致大幅振荡行为, 对应于簇发过程中的激发态.

系统轨迹最终会在  $D_-$  区域中逐渐收敛于平衡曲线, 当轨迹到达  $A_3$  时  $dw/d\tau = 0$ , 随后  $dw/d\tau > 0$ , 导致广义状态变量  $w$  的增加; 当轨迹到达  $\Sigma_{1-}$  上的  $A_4$  点时, 发生与在  $A_1$  相同的 Fold 分岔行为, 只是此时轨迹通过区域  $D_0$  经  $\Sigma_{1+}$  上的  $A_5$  点跳向区域  $D_+$  中倒 Z 形曲线平衡曲线的上半支, 并产生与  $D_-$  区域中相同的振荡行为. 当轨迹到达极点  $A_6$  时  $dw/d\tau = 0$ , 使得  $dw/d\tau$  变为负值, 曲线回到  $A_1$  点, 完成一个周期振荡过程.

$w$  的变化过程其实也可以直接从其表达式中看出, 注意到在  $w = A \sin(\Omega\tau)$  中  $A = 7.0$ , 说明  $w$  的值会在  $[-7.0, +7.0]$  区域中做光滑变化, 而在  $w$  变化的一个周期  $T = 2\pi/\Omega = 100\pi$  内, 其轨迹会经历两个沉寂态和两个激发态过程, 不同过程之间均由 Fold 分岔连接, 产生对称式的 Fold/Fold 簇发, 考虑到对称性及平衡曲线上下支都是稳定的焦点, 我们称之为对称式焦/焦型 Fold/Fold 簇发.

#### 5.4 对称的 Fold/Hopf 簇发振荡

当参数  $c = 0.2$  时, 系统的行为会发生变化, 图 6 给出了空间轨迹 (见图 3(b)) 在  $(u, x)$  和  $(u, y)$  平面上的投影, 可以看出, 此时系统仍做周期振荡, 但振荡模式与上述对称式焦 - 焦型 Fold/Fold 簇发的

模式有所区别, 主要体现在其激发态部分的极限环特征非常明显.

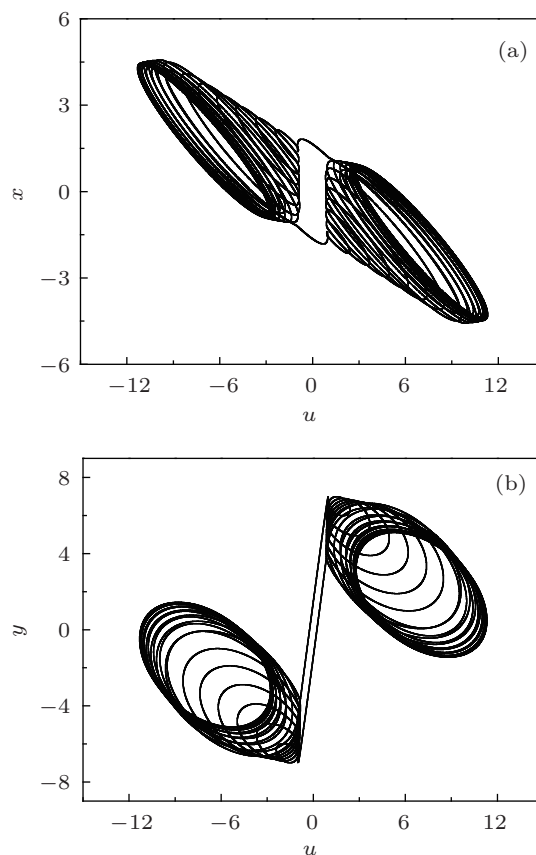


图 6 (a)  $u$ - $x$  平面的相图; (b)  $u$ - $y$  平面的相图

#### 5.5 簇发振荡机制

图 7 给出了  $(w, u)$  平面上相应的转换相图以及  $dw/d\tau$  与  $u$  之间的关系. 注意到在  $c = 0.2$  时, 广义自治系统存在稳定的极限环, 该极限环的产生与  $w$  的取值有关.

假设系统轨迹仍从非光滑分界面  $\Sigma_{1+}$  上的  $B_1$  点出发, 由于此时  $dw/d\tau < 0$ , 系统轨迹必须穿过区域  $D_0$ , 而当辅助参数  $q = 0.401$  时, 广义 Jacobian 矩阵存在零特征值, 与上述分析相同, 此时系统在非光滑分界面  $\Sigma_{1-}$  上的点  $B_1$  处发生了 Fold 分岔, 发生跳跃现象, 受  $D_-$  中稳定极限环的吸引, 轨迹将穿过区域  $D_0$  到达分界面  $\Sigma_{1-}$  上的  $B_2$  点, 在区域  $D_0$  轨线主要受平衡点  $E_0$  的影响. 经计算, 轨线在区域  $D_0$  所对应的特征值为  $\lambda_1 = 0.1165$ ,  $\lambda_{2,3} = -3.9759 \pm 1.0621i$ ,  $\lambda_4 = -1.8648$ , 由于  $\lambda_1$  相对较小, 因此轨线从点  $B_1$  到点  $B_2$  的过程比较慢, 形成沉寂态. 系统从点  $B_2$  开始, 轨线进入区域  $D_-$ .

计算发现,随着  $w$  的变化,广义自治系统会产生超临界 Hopf 分岔,导致周期振荡,此时虽然所产生的极限环是稳定的,但由于  $w$  从本质上说不是系统参数,而是一周期函数,所以只会发生围绕该极限环的振荡.

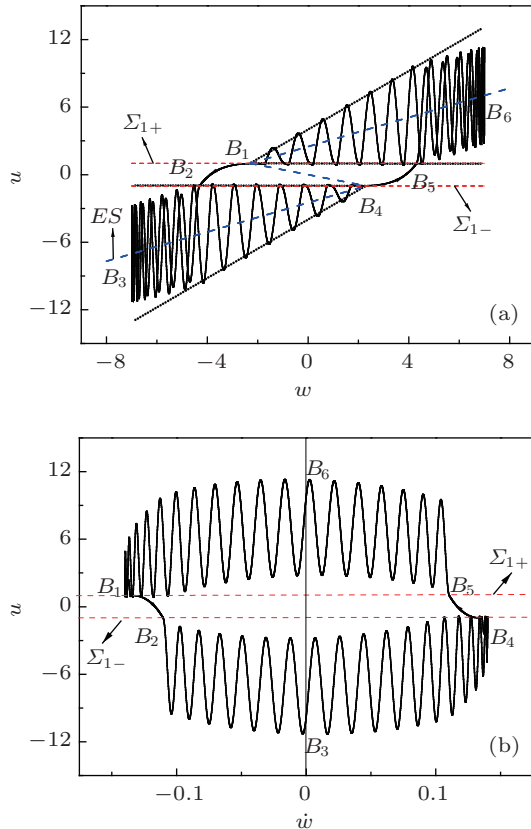


图7 对称的 Fold/Hopf 簇发机制 (a)  $w$ - $u$  转换相图和对自治系统平衡点分岔以及非光滑分界面叠加; (b)  $\dot{w}$  与  $u$  的关系

系统轨迹从  $B_2$  开始在  $D_-$  内运动,由于  $w$  的

变化,产生 Hopf 分岔,导致大幅的周期振荡.当轨迹到达  $w = -7$  的极值点  $B_3$  时,轨迹的振荡幅值将逐步减小,直到分界面  $\Sigma_{1-}$  上的  $B_4$ ,完成这部分的激发振荡.由对称性,同样在  $B_4$  会产生 Fold 分岔,使得轨迹穿过区域  $D_0$  到达分界面  $\Sigma_{1+}$  上的  $B_5$  点,在区域  $D_+$  内产生 Hopf 分岔,使得系统从沉寂态转向激发态,并与区域  $D_-$  中的过程类似,轨迹最终回到  $B_1$  点,完成一个周期的簇发振荡.

在该簇发振荡过程中, Fold 分岔使得系统从激发态进入沉寂态,而 Hopf 分岔导致系统从沉寂态回到激发态,同样簇发振荡具有对称性.而与上述对称式焦/焦型 Fold/Fold 簇发在不同焦点之间转换不同,该簇发是在焦点和极限环之间转换,因此我们称之为对称式点/环型 Fold/Hopf 簇发.

## 6 结论

对于具有两非光滑分界面的周期激励下的广义蔡氏电路,当激励频率与系统的固有频率之间存在量级差距时,会产生快慢效应,导致簇发振荡.通过广义自治系统的平衡点及其稳定性,近似分析了其中诸如 Fold 和 Hopf 等不同分岔行为及其产生条件,进而探讨了各种参数下系统的振荡特征,分析了不同沉寂态和激发态的产生原因及其相应的分岔行为,得到了对称式焦/焦型 Fold/Fold 型和对称式的点/环 Fold/Hopf 型两种簇发振荡,并结合转换相图,考察了两种簇发振荡的特点,揭示了不同簇发相应的产生机理.

- [1] Shoostari A, Pasha Zanoosi A 2010 *Appl. Math. Model.* **34** 1918
- [2] Haselbacher A, Najjar F M, Massa L, Moser R D 2010 *J. Comput. Phys.* **229** 325
- [3] Merkin J H, Taylor A F 2012 *Physica D* **241** 1336
- [4] Ernesto P, Dulce M, Soledad M, Jose M G, Santiago L, Julian J G 2006 *Neurosci. Lett.* **394** 152
- [5] Jia Z D, Leimkuhler B 2003 *Future Generation Comput. Syst.* **19** 415
- [6] Knoll D A, Chacon L, Margolin L, Mousseau V 2003 *J. Comput. Phys.* **185** 583
- [7] Rinberg A, Taylor A L, Mdardar E 2013 *Plos Computat. Biol.* **9** e1002857
- [8] Strizhak P E, Kawczynski A L 1995 *J. Phys. Chem.* **99** 10830
- [9] Ji Y, Bi Q S 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1434
- [10] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 1171
- [11] Chua L O, Lin G N 1990 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37** 885
- [12] Zhai D Q, Liu C X, Liu Y, Xu Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 816 (in Chinese) [翟笃庆, 刘崇新, 刘尧, 许喆 2010 物理学报 **59** 816]
- [13] Chen Z Y, Zhang X F, Bi Q S 2008 *Nonlin. Anal.: Real World Appl.* **9** 1158
- [14] Stouboulos I N, Miliou A N, Valaristos A P 2007 *Chaos Solition. Fract.* **33** 1256
- [15] Koliopanos C L, Kyprianidis I M, Stouboulos I N 2003 *Chaos Solition. Fract.* **16** 173
- [16] Yang Z M, Zhang J, Ma Y J, Bai Y L, Ma S Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3007 (in Chinese) [杨志民, 张洁, 马永杰, 摆玉龙, 马胜前 2010 物理学报 **59** 3007]
- [17] Binazadeh T, Shafiei M H 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18** 1071
- [18] Ji Y, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010202 (in Chinese) [季颖, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 010202]
- [19] Zhang Y, Bi Q S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010504-1
- [20] Li X H, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020504 (in Chinese) [李向红, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 020504]
- [21] Zhang Z D, Li Y Y, Bi Q S 2013 *Phys. Lett. A* **377** 975



# Mechanism of bursting oscillations in non-smooth generalized Chua's circuit with two time scales<sup>\*</sup>

Li Xu Zhang Zheng-Di<sup>†</sup> Bi Qin-Sheng

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 24 July 2013; revised manuscript received 19 August 2013)

## Abstract

By introducing periodically alternate current source as well as suitable values for the parameters to ensure that there exists order gap between the natural frequency and the excited frequency, a two-time scale namely, a fast-slow coupled non-smooth generalized Chua's circuit model is established. Based on the corresponding generalized autonomous system, the stabilities of the equilibrium points in different regions are investigated, from which the critical conditions related to different types of bifurcation forms are obtained. At the same time, combining the theory of Clarke derivative, different types of non-conventional bifurcation models which may occur when the trajectory passes across the non-smooth boundaries are explored. Furthermore, with the combination of the generalized phase portraits, two typical periodic bursting phenomena namely, the Fold/Fold and Fold/Hopf periodic bursters, and their associated bifurcation mechanisms are analysed in detail.

**Keywords:** non-smooth, generalized Chua's circuit, two time scales, bifurcation mechanism

**PACS:** 05.45.-a, 84.30.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.220502

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272135, 21276115).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: dyzhang@ujs.edu.cn