

双层非线性耦合反应扩散系统中复杂 Turing 斑图*

李新政¹⁾ 白占国^{1)†} 李燕¹⁾ 赵昆¹⁾ 贺亚峰²⁾

1) (河北科技大学理学院, 石家庄 050018)

2) (河北大学物理科学与技术学院, 保定 071002)

(2013年7月2日收到; 2013年8月13日收到修改稿)

采用双层耦合的 Brusselator 模型, 研究了两个子系统非线性耦合时 Turing 模对斑图的影响, 发现两子系统 Turing 模的波数比和耦合系数的大小对斑图的形成起着重要作用. 模拟结果表明: 斑图类型随波数比值的增加, 从简单斑图发展到复杂斑图; 非线性耦合项系数在 0—0.1 时, 系统 1 中短波模在系统 2 失稳模的影响下不仅可形成简单六边形、四边形和条纹斑图, 两模共振耦合还可以形成蜂窝六边形、超六边形和复杂的黑眼斑图等超点阵图形, 首次在一定范围内调整控制参量观察到由简单正四边形向超六边形斑图的转化过程; 耦合系数在 0.1—1 时, 系统 1 中短波模与系统 2 失稳模未发生共振耦合仅观察到与系统 2 相同形状的简单六边形、四边形和条纹斑图.

关键词: Brusselator 模型, 非线性耦合, Turing 模

PACS: 05.45.-a, 05.65.+b, 82.40.Ck, 52.80.Tn

DOI: 10.7498/aps.62.220503

1 引言

斑图是自然界中广泛存在的一种典型的非线性自组织现象, 是在时间或空间以及时空上具有某种规律性的非均匀结构. 在化学反应系统、非线性光学系统以及生物系统中均可观测到种类丰富的斑图^[1-7], 虽然各个系统斑图形成的具体物理机制各不同, 但斑图的形成与演化规律却具有一定的共性, Turing 在 1952 年首先利用化学反应扩散方程组对斑图的形成进行了理论解释^[8]. 近年来, 介质阻挡放电系统作为一个新兴的斑图系统, 以其本身发光可视、形成斑图所需时间短、构成斑图的单元(放电丝)可被单独测量、控制参数调节方便等优点备受关注^[9-14]. 气体放电系统属于一种远离平衡的非线性系统, 能在高级分岔点附近研究复杂斑图的形成和演化, 在该系统中已从实验获得了种类丰富的复杂斑图(例如: 蜂窝、白眼、超四边、超六边、点线斑图和螺旋波等), 经研究发现复杂斑图往往由两套及两套以上子结构嵌套而成, 归因

于壁电荷斑图与放电丝斑图相互作用的结果^[15,16]. 构成复杂斑图的简单子斑图结构是按照一定的波长关系组合的, 只有当系统内出现的失稳模具有两个或多个波长时, 才会产生具有复杂的空间结构和对称性的超晶格斑图, 因此怎样获得多个不同波长的失稳模以及不同波长模间的相互作用是研究的热点^[17-19]. 人们开始利用双层耦合模型对实验中观察到的超点阵斑图进行理论模拟, 主要源于 Barrio 等^[18]提出超点阵斑图的形成是因为两个模间的相互作用, 并获得了许多有意义的研究成果. 例如 Yang 等^[6]用耦合两个 Brusselator 扩散反应模型得到了黑眼和白眼超点阵斑图, Berenstein 等^[20]用双层耦合的 Lengel-Epstein 模型加四边形或六边形挡板数值模拟了在化学反应扩散系统观察到的多种超点阵和振荡斑图等. 前人在该方面的研究主要集中于模与模的线性相互作用, 对非线性相互作用研究较少. 本文采用双层耦合 Brusselator 模型, 研究模之间的非线性相互作用, 获得了种类丰富的斑图, 通过分析 Turing 模对不同斑图形成的影响,

* 国家自然科学基金(批准号: 11247242)、国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 51201057)和河北科技大学科研基金(批准号: QD201225, QD201226)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: baizg2006163@163.com

从理论上分析了复杂斑图的形成机理及其动力学行为。

2 模型

利用反应扩散方程研究 Turing 分岔斑图的主要有 Lengyel-Epstein 模型、Brusselator 模型和 Schnackenberg 模型等, 其中 Lengyel-Epstein 模型和 Brusselator 模型应用最广 [6,20–28]。Brusselator 模型是以双变量形式来描述化学反应过程中化学元素变化的一类反应扩散方程组。文中所采用的是双层 Brusselator 四变量反应扩散模型, 每层中包括一个活化子和一个禁阻子, 在无量纲的情况下该模型形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= D_{u_i} \nabla^2 u_i + a - (b+1)u_i + u_i^2 v_i \\ &\quad + \alpha u_i u_j (u_j - u_i), \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} &= D_{v_i} \nabla^2 v_i + b u_i - u_i^2 v_i + \beta v_i v_j (v_j - v_i), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 i 和 j 表示两子系统 $1(u_1, v_1)$ 和 $2(u_2, v_2)$, u 和 v 分别为活化子和禁阻子的浓度; D_u 和 D_v 分别为 u 和 v 变量的扩散系数, α, β 为两子系统非线性耦合系数 (且 $i \neq j$), 动力学行为由控制参数 a 和 b 所决定。为便于研究与对比, 本文中固定 $a = 3$ 和 $b = 9$, 两个子系统具有相同的均匀定态解: $(u_0, v_0) = (a, b/a)$ 。通过对该均匀定态解做线性稳定性分析可以得到斑图动力学中最常见的两类初级分岔现象: 当控制参数 b 满足 $b > b^H = (1 + a^2)$ 时, 系统经历 Hopf 分岔; 当控制参数 b 满足: $b > b^T = (1 + a\sqrt{D_u/D_v})^2$ 时, 系统经历 Turing 分岔并产生特征波数为 $k^2 = a/\sqrt{D_u D_v}$ 的 Turing 模。选择适当参数使系统处于 Turing 空间, 从式中可以看出 Turing 模的波数大小反比于两个变量的扩散系数的大小。图 1 是两系统的色散关系: 具有较大扩散系数的失稳模 (长波模) 具有较小的波数, 而具有较小扩散系数的稳定模 (短波模) 具有较大的波数。通过合理选择参数使两个子系统分别具有长波模和短波模, 进而讨论 2 模作用引起的复杂斑图。

在本文的数值模拟中, 采用欧拉向前差分的方法进行积分, 数值模拟在一个含有 $N \times N$ (128×128) 个格子的二维平面上进行, 时间积分步长为 $\Delta t = 0.01$ 个时间单位, 初始条件为均匀定态上加一个很小的随机扰动, 微扰幅度 $\Delta u = 0.03u_0$, $\Delta v = 0.01v_0$, 边界条件选用周期性边界条件, 为确

保其稳定性所有结果的积分时间均超过 10000 个时间单位。

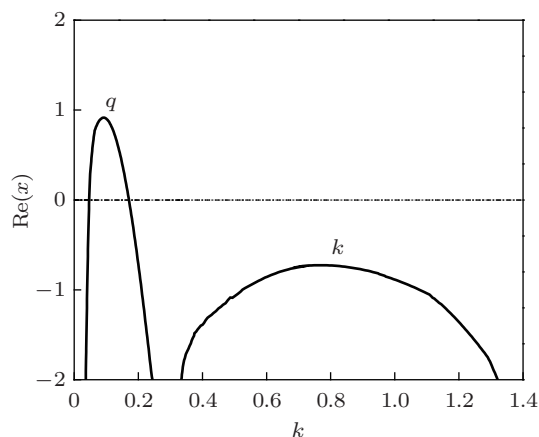


图 1 两耦合系统色散关系

3 模拟结果与分析

斑图的选择完全取决于两系统 Turing 模之间的相互作用, 在一定条件下两个子系统 Turing 模会产生空间共振, 若长波模和短波模满足共振条件, 在短波模所处的子系统中会形成复杂的斑图。由于两子系统间的相互作用较为复杂, 为简化分别通过改变系统反应参数对 Turing 模间的相互作用进行研究。

3.1 波数比值的影响

斑图的形成首先是因为系统内禁阻子和活化子浓度在时间及空间上分布不均匀造成的, 扩散系数的大小对于斑图的形成及类型起着决定性作用。本文通过改变短波模与失稳模的波数比, 观察波数比的改变对系统 1 斑图的形成及类型选择的影响。

图 2 中是两子系统波数比为 1 : 1 时, 两子系统出现相同的简单六边形与条纹斑图。波数相等时两子系统具有相同的 Turing 模, 且地位相同, 此时系统处于初级 Turing 分岔点附近, 两波模无耦合发生, 不会产生新的模, 此时系统对失稳模的波长选择是单一的或一条较窄的波段, 同时斑图的自组织行为受空间共振规律的约束, 因此系统仅有单一空间尺度的简单斑图形成, 从图形相应的二维傅里叶频谱中可以看出此时系统仅有一种波数的波矢, 根据镜像对称图 2(a3) 中的两个波矢可以写成 \mathbf{q}_1 和 $-\mathbf{q}_1$, 图 2(b3) 中的六个波矢可以约化为三个大小相等基矢 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ ($|\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2| = |\mathbf{q}_3|$)。

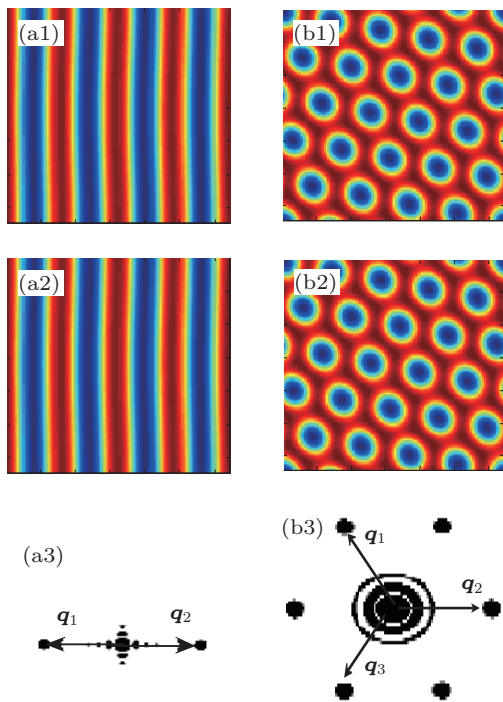


图2 波数比 1 : 1 时, (a) $D_{u1} = 51.7, D_{v1} = 155.5, D_{u2} = 51.7, D_{v2} = 155.5, \alpha = 0.03, \beta = 0.03$; (b) $D_{u1} = 27.75, D_{v1} = 73.75, D_{u2} = 27.75, D_{v2} = 73.75, \alpha = 0.045, \beta = 0.045$ (其中 1 为子系统 1 图, 2 为子系统 2 图, 3 为傅里叶频谱图)

两子系统波数比大于 1 时, 两子系统 Turing 模波长不同, 地位不同, 短波模受失稳模调制, 系统 1 中斑图受到系统 2 中斑图的影响, 而系统 2 中的斑图不受系统 1 中斑图的影响. 通过调整参数发现: 短波模受失稳模调制不仅可以出现系统 2 中简单形状斑图 (如六边、条纹、四边形等斑图); 失稳模与短波膜发生共振耦合时, 系统有新的不同波长失稳模产生, 若系统处于高级 Turing 分岔点附近时还可以出现丰富的超点阵斑图. 在调整波数比的过程中始终保持子系统 2 中呈现稳定的简单六边形斑图, 分别考察了波数比为整数 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1 时子系统 1 中产生复杂斑图情况.

图 3(a) 为波数比为 2 : 1 时产生蜂窝状六边形超点阵斑图, 每个蜂窝单元边缘均由短线构成, 中心区是相同的圆形点状斑图; 从相应二维傅里叶频谱中可以看出蜂窝斑图有三种不同波数的波矢, 每组相同波数的波矢均可构成一六边形, 中心区为一组等波数的谐振波矢 q_i ($|q_1| = |q_2| = |q_3|$), 此外存在两种次谐振波矢 K_i, K'_i , 其中 $|K_i| = 2|q_i|, |K'_i| = 3^{1/2}|q_i|$ 满足三波共振关系: $K_1 + q_2 = K'_1$, 因此蜂窝斑图有三套子结构构成. 图 3(b) 为波数比 3 : 1 时系统 1 中所呈现的超六边斑图, 任

何一个单元与周围均匀分布的六个相同单元都可组成正六边形的形状, 形成六边形的每个单元与蜂窝超六边形的中心斑图相似, 从二维傅里叶频谱中可以看出也是由两组 Turing 模 q_i 和 K_i 相互作用形成的 (其中 $|K_i| = 3|q_i|$), 共有三套次生模: 第一套新生次谐振模有 2 组, 其中 3 个 k_i 模的大小为 $2|q_i|$ ($|K_i| - |q_i| = 2|q_i|, k_i//q_i$), 另 3 个 k'_i 模的波数为 $3^{1/2}|q_i|$, 且与谐振模满足共振关系: $k_1 + q_2 = k'_1$, 第二套为 2 组大小相等的新生次谐振模 Q_i 和 Q'_i , 分别满足三波共振关系: $K_1 + q_2 = Q_1$ 和 $-K_3 - q_2 = Q'_1$; 第三套共有 4 组新生次谐振模 M_i, N_i, N'_i, R_i , 其中 M_i 模的大小为 $4|q_i|$ ($|K_i| + |q_i| = 4|q_i|, M_i//q_i$), R_i 模与第一套新生次谐振 k'_i 模平行且大小为 $2|k'_i|$, 另两组模 N_i 和 N'_i 的大小相等且满足三波共振关系: $K_1 - q_3 = N_1$ 和 $-K_3 + q_1 = N'_1$. 图 3(c) 为波数比为 4 : 1 时系统 1 中形成的黑眼斑图, 每一个六边形晶胞中心为暗斑点, 向外依次是一个亮环和暗环, 形成类似于眼睛的结构, 每三个单元中心处各有一个浓度不同的点状区域, 每一个单元周围有六个这样的点状区域, 且这六个点成正六边分布, 二维傅里叶频谱显示由两组 Turing 模 q_i 和 K_i 相互作用形成的 (其中 $|K_i| = 4|q_i|, K_i//q_i$). Turing 斑图随系统 2 中变量扩散系数的增大, 超点阵单元间的距离逐渐增大, 相同区域面积内的晶胞减少, 即超点阵斑图的波数逐渐减小, 其原因为系统 2 中失稳模波数随扩散系数的增加而减小, 短波模受失稳模调制所引起, 但失稳模与短波模共振耦合时新生次谐振模数量会逐渐增加, 且新生模与固有模或新生次谐振模与谐振模均可形成三波共振关系.

3.2 耦合系数的影响

两子系统波数相同时无论耦合系数取 0—1 的任何值, 两系统均出现相同的简单斑图. 图 4 中分别是耦合系数为 0.045 与 0.15 时子系统 1 中所形成简单六边形斑图, 可以看出两图形 (图 4(a) 和 (b)) 基本一致, 说明此时耦合系数与系统斑图的类型无关, 在波数比为 1 : 1 时系统始终处于初级 Turing 分岔点附近. 两子系统波数比大于 1 时, 两波模地位不同, 短波模受失稳模调制, 两波模随耦合系数的改变耦合共振形式也会相应发生变化, 因此斑图形式表现出明显的变化. 图 4(c) 和 4(d) 分别是耦合系

数为 0.05 与 0.3 时子系统 1 中所形成复杂斑图与简单六边形斑图, 系统 1 中斑图出现明显的变

化说明耦合系数的大小也可以影响系统 Turing 分岔行为.

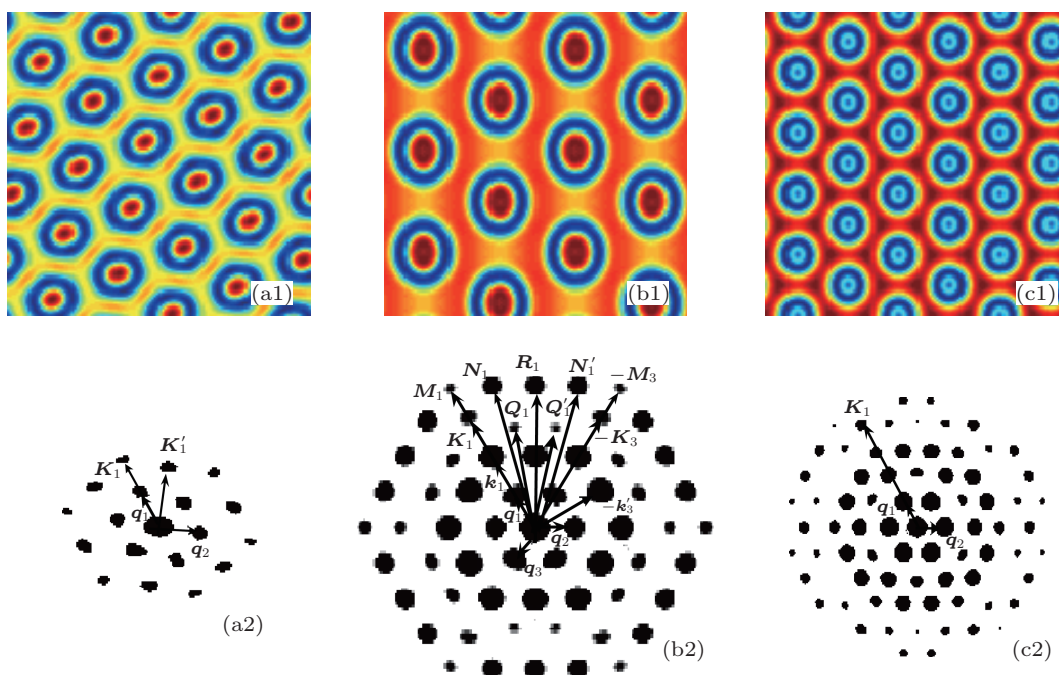


图 3 (a) 波数比 2 : 1 时, $D_{u1} = 6.78, D_{v1} = 15.75, D_{u2} = 25.3, D_{v2} = 68.9, \alpha = 0.05, \beta = 0.05$; (b) 波数比 3 : 1 时, $D_{u1} = 6.48, D_{v1} = 15.55, D_{u2} = 55.3, D_{v2} = 147.5, \alpha = 0.035, \beta = 0.035$; (c) 波数比 4 : 1 时, $D_{u1} = 1.55, D_{v1} = 3.505, D_{u2} = 22.5, D_{v2} = 65.5, \alpha = 0.05, \beta = 0.01$

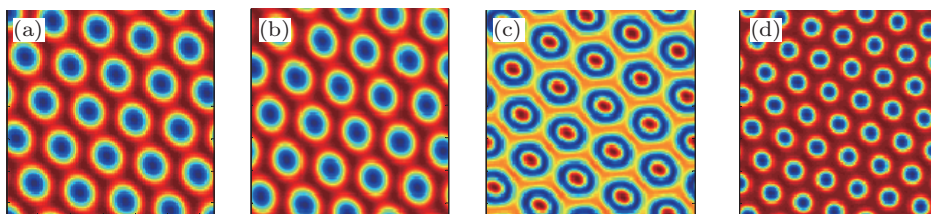


图 4 耦合强度对斑图的影响 波数比 1 : 1 时, $D_{u1} = 27.75, D_{v1} = 73.75, D_{u2} = 27.75, D_{v2} = 73.75$: (a) $\alpha = 0.045, \beta = 0.045$; (b) $\alpha = 0.15, \beta = 0.15$; 波数比 2 : 1 时, $D_{u1} = 6.5, D_{v1} = 14.15, D_{u2} = 22.75, D_{v2} = 65.5$: (c) $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$; (d) $\alpha = 0.3, \beta = 0.3$

模拟过程中发现在耦合系数小于 0.1 时, 随耦合系数强度的增加系统 1 中不仅呈现简单和复杂斑图, 还可以呈现简单斑图向复杂斑图的变化 (如图 5(a)—(e) 所示, 其中 1, 2 代表系统 1, 2 中斑图). 可以看出两系统无耦合时子系统 2 中为大点简单六边形斑图, 系统 1 中呈现小点简单六边形的斑图 (图 5(a)); 耦合系数在 0—0.0015 时两子系统直接形成无耦合时简单六边形斑图 (图 5(b)); 耦合系数在 0.0015—0.04 时, 系统 2 稳定于简单六边形斑图, 系统 1 出现超六边形复杂图形 (图 5(c)), 耦合系数在 0.0015—0.02 时系统 1 中超点阵斑图不稳定, 随模拟时间延长逐渐演化成简单六边形斑图 (图 5(1b)) 或区域点状斑图 (图 5(2d)); 耦合系数在 0.04—0.065 间取值时两子系统同时呈现并稳定于

简单四边形斑图 (图 5(e)), 但随耦合系数增大, 系统形成正四边形的图形效果会逐渐降低; 耦合系数大于 0.065 时系统只出现短暂的点状斑图, 而未能形成稳定的 Turing 斑图. 其中耦合系数在 0.025—0.04 时, 系统 1 中斑图出现简单斑图到复杂斑图以及简单斑图间的转化 (如图 6(a)—(e) 所示), 两子系统会首先同时呈现简单正四边形斑图 (图 6(a)); 之后随模拟时间增加系统 2 中相邻斑点间开始融合, 中间背景的面积增大, 这种变化在子系统 1 中表现尤为明显 (图 6(1b)); 随模拟时间的继续增加, 在系统 1 增大的背景区中心位置呈现新的斑点, 此时系统斑图的形状开始变形 (图 6(c)); 随着背景区新生斑点的增多, 系统逐渐失去正四边形的形状 (图 6(d)); 经过一段时间从无序到有序的演化后系统 2 开始呈

现简单六边形斑图, 系统 1 中复杂斑图单元也向六边形发展 (图 6(e) 所示); 最终系统 1 稳定于超六边形斑图, 而系统 2 则稳定于简单六边形斑图. 从图形随耦合强度的变化可以看出: 在耦合系数很小时失稳模对短波模的调控作用不明显, 两系统相互作用较弱, 系统斑图未发生改变, 随着耦合强度的增大, 失稳模对短波模的调控作用逐渐增强, 两系统相互作用增大, 进而影响到系统所呈现斑图; 非线性模拟过程中失稳模对短波模的影响较线性耦合时更

为明显 [20], 且随系统耦合系数增大, 在高级 Turing 分岔与初级 Turing 分岔相邻区域, 系统斑图可以自发地转变. 系统斑图出现简单斑图向复杂斑图以及简单斑图间的相互转化, 在介质阻挡放电实验过程中通过逐步升高电压的方法已实现 [29,30]. 分析其原因, 驱动电压的升高使系统变量扩散浓度增大的同时, 壁电荷斑图与放电丝斑图相互作用会随之增强, 两子系统间的相互作用增强在模拟过程中可以类比成耦合系数的增大, 这与模拟结果相符.

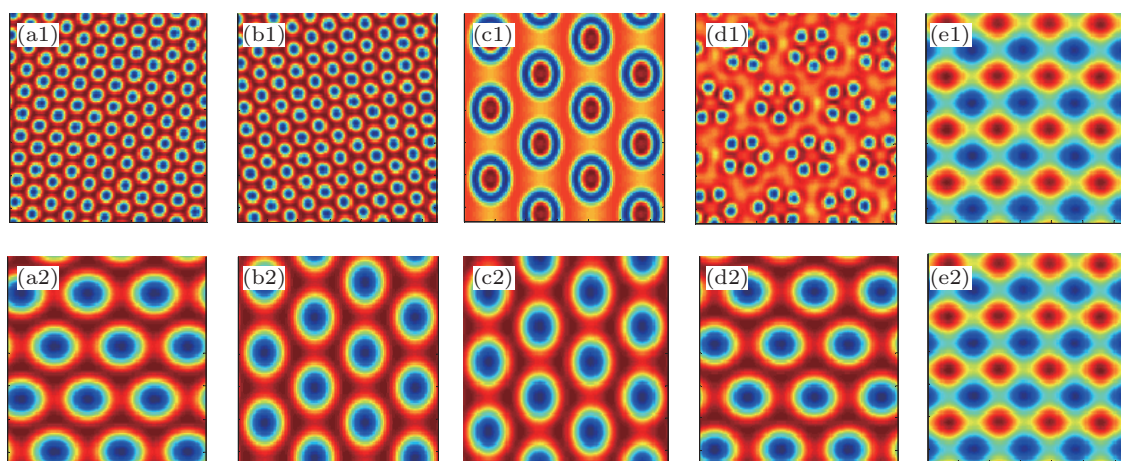


图 5 系统斑图随耦合强度的变化 $D_{u1} = 6.5, D_{v1} = 15.85, D_{u2} = 55.3, D_{v2} = 147.5$; (a) $\alpha = 0, \beta = 0$; (b) $\alpha = 0.001, \beta = 0.001$; (c) $\alpha = 0.0375, \beta = 0.0375$; (d) $\alpha = 0.019, \beta = 0.019$; (e) $\alpha = 0.04, \beta = 0.04$

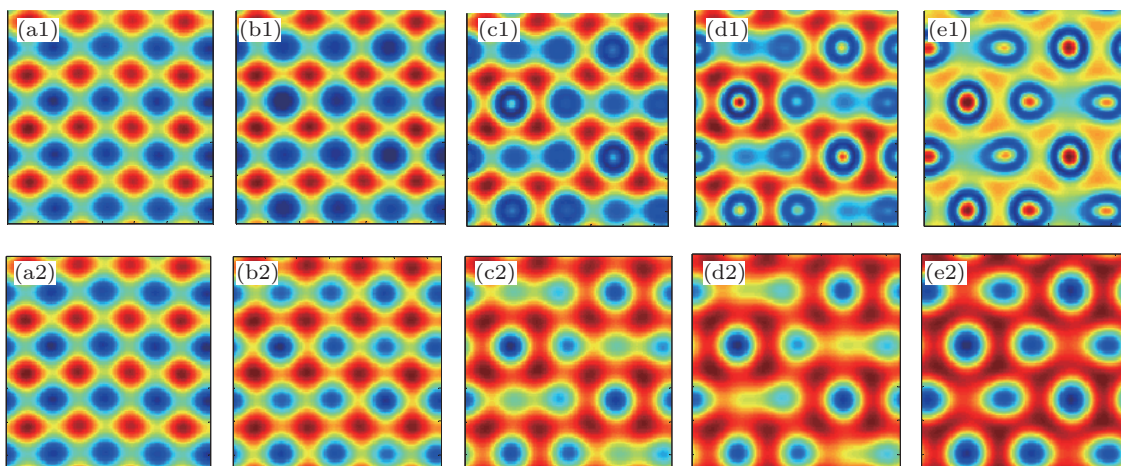


图 6 系统参数不变斑图随模拟时间自发转变过程 $D_{u1} = 6.5, D_{v1} = 15.85, D_{u2} = 55.3, D_{v2} = 147.5, \alpha = \beta = 0.0375$; (a) $t = 236$; (b) $t = 302.3$; (c) $t = 312.1$; (d) $t = 316.8$; (e) $t = 323$

从系统斑图的转变过程可以看出: 短波模与失稳模产生共振耦合时, 有新的失稳模形成, 系统处于初级 Turing 分岔点附近时, 由于系统对失稳模的选择具有惟一性, 耦合新产生的失稳模与原来失稳模存在竞争, 初始失稳模被取代时系统出现新的简单斑图; 系统处于高级 Turing 分岔点附近时, 新生失

稳模与固有失稳模共存, 由于失稳模具有两个不同的波长, 新生模与固有模间满足三波共振从而子系统 1 中产生超六边形复杂斑图. 参数不变情况下系统 1 由简单正四边形向超六边形转变, 系统 2 由四边形向六边形转变, 证明系统在稳定外界条件下可以自发由初级分岔向高级分岔转变, 在转变时系统

的暂态平衡被打破, 系统 1 中的耦合新生失稳模会与固有模形成三波共振, 从而子系统 1 中形成复杂斑图; 系统 2 中由于固有模的对称性高于新生模, 系统斑图向高对称性转变, 因此固有失稳模会逐步取代新生模, 从而斑图由四边形逐渐演化成简单六边形.

4 结论

通过利用双层四变量反应扩散方程, 研究了两子系统在非线性和耦合强度下 Turing 模间的相互作用

以及复杂斑图的生成机理. 模拟结果表明子系统间的波数比值以及耦合强度的大小可以影响两子系统波矢的共振状态, 两子系统波矢发生共振耦合会有新的不稳定波矢产生, 在高级分岔点附近由于不稳定模具有两个或两个以上不同的波长, 且不同波矢间满足三波共振关系, 从而引起短波模子系统产生复杂斑图. 模拟过程中系统斑图呈现出简单正四边形向六边形以及超六边形点阵斑图转化, 这一结果从理论验证了不同斑图间可自发相互转化的实验结论. 本文模拟结果为深入研究反应扩散系统超点阵复杂斑图有重要的借鉴作用.

-
- [1] Schenk C P, Or-Guil M, Bode M, Purwins H G 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3781
- [2] Berenstein I, Dolnik M, Yang L, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2004 *Phys. Rev. E* **70** 046219
- [3] Arbell H, Fineberg J 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036224
- [4] Sharpe J P, Ramazza P L, Sungar N, Saunders K 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 094101
- [5] Bois J S, Jülicher F, Grill S W 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 028103
- [6] Yang L F, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 208303
- [7] Berenstein I, Yang L F, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 058302
- [8] Turing A M 1952 *Phil. Trans. R. Soc. London B* **237** 37
- [9] Dong L F, Fan W L, He Y F, Liu F C, Li S F, Gao R L, Wang L 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066206
- [10] Duan X X, Ouyang J T, Zhao X F, He F 2009 *Phys. Rev. E* **80** 016202
- [11] Stollenwerk L, Laven J G, Purwins H G 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 255001
- [12] Shirafuji T, Kitagawa T, Wakai T, Tachibana K 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83** 2309
- [13] Shin J, Raja L L 2007 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **40** 3145
- [14] Liu C Z, Brown N, Meenan B J 2006 *Appl. Surf. Sci.* **252** 2297
- [15] Dong L F, Liu W L, Wang H F, He Y F, Fan W L, Gao R L 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046210
- [16] Nie Q Y, Ren C S, Wang D Z, Li S Z, Zhang J L 2007 *Appl. Phys. Lett.* **90** 221504
- [17] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [18] Barrio R A, Varea C, Aragón J L, Maini P K 1999 *Bull. Math. Biol.* **61** 483
- [19] Kytta K, Kaski K, Barrio R A 2007 *Physica A* **385** 105
- [20] Berenstein I, Yang L F, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2005 *J. Phys. Chem. A* **109** 5382
- [21] Bai Z G, Dong L F, Li Y H, Fan W L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 118201 (in Chinese) [白占国, 董丽芳, 李永辉, 范伟丽 2011 物理学报 **60** 118201]
- [22] Míguez D G, Dolnik M, Epstein I R, Muñozuri A P 2011 *Phys. Rev. E* **84** 046210
- [23] Rogers J L, Schatz M F, Brausch O, Pesch W 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4281
- [24] Ni W M, Tang M X 2005 *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** 3953
- [25] Mikhailova A S, Showalter K 2006 *Physics Reports* **425** 79
- [26] Yuan X J, Shao X, Liao H M, Ouyang Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 024702
- [27] Liu H Y, Yang C Y, Tang G N 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010505 (in Chinese) [刘海英, 杨翠云, 唐国宁 2013 物理学报 **62** 010505]
- [28] Wang W M, Liu H Y, Cai Y L, Li Z Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 074702
- [29] Dong L F, Li S F, Liu F, Liu F C, Liu S H, Fan W L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 362 (in Chinese) [董丽芳, 李树锋, 刘峰, 刘富成, 刘书华, 范伟丽 2006 物理学报 **55** 362]
- [30] Dong L F, Yang Y J, Fan W L, Yue H, Wang S, Xiao H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1917 (in Chinese) [董丽芳, 杨玉杰, 范伟丽, 岳晗, 王帅, 肖红 2010 物理学报 **59** 1917]

Complex Turing patterns in two-layer non-linearly coupling reaction diffusion systems*

Li Xin-Zheng¹⁾ Bai Zhan-Guo^{1)†} Li Yan¹⁾ Zhao Kun¹⁾ He Ya-Feng²⁾

1) (College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China)

2) (College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding 071002, China)

(Received 2 July 2013; revised manuscript received 13 August 2013)

Abstract

The influence of Turing modes in two subsystems on pattern formation is investigated by the two-layer non-linearly coupled Brusselator model. It is found that the coupling coefficient and wave number ratio between two Turing modes take an important role in the pattern formation and pattern selection. The kind of pattern changes from simple pattern to complex one with the increase of wave number ratio. When nonlinear coupling coefficient is smaller than 0.1, the short wave mode in system 1 under the action of instability mode in system 2 can form not only simple pattern (such as simple hexagon and quadrilateral and stripe pattern), but also complex pattern due to the resonance coupling between the two Turing modes (such as honeycomb hexagon and super hexagon and complex black-eye pattern), and the transformation process of pattern from quadrilateral to superlattice pattern is observed for the first time under the specific parameters. When nonlinear coupling coefficient is more than 0.1, the simple patterns such as simple hexagon and stripe pattern are obtained only in system 1, because there is no resonance coupling between the two Turing modes in system 1.

Keywords: Brusselator model, nonlinear coupling, Turing mode

PACS: 05.45.-a, 05.65.+b, 82.40.Ck, 52.80.Tn

DOI: 10.7498/aps.62.220503

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11247242), the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51201057), and the Foundation of Hebei University of Science and Technology, China (Grant Nos. QD201225, QD201226).

† Corresponding author. E-mail: baizg2006163@163.com