一类大气浅水波系统的广义变分迭代行波近似解*

石兰芳[1)] 周先春[2)3)4)] 莫嘉琪[5)†]

1) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

2) (南京信息工程大学电子与信息工程学院, 南京 210044)

3) (南京信息工程大学, 气象传感网技术工程中心, 南京 210044)

4) (南京信息工程大学, 江苏省气象探测与信息处理重点实验室, 南京 210044)

5) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2013 年 7 月 10 日收到; 2013 年 9 月 6 日收到修改稿)

本文研究了一类非线性浅水波系统, 首先构造了相应的泛函. 其次选取 Lagrange 乘子, 再用改进的广义变分迭代方法, 得到了相应模型的行波近似解析解.

关键词: 浅水波, 非线性, 变分迭代, 近似解

PACS: 02.30.Mv **DOI:** 10.7498/aps.62.230202

1 引 言

大气和海洋的自然现象异常, 影响到全球的气候和生态等方面的变化. 它们的气候异常、海水反常流动, 对经济发展和人类生活都受到严重的灾难. 因此对它的规律的研究和预防, 成为当前学术界关注的对象. 利用数值方法来探讨大气浅水波系统的物理特性, 许多学者进行了很多的研究 [1−5]. 大气浅水波耦合系统是一个非线性的物理过程, 近来一些学者已经利用非线性动力学的解析理论来研究一类大气浅水波系统, 并求得了近似解析解 [6−9]. 这种方法的优点还在于得到的近似解析解的表达式还能进行相关的解析运算, 以便能得到其他有关物理量的更广泛的性态. 莫嘉琪等曾利用非线性近似解析方法研究了一类大气物理、海洋气候等领域中的非线性问题 [10−17]. 在本文中, 是利用一个简单而有效的改进的广义变分迭代方法 [18], 来近似地求解一类大气浅水波非线性扰动耦合系统.

2 大气浅水波扰动系统

今考虑如下无量纲正压大气浅水波扰动系统:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (uh)}{\partial x}+\frac{\partial (vh)}{\partial y}=G_1(h), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}-lv=G_2(u), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}+lu=G_3(v), \tag{3}$$

其中 t, x, y 分别为时间、空间变量, h 为位势函数高度, u, v 分别为纵向、横向速度, l 为转动系数, $G_i(i=1,2,3)$ 为系统的扰动项, 它们为对应变量充分光滑的函. 我们用改进的广义变分迭代方法来求出耦合摄动系统 (1)—(3) 的近似解析解.

3 改进的广义变分迭代

首先对 (1)—(3) 式作行波变换 $z=x+y+t$, 得

$$(1+u+v)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}+h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(u+v)=G_1(h), \tag{4}$$

$$(1+u+v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}-lv=G_2(u), \tag{5}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202106)、教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20123228120005)、江苏省高校自然科学研究项目 (批准号: 13KJB170016) 和南京信息工程大学预研基金 (批准号: 20110385) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$(1+u+v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}+lu=G_3(v). \tag{6}$$

现引入泛函 $F_i(h,u,v)\in C^1(R)(i=1,2,3)$,

$$\begin{aligned}F_1(h,u,v)=&h-\int_0^z\lambda_1\Big[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}+(\bar{u}+\bar{v})\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\xi}\\&+\bar{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\bar{u}+\bar{v})-G_1(\bar{h})\Big]\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}F_2(h,u,v)=&u-\int_0^z\lambda_2\Big[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\xi}-l\bar{v}\\&+(\bar{u}+\bar{v})\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\xi}-G_2(\bar{u})\Big]\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}F_3(h,u,v)=&v-\int_0^z\lambda_3\Big[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\xi}+l\bar{u}\\&+(\bar{u}+\bar{v})\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}\xi}-G_3(\bar{v})\Big]\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\bar{h}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ 分别为 h, u, v 的限制变量 [18], $\lambda_i(i=1,2,3)$ 为对应的 Lagrange 乘子.

将泛函 (7)—(9) 式分别进行变分: $\delta F_i(i=1,2,3)$, 并令其为零: $\delta F_i=0$. 不难可得到系统的 Lagrange 乘子: $\lambda_i=1(i=1,2,3)$. 于是我们构造系统 (4)—(6) 关于函数 h, u, v 如下迭代式:

$$\begin{aligned}h_n=&h_{n-1}-\int_0^z\Big[\frac{\mathrm{d}h_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}+(u_{n-1}\\&+v_{n-1})\frac{\mathrm{d}h_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}+h_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(u_{n-1}\\&+v_{n-1})-G_1(h_{n-1})\Big]\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}u_n=&u_{n-1}-\int_0^z\Big[\frac{\mathrm{d}u_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}h_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}\\&-lv_{n-1}+(u_{n-1}+v_{n-1})\frac{\mathrm{d}u_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}\\&-G_2(u_{n-1})\Big]\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}v_n=&v_{n-1}-\int_0^z\Big[\frac{\mathrm{d}v_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}+\frac{\mathrm{d}h_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}\\&+lu_{n-1}+(u_{n-1}+v_{n-1})\frac{\mathrm{d}v_{n-1}}{\mathrm{d}\xi}\\&-G_2(v_{n-1})\Big]\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{12}$$

现选取系统 (4)—(6) 的初始近似 $(h_0(z), u_0(z), v(z))$ 为系统 (4)—(6) 的线性情形的一个解. 即

$$\begin{aligned}h_0=&1,\\u_0=&\cos(lz)+\sin(lz),\\v_0=&\cos(lz)-\sin(lz).\end{aligned} \tag{13}$$

于是由 (13) 式及迭代关系式 (10)—(12), 可依次得到序列 $\{h_n,u_n,v_n\}$. 可以证明. 在 $z\in[0,Z_0]$ 上, 其中 Z_0 为充分大的正常数, 序列 $\{h_n,u_n,,v_n\}$ 是一致收敛的. 设

$$\begin{aligned}h(z)&=\lim_{n\to\infty}h_n(z),\\u(z)&=\lim_{n\to\infty}u_n(z),\\v(z)&=\lim_{n\to\infty}v_n(z).\end{aligned} \tag{14}$$

不难证明, 由 (14) 式确定的 $\{h,u,v\}$ 就是一个无量纲正压大气浅水波扰动耦合系统 (4)—(6) 的一个精确解. 而 $\{h_n,u_n,v_n\}$ 就是耦合系统 (4)—(6) 对应的 n 次近似解析解.

将得到的近似解用行波变换 $z=x+y+t$ 代入, 我们便得到无量纲正压大气浅水波扰动耦合系统 (1)—(3) 对应的各次行波近似解析解.

4 举 例

为了简单起见, 我们设无量纲正压大气浅水波扰动耦合系统 (4)—(6) 的扰动项为 $G_1=0$, $G_2=au^2$, $G_3=bv^2$, 其中 a, b 为常数. 这时大气浅水波系统 (4)—(6) 可表示为

$$(1+u+v)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}+h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(u+v)=0, \tag{15}$$

$$(1+u+v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}-lv=au^2, \tag{16}$$

$$(1+u+v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}+lu=bv^2. \tag{17}$$

由广义变分迭代式 (10)—(12), 当 $n=1$ 时, 我们可得大气浅水波系统 (15)—(17) 对应的一次近似解

$$h_1=3-2\cos(lz), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}u_1=&\frac{1+a}{2}-lz(1-a)+(\cos(lz)\\&+\sin(lz))-\frac{1}{2}(\cos(2lz)+\\&\sin(2lz))-\frac{a}{2}\cos(2lz),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}v_1=&\frac{1-b}{2}+lz(1+b)+(\cos(lz)\\&-\sin(lz))-\frac{1}{2}(\cos(2lz)\\&-\sin(2lz))+\frac{b}{2}\cos(2lz).\end{aligned} \tag{20}$$

再由广义变分迭代式 (10)—(12) 式, 当 $n=2$ 时, 我们可得大气浅水波系统 (15)—(17) 对应的二

次近似解

$$
\begin{aligned}
h_2 = & 3-2\cos(lz) \\
& + \int_0^z \bigg[(2l(1+u_1+v_1))\sin(l\xi) \\
& - (3-2\cos(l\xi))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(u_1+v_1) \bigg] \mathrm{d}\xi,
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 = & u_1 - \int_0^z \bigg[2l\sin(l\xi) - lv_1 \\
& + (1+u_1+v_1)\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\xi} - au_1^2 \bigg] \mathrm{d}\xi,
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2 = & v_1 - \int_0^z \bigg[2l\sin(l\xi) + lu_1 \\
& + (1+u_1+v_1)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}.-bv_1^2 \bigg] \mathrm{d}\xi,
\end{aligned} \tag{23}
$$

其中 u_1, v_1 分别由 (19), (20) 式表示.

不妨选取无量纲参数为 $l=a=b=1$, 这时大气浅水波系统 (15)—(17) 对应解 $(h,u.v)$ 的零次、一次、二次近似解的曲线图形如图 1 至图 3 所示.

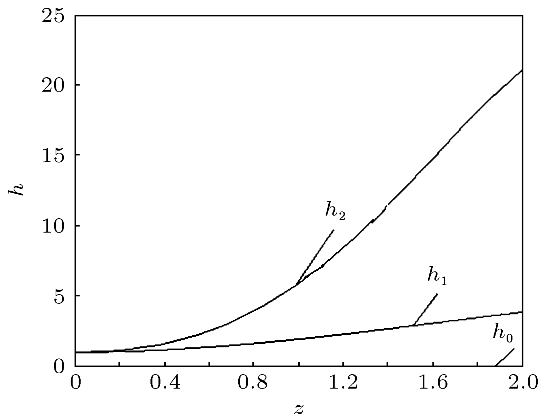

图 1　$h_0(z), h_1(z), h_2(z)$ 的曲线图形 $(l=a=b=1)$

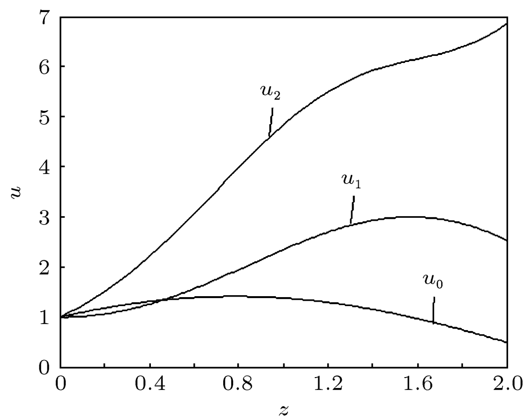

图 2　$u_0(z), u_1(z), u_2(z)$ 的曲线图形 $(l=a=b=1)$

继续由 (10)—(12) 式及 (13), (18)—(23) 式, 依次可得大气浅水波系统 (15)—(17) 对应的更高的 $n(n=3,4,\cdots)$ 次近似解析解.

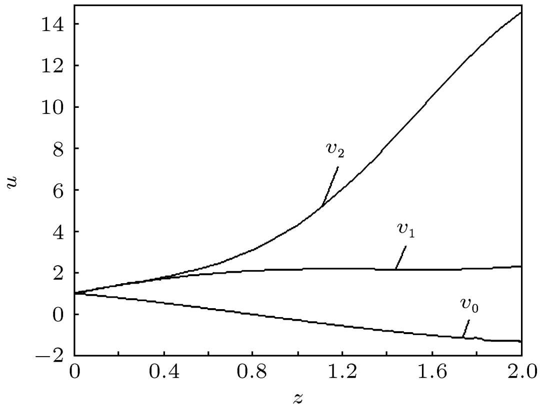

图 3　$v_0(z), v_1(z), v_2(z)$ 的曲线图形 $(l=a=b=1)$

将得到的近似解用行波变换 $z=x+y+t$ 代入, 我们便得到相应的无量纲正压大气浅水波扰动耦合系统 (1)—(3) 相应的一次、二次行波近似解析解

$$
h_1 = 3-2\cos(x+y+t), \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 = & \frac{1+a}{2} - l(1-a)(x+y+t) \\
& + (\cos(l(x+y+t)) \\
& + \sin(l(x+y+t))) \\
& - \frac{1}{2}(\cos(2l(x+y+t)) \\
& + \sin(2l(x+y+t))) \\
& - \frac{a}{2}\cos(2l(x+y+t)),
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 = & \frac{1-b}{2} + l(1+b)(x+y+t) \\
& + (\cos(l(x+y+t)) \\
& - \sin(l(x+y+t))) \\
& - \frac{1}{2}(\cos(2l(x+y+t)) \\
& - \sin(2l(x+y+t))) \\
& + \frac{b}{2}\cos(2l(x+y+t)),
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
h_2 = & 3-2\cos(l(x+y+t)) \\
& + \int_0^{x+y+t} \bigg[(2l(1+u_1+v_1))\sin(l\xi) \\
& - (3-2\cos(l\xi))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(u_1+v_1) \bigg] \mathrm{d}\xi,
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 = & u_1 - \int_0^{x+y+tz} \bigg[2l\sin(l\xi) - lv_1 \\
& + (1+u_1+v_1)\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\xi} - au_1^2 \bigg] \mathrm{d}\xi,
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
v_2 = v_1 - \int_0^{x+y+t} \bigg[2l\sin(l\xi) + lu_1
$$

$$+(1+u_1+v_1)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\xi}.-bv_1^2\Big]\mathrm{d}\xi, \qquad (29)$$

其中 u_1, v_1 分别由 (25), (26) 式表示.

用同样的方法, 由系统的零次近似 (13) 和 (24)—(29) 式, 我们还可以得到相应的无量纲正压大气浅水波扰动耦合系统 (1)—(3) 相应的更高次的行波近似解析解.

5 结 论

大气浅水波耦合系统是一个复杂的自然现象. 因此我们需要把它简化为基本模式, 并且用近似方法求出其解. 改进的变分迭代方法就是一个简单而有效的方法. 这个方法是定义一组泛函, 通过求广义变分的过程, 求出对应的 Lagrange 乘子, 从而可构造广义变分迭代式, 并用对应的线性系统的解作为迭代式的初始近似, 再从迭代式求出系统对应的行波近似解解析解.

采用本广义变分迭代方法得到的近似解, 还在于对它的初始近似 (h_0, u_0, v_0) 的选取也十分重要, 本文选用的是一个相应的线性问题的解作为原系统的零次近似. 从而再进一步深入地用逼近理论可得到原非线性系统相应的一个近似解析解.

[1] Vincent H C 2010 *J. Gydro-enviro. Res.* **3** 173
[2] Cullen M J P 2008 *Phys.* D **237** 1451
[3] Agnes H 2008 *Comput. Math. Appl.* **55** 2295
[4] Callagham T G, Forbes L K 2006 *J Cmput. Phys.* **217** 854
[5] Wu J, Lee T S. Shu B 2001 *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190** 2009
[6] Mo J Q, Lin W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3662 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2007 物理学报 **56** 3662]
[7] Mao J J, Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **57** 5049 (in Chinese) [毛杰键, 杨建荣 2007 物理学报 **57** 5049]
[8] Yang J R, Mao J J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3611 (in Chinese) [杨建荣, 毛杰键 2009 物理学报 **58** 3611]
[9] Mao J J, Yang J R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130205 (in Chinese) [毛杰键, 杨建荣 2013 物理学报 **62** 130205]
[10] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin.Chys.* **15** 671
[11] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin Chys.* **15** 1450
[12] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin.Chys.* **15** 1927
[13] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2012 *Chin. Geograph. Sci.* **22** 42
[14] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys.* B **20** 070205
[15] Mo J Q, Lin W T 2011 *Sis. Sci. & Complexity* **24** 27
[16] Lin W T, Zhang Y, Mo J Q 2013 *Chin. Phys.* B **22** 030205
[17] Ouyang C, Lin W T, Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 960201 (in Chinese) [欧阳成, 林万涛, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 960201]
[18] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Shengzhou: Science and Technology Publisher) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程与科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]

The traveling wave approximate solution for a class of atmospheric wading wave system by generalized variational iteration*

Shi Lan-Fang[1)] Zhou Xian-Chun[2)3)4)] Mo Jia-Qi[5)†]

1) (*College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing* 210044*, China*)

2) (*College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing* 210044*, China*)

3) (*Jiangsu Technology and Engineering Center for Meteorological Sensor Network, Nanjing University of Information Science and Technology , Nanjing* 210044*, China*)

4) (*Jiangsu Key Laboratory of Meteorological Observation and Information Processing, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing* 210044*, China*)

5) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241003*, China*)

(Received 10 July 2013; revised manuscript received 6 September 2013)

Abstract

In this paper, a class of wading wave system is considered. Firstly, the corresponding functional is constructed; secondly, its Lagrange operators are selected. Then, using the modified generalized variational iteration method, the corresponding traveling wave approximate analytic solutions are obtained.

Keywords: wading wave, nonlinear, generalized variational iteration, approximate solution

PACS: 02.30.Mv **DOI:** 10.7498/aps.62.230202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202106), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20123228120005), the Natural Sciences Fundation from the Universities of Jiangsu Province, China (Grant No. 13KJB170016), and the Advance Research Foundation in NUIST of China (Grant No. 20110385).

† Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn