

## 量子纠缠信令网 Poisson 生存模型及保真度分析\*

聂敏 张琳<sup>†</sup> 刘晓慧

(西安邮电大学, 通信与信息工程学院, 西安 710121)

(2013年6月5日收到; 2013年8月16日收到修改稿)

量子信令态在传输过程中, 由于环境影响产生退相干, 造成信令损伤, 从而会对构建高生存性的量子纠缠信令网产生影响. 为分析所造成的影响, 建立了自然灾害下的量子信令网 Poisson 损伤模型. 首先, 根据信令保真度定义了灾害级数; 其次, 提出信令态平均损伤量子比特数, 并给出信令网生存函数; 最后, 研究了信令损伤的修复策略并进行仿真. 仿真结果表明, 灾害级数的增加会大大降低信令网生存性, 而增加信令转接点数和控制信令损伤上限可改善生存性, 且该修复策略循环次数少, 并可将信令态的保真度由 0.6 快速提高到 0.9, 信令网的生存函数由 0.4 提高到 0.9.

**关键词:** 量子通信, 量子信令网, 保真度, 生存函数

**PACS:** 03.67.Hk, 42.50.Lc, 03.67.Mn, 84.40.Ua

**DOI:** 10.7498/aps.62.230303

## 1 引言

目前量子通信的研究主要集中于量子存储技术<sup>[1]</sup>、纠缠态的制备和操纵方法<sup>[2]</sup>、量子中继器的实现<sup>[3]</sup>、量子态隐形传输<sup>[4]</sup>、自由空间下量子纠缠态的分发<sup>[5]</sup>、量子密码学<sup>[6]</sup>等问题上, 对量子信令的研究还处在初级阶段. 信令是任何通信网络必不可少的重要组成部分, 量子通信<sup>[7,8]</sup>也不例外. 未来量子信令网是一种大容量、多种业务, 各种网络互连的综合型网络. 当网络遭受破坏时, 例如自然灾害或者是设备的故障, 不能直接放弃, 需要具有一定的生存性和自愈性, 实现网络服务持续性. 所以, 需要研究信令网的生存性, 为信令网抵抗破坏的能力提供一种标准. 然而, 当前对量子信令网只涉及信令网拓扑结构, 信令的损伤修复、中继和安全协议等方面<sup>[9,10]</sup>, 对量子信令网生存性研究还未展开.

为此, 本文首先提出一种提高量子信令网生存性的研究方案, 研究自然灾害导致的量子信令损伤, 定义灾害级数, 建立灾害下数学模型, 根据平均损伤量子比特数, 给出信令网生存函数公式, 未来量

子信令网可以据此标准构建高生存性的信令网. 然后, 提出信令损伤的修复策略, 使得信令网遭受破坏后具有良好的自愈能力. 最后仿真分析了影响生存性的因素和信令修复策略, 该策略可将信令网的生存函数由 0.4 提高到 0.9.

## 2 量子纠缠信令网模型

根据参考文献<sup>[11]</sup>提出的基于量子卫星的通信方案, 提出量子纠缠信令网模型. 如图 1 所示, 量子信令可以利用纠缠光子来携带信令信息并通过信令网络来传输信令信息. 设环境系统 E 量子态为  $|e\rangle_E$ , 信令系统需要将发送端 Alice 的信令量子态  $|\varphi\rangle_A$  传送到接收端 Bob. 设

$$|\varphi\rangle_A = a|0\rangle_A + b|1\rangle_A, \quad (1)$$

其中  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . 系统可通过地面量子信令网实现信令  $|\varphi\rangle_A$  的传递. 若地面信令网遭到了人为、自然灾害破坏, 使得网络无法继续为用户提供服务, 那么用户端还可以通过卫星网络或者微波系统, 实现信令的传递. 这样一种多种方式互联的网络模型提高了信令网络为用户服务的概率, 也就是具有较

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61172071)、陕西省自然科学基金基础研究计划 (批准号: 2010JM8021) 和陕西省教育厅自然科学研究项目 (批准号: 2011JK1017) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: linlin\_1106@126.com

高的生存性, 不仅能够保证信令的基本传输, 而且在特殊情况下可以保证信令网正常运行. 为此, 量

子纠缠信令网络的生存性有必要作为衡量网络抗破坏性能力的标准.

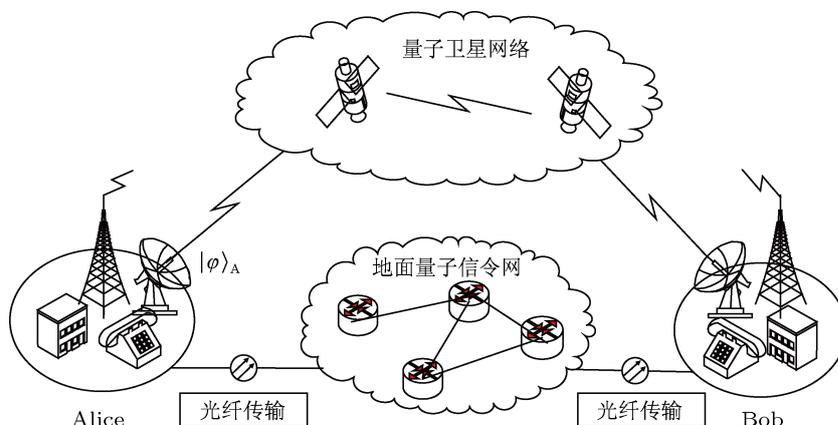


图1 量子纠缠信令网模型

### 3 量子纠缠信令网络的生存性

在经典通信网络中, 生存性泛指网络经受各种故障, 甚至灾难性故障后仍能维持可接受的业务质量的能力, 它主要是指通信网络在随机破坏作用下仍可继续提供服务的能力<sup>[12]</sup>. 当我们研究自然灾害随机破坏信令态时, 可以根据经典通信网生存函数的概念, 如下定义量子信道生存函数以及信令网生存函数.

**定义1** 遭受自然灾害破坏后, 信令网络仍能继续提供服务的概率. 概率越大, 该网络的生存性越好, 信令传输越可靠, 抵抗破坏的能力越强.

为了描述灾害对量子信令破坏的强度, 我们定义灾害级数  $\lambda$ , 引入量子信令保真度  $F_\lambda$ , 它表示当灾害级数为  $\lambda$  时, 量子信令的保真度.  $\lambda$  和  $F_\lambda$  的关系定义如下:

$$F_\lambda = 0.99, \quad \lambda = 0, \\ F_\lambda = a^\lambda F_{\lambda-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 10, \quad 0 < a < 1. \quad (2)$$

根据 (2) 式可知, 当  $\lambda = 0$  时, 表示无灾害破坏下量子信令的保真度上限  $F_0$  为 0.99. 随着灾害级数  $\lambda$  的增大, 量子信令的保真度为前一次强度的保真度的  $a^\lambda$  次指数衰减. 当  $\lambda = 1$  时,  $F_1 = 0.9405$ ;  $\lambda = 10$  时,  $F_{10} \approx 0.0589$ . 可见, 灾害级数越大, 信令保真度衰减越快.

**定义2** 信令经过某个信令转接点 (SP) 的平均损伤量子比特数为  $N_m$ . 我们规定当信令的保真度小于 0.9 时, 则该信令态为损伤的量子态. 假设信令在量子信令网中按照一定的长度  $L$  传输, 因为噪声

或者经典信道的影响产生一定的信令损伤. 根据文献 [13] 量子信令损伤传输概率

$$P_d = 1 - 2|\min(c, d)|^2(1 - B)(1 - p_c), \quad (3)$$

其中,  $B$  为通信系统的阻塞率,  $p_c$  为经典信道系统误码率,  $c, d$  为量子纠缠信道系数. 那么, 信令长度为  $L$  的平均损伤信令态个数为  $N_m$  为

$$N_m = P_d \cdot L. \quad (4)$$

可得到传送一次信令的平均保真度为

$$F_A = \frac{\sum_{i=1}^{N_m} F_i}{N_m}, \quad (5)$$

$F_i = \sqrt{\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle}$ , 为第  $i$  个信令态的保真度,  $|\varphi\rangle$  表示信令态,  $\rho$  表示损伤的信令态的密度算符. 这时的  $F_A$  为传送一次信令的量子信令保真度  $F_\lambda$ , 根据 (2) 式即可得到灾害级数  $\lambda$ . 假设某地区的信令态损伤的个数  $n$  符合泊松分布

$$P(n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, \quad (6)$$

其中,  $\lambda = N_m$ . 对每个 SP 来说, 我们规定当信令态损伤的个数  $n$  到达信令损伤上限  $N_u$  时, SP 才发生故障. 那么,  $x$  个信令点, 共享  $y$  条信令链路的信令网络的生存函数可表示为

$$S = \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \left[ \sum_{n=N_u}^{\infty} P(n) \right]^i \\ \times \left[ 1 - \sum_{n=N_u}^{\infty} P(n) \right]^{x-i} Q, \quad (7)$$

其中,  $Q$  为破坏前后信令网络联结概率之比.

### 4 信令损伤修复策略

量子信令态遭受灾害破坏后, 信令的保真度会随灾害级数的增加而衰减, 信令损伤的量子比特数也会增加. 为此, 需要提出修复损伤信令态的策略, 以提高信令保真度. 1996年, Deutsch 等人提出改进的基于 CNOT 门的纠缠纯化方案<sup>[14]</sup>. 该方案可极大地提高纠缠光子的保真度, 且效率更高, 速度更快, 可以应用该方案修复遭受灾害损伤的信令态.

为了描述方便, 假设待纯化的信令态为密度矩阵  $\rho$  描述的混合纠缠态, 即

$$\rho = A|\varphi^+\rangle\langle\varphi^+| + B|\varphi^-\rangle\langle\varphi^-| + C|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + D|\psi^-\rangle\langle\psi^-|, \quad (8)$$

其中,  $A+B+C+D=1$ ,  $|\varphi^\pm\rangle$  和  $|\psi^\pm\rangle$  为 4 个 Bell 态, 即

$$|\varphi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A|H\rangle_B \pm |V\rangle_A|V\rangle_B),$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A|H\rangle_B \pm |V\rangle_A|V\rangle_B),$$

$H$  和  $V$  分别代表光子的水平极化和垂直极化,  $A$  为发送方 Alice,  $B$  为接收方 Bob. Alice 和 Bob 分别拥有携带信令信息的源光子对  $A_1B_1$  和靶光子对  $A_2B_2$ . 经过 Alice 和 Bob 么正操作  $U_A$  和  $U_B$  后,  $\rho$  变为

$$\rho' = A|\varphi^+\rangle\langle\varphi^+| + B|\psi^-\rangle\langle\psi^-| + C|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + D|\varphi^-\rangle\langle\varphi^-|. \quad (9)$$

Alice 和 Bob 进行 CNOT 操作, 对两对纠缠光子进行同步 CNOT 操作的真值表可参考文献<sup>[15]</sup>. 随后, Alice 和 Bob 分别沿着  $Z$  方向测量靶光子, 并比对测量结果. 如果, 测量结果相同, 则保留源光子对; 如果结果相反, 则放弃源光子对. 保留下来的光子对的密度矩阵为

$$\rho'' = A'|\varphi^+\rangle\langle\varphi^+| + B'|\varphi^-\rangle\langle\varphi^-| + C'|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + D'|\psi^-\rangle\langle\psi^-|. \quad (10)$$

其中,  $A' = \frac{A^2+B^2}{Z}$ ,  $B' = \frac{2CD}{Z}$ ,  $C' = \frac{C^2+D^2}{Z}$ ,  $D' = \frac{2AB}{Z}$ ,  $Z = (A+B)^2 + (C+D)^2$ . 当  $A > 1/2$  时,  $A' > A$ . 在下次纯化前, Alice 和 Bob 通过么正操作  $U_A$  和  $U_B$  后将保留下来的光子对的状态变成  $\rho$ . 通过重复上面的纠缠纯化过程, Alice 和 Bob 可以得到高保真度的信令态  $|\varphi^+\rangle$ . 下面图 2 为信令修复模型图, 描述灾害破坏后, 信令修复的流程.

假设源信令态  $|\varphi^+\rangle$  由 Alice 传送到 Bob, 在  $D$  处遭受灾害袭击. 这时, 开始启动信令态修复的流程. 首先进行生存函数判断, 若第  $i$  次灾害的生存函数  $S_i < S_{\text{criterion}}$  ( $S_{\text{criterion}}$  为规定的标准生存函数), 则需要对信令态进行修复; 否则, 造成的灾害不至于破坏信令态, 则修复结束, 继续传输源信令态. 然后, 进入纯化阶段, 对靶光子对  $A_2B_2$  作  $Z$  方向测量, 若结果相同, 则保留源光子对  $A_1B_1$ , 不同则放弃  $A_1B_1$ , 且该次纯化后输出的信令态达到一定的保真度值  $F_{\text{criterion}}$ , 否则, 继续纯化. 当修复后得到高保真度的信令态  $|\varphi^+\rangle$  时, 继续传输信令态到 Bob, 若再发生灾害袭击, 可按照上述的修复流程, 直到信令态安全传输到接收端 Bob.

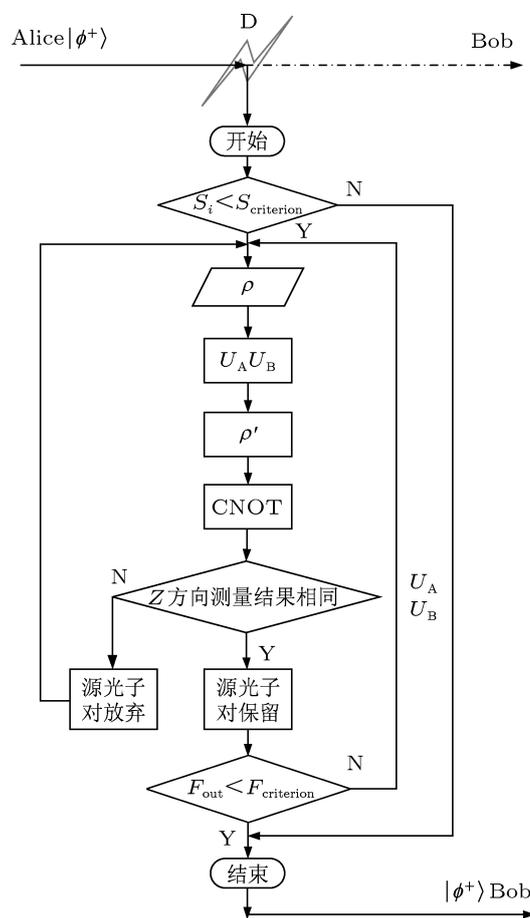


图 2 信令修复模型图

### 5 仿真

为了更好地研究影响信令网生存函数的因素, 我们进行了如下仿真, 分析信令节点数  $x$ 、灾害级数  $\lambda$ 、信令损伤上限  $N_u$ 、保真度  $F$  和生存函数  $S$  的关系.

图 3 中,  $x$  表示信令转节点数,  $S$  表示信令网生存函数,  $N_u$  为信令损伤上限, 实线、虚线和点画线分别表示信令网遭受灾害级数  $\lambda = 2, \lambda = 4, \lambda = 6$  的生存函数曲线. 从图 3 中可以看出, 提高 SP 的个数可提高生存函数. 但是, 对于固定 SP 的信令网而言, 灾害级数的增加会对生存函数有着重要的影响. 对于  $x = 20$  的链路, 当  $\lambda = 2$  时, 即信令态的保真度为 0.84 左右, 生存函数可以达到 0.9; 当  $\lambda = 6$  时, 即信令态的保真度下降为 0.34 左右, 生存函数迅速降低到了 0.4. 为此, 我们需要研究信令损伤上限  $N_u$ , 来提高大灾害时的生存函数.

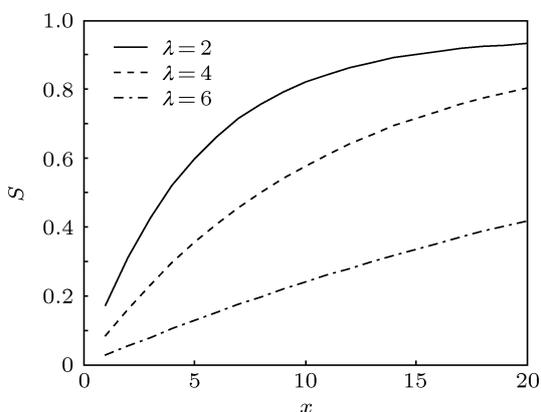


图 3 信令转接点数和生存函数在不同灾害级数下的关系

图 4 中,  $x = 20$ . 从中可以看出, 随着灾害程度的增加, 网络需要更高的  $N_u$  来保证理想的生存函数. 而对每个固定灾害程度下的信令网来说, 例如, 当  $\lambda = 2$  时,  $N_u = 4$  是最合适的信令损伤上限, 不会因为上限值过大, 而造成资源浪费. 此时, 当  $\lambda = 6$ ,  $N_u = 10$  时,  $S$  由图 3 情况下的 0.4 提高到了 0.9.

下面分析信令态修复策略的性能. 假设遭受破坏的信令态的约化密度算符表示为  $\rho' = A|\varphi^+\rangle\langle\varphi^+| + B|\psi^-\rangle\langle\psi^-| + C|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + D|\varphi^-\rangle\langle\varphi^-|$ ,  $A = 2/3, B = C = D = 1/9$ , 那么, 修复前的信令态  $|\varphi^+\rangle$  的保真度为  $2/3$ , 根据 (2) 式的定义, 可知该信令态  $|\varphi^+\rangle$  遭受灾害级数  $\lambda$  为 4, 这时启动信令修复流程, 并假设经过三次的修复循环, 可得到修复后的  $|\varphi^+\rangle$  信令态的保真度约为 0.9. 图 5 为信令态修复前后信令网生存函数图.

$S_1, S_2$  分别表示信令态修复后和修复前信令网生存函数. 信令态修复前, 保真度为  $2/3$ , 修复后, 保真

度为 0.9. 当  $x = 20$  时, 生存函数由原来的 0.4 修复为 0.9. 以上分析可知, 该修复策略可大幅度提高信令网生存性, 而且修复循环次数只用了三次.

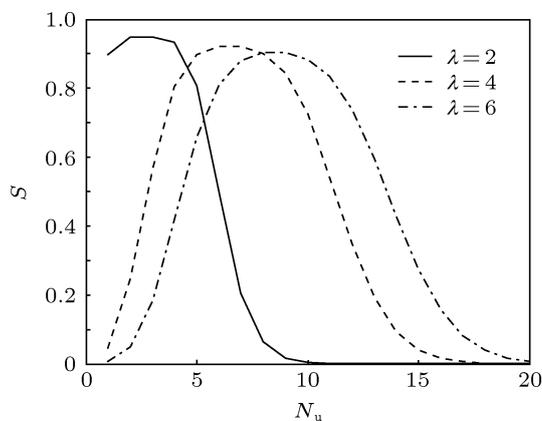


图 4 信令损伤上限和生存函数在不同灾害级数下的关系

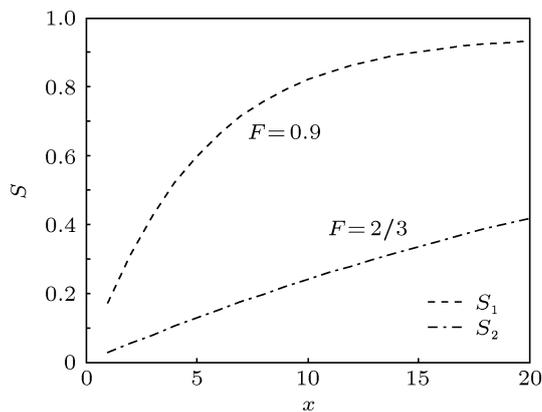


图 5 信令态修复前后信令网生存函数

## 6 结论

为了提高量子纠缠信令网生存性, 本文提出了基于 Poisson 分布概率模型的生存函数概念, 并建立自然灾害下的量子信令网 Poisson 损伤模型, 得出量子信令网生存函数. 针对该网络, 提出灾害下信令态修复策略模型. 通过以上分析, 为构建高生存性的量子信令网, 应避免较大的灾害破坏、增加信令转节点数、提高信令损伤上限值以及采用合理的信令态修复策略. 本文提出的研究方法和理论可将信令网生存函数由灾害前 0.4 提高到 0.9. 因此, 以上的分析方法可以建立高生存性的信令网, 为构造量子信令网提供了理论基础.

- [1] Liu X H, Pei C X, Nie M 2012 *Chin. Phys. Lett.* **27** 120303
- [2] Deng F G, Long G L, Liu X S 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042317
- [3] Sheng Y B, Zhou L, Cheng W W, Gong L Y, Zhao S M, Zheng B Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030307
- [4] Mei F, Yu Y F and Zhang Z M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020308
- [5] Yin J, Yong H L, Wu Y P, Peng C Z 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060307 (in Chinese) [印娟, 雍海林, 吴裕平, 彭承志 2011 物理学报 **60** 060307]
- [6] Zhang S, Wang J, Tang C J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 060303
- [7] Yu X T, Xu J, Zhang Z C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 090311
- [8] Jin X M, Ren J G, Yang B, Yi Z H, Zhou F, Xu X F, Wang S K, Yang D, Hu Y F, Jiang S, Yang T, Chen K, Peng C Z, Pan J W 2010 *Nature Photonics* **4** 376
- [9] Lian T, Nie M 2012 *Acta Photonica Sinica* **41** 1251 (in Chinese) [连涛, 聂敏 2012 光子学报 **41** 1251]
- [10] Quan D X, Pei C X, Liu D, Zhao N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2493 (in Chinese) [权东晓, 裴昌幸, 刘丹, 赵楠 2010 物理学报 **59** 2493]
- [11] Pfnerniggbauer M, Aspelmeyer M, Leeb W, Baister G, Dreischer T, Jennewein T, Neckamm G, Perdigues J, Weinfurter H, Zeilinger 2005 *Journal of Optical Networking* **4** 549
- [12] Huang S, Xu Y, Zhang L 2007 *Computer Engineering* **33** 22 (in Chinese) [黄松, 许勇, 张凌 2007 计算机工程 **33** 22]
- [13] Yi Y H, Nie M, Pei C X 2012 *Journal of Xidian University(Natural Science Edition)* **39** 29 (in Chinese) [易运晖, 聂敏, 裴昌幸 2012 西安电子科技大学学报(自然科学版) **39** 29]
- [14] Deutsch D, Ekert A, Jozsa R, Macchiavello C, Popescu S, Sanpera A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2818
- [15] Long G L, Deng F G, Zeng J Y 2011 *Recent Progress in Quantum Mechanics(Fifth Volume)* (Beijing: Tsinghua University Press) p258(in Chinese) [龙桂鲁, 邓富国, 曾谨言 2011 量子力学新进展(第五辑)(北京: 清华大学出版社) 第 258 页]

# Poisson survival model of quantum entanglement signaling network and fidelity analysis\*

Nie Min Zhang Lin<sup>†</sup> Liu Xiao-Hui

(College of Communication and Information Engineering, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121)

(Received 5 June 2013; revised manuscript received 16 August 2013)

## Abstract

Quantum signaling states have decoherence because of the environment during the transmission. It causes signaling damage and thus will have impact on building high survivability quantum entanglement signaling network. In order to study the influence deeply, Poisson damage model of quantum signaling network is established. First, disaster magnitude is defined base on signaling fidelity. Second, average damage signaling quantum bits and survival function of quantum signaling network is put forward by basic quantum theory. At last, research on the signaling damage repair strategy and simulation is analyzed. Simulation results show that increasing of disaster magnitude will greatly reduce the signaling network survivability. However, increasing the nodes and controlling signaling damage caps may improve survivability. The repair strategy which costs small number of cycles can rapidly increase the signaling fidelity from 0.6 to 0.9 and the survival function of the signaling network from 0.4 to 0.9.

**Keywords:** quantum communication, quantum signaling network, fidelity, Survival function

**PACS:** 03.67.Hk, 42.50.Lc, 03.67.Mn, 84.40.Ua

**DOI:** 10.7498/aps.62.230303

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61172071), the Natural Science Foundation Research Project of Shaanxi Province (Grant No. 2010JM8021), and the Education Natural Science Research Projects of Shaanxi Provincial Department (Grant No. 2011JK1017).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: linlin.1106@126.com