

# 基于高斯伪谱方法的混沌系统最优控制\*

曹小群†

(国防科学技术大学计算机学院, 长沙 410073)

(2013年7月30日收到; 2013年9月6日收到修改稿)

针对混沌系统最优控制问题, 提出一种基于高斯伪谱方法的数值求解新算法. 首先在勒让德-高斯点上构造 Lagrange 插值多项式并近似表示混沌系统最优控制中的状态变量和控制变量; 接着将连续空间的最优控制问题转化为非线性规划问题; 然后通过序列二次规划 (SQP) 算法获得最优解; 最后对三个典型混沌系统的仿真实验结果表明, 新方法能有效和快速地实现混沌系统的最优控制.

**关键词:** 混沌系统, 最优控制, 高斯伪谱法, 非线性规划

**PACS:** 05.45.Gg, 45.20.Jj, 02.60.Pn

**DOI:** 10.7498/aps.62.230505

## 1 引言

混沌是非线性动力学系统所特有的一种形式, 自从 1963 年 Lorenz 发现第一个混沌吸引子, 混沌研究就成为非线性科学中的重要方向之一. 因为混沌系统对初值的高度敏感性和长时间的不可预测性, 所以控制混沌就成了混沌应用的关键<sup>[1,2]</sup>. 另外, 由于工程和技术应用问题中对混沌现象处理的日益迫切需要, 研究人员提出了多种混沌控制方法<sup>[1-16]</sup>, 并在光学、等离子体、流体、化学反应、电子回路、密码学、机械震动故障诊断、神经网络和生物系统等越来越多的领域和方向中应用. 混沌控制一般分为反馈和非反馈控制两大类, 而优化控制是反馈控制中一种广泛应用的方法, 它通常给定控制变量的容许范围, 使目标函数沿着系统可能的状态求极小值. 国内外学者提出了多种混沌系统最优控制方法<sup>[12-16]</sup>, 最后都转化为 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 偏微分方程的求解问题. 但是, 在实际应用中 HJB 方程的解在多数情况下是不存在或不惟一的, 所以求解 HJB 方程成为混沌系统最优控制的主要障碍<sup>[12]</sup>.

目前, 在非线性的最优控制领域主要有两大类数值方法: 间接法和直接法<sup>[17-19]</sup>. 间接法主要求解

由最优控制的一阶必要条件得到的 Hamilton 边值问题<sup>[18,19]</sup>, 缺点是求解过程复杂繁琐, 收敛半径较小, 且当非线性最优控制问题非常复杂时猜测伴随状态 (或协态) 的初值存在困难. 相对地, 直接法一般采用参数化方法将连续空间的非线性最优控制问题转换成离散空间的非线性规划问题, 主要优点是数值解具有较大的收敛半径, 并且无需猜测协态变量初值. 近年来发展起来的高斯伪谱方法<sup>[20,21]</sup>, 因为已经证明由此方法离散得到的非线性规划问题的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件与最优控制一阶必要条件等价而备受关注<sup>[21]</sup>. 本文利用高斯伪谱方法 (Gauss Pseudospectral Method, GPM) 的优点, 研究和提出了一种求解混沌系统最优控制问题的新数值算法. 主要思想是通过在 Legendre-Gauss 节点上构造 Lagrange 插值多项式来近似混沌系统最优控制中的状态变量和控制变量, 将连续空间的混沌系统最优控制问题转化为非线性规划问题, 然后通过序列二次规划 (SQP) 算法<sup>[22,23]</sup> 数值求解非线性规划问题来获得最优解. 利用该方法分别对典型的 Lorenz、Chen 和 Liu 混沌系统进行了最优控制仿真实验, 结果表明该方法无论是对单变量控制还是全变量控制, 都具有能够避免求解 HJB 方程、有效和快速地实现混沌系统最优控制的优点.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 41105063, 41375105) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn

## 2 问题描述

考虑如下  $n$  维混沌系统的最优控制问题:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t), t), \\ \boldsymbol{x}|_{t=0} &= \boldsymbol{x}_0, \\ t &\in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\boldsymbol{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  表示混沌系统的状态向量,  $\boldsymbol{x}_0$  表示系统任意状态初值, 矢量函数  $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t), t)$  定义了混沌系统结构. 目标是寻找最优控制向量  $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ , 使得混沌系统在有限时间段  $[0, T]$  内从初始点  $\boldsymbol{x}_0$  稳定到零点  $\boldsymbol{x}^* = [0, 0, \dots, 0]^T$ , 而受控混沌系统可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t), t) + \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \\ \boldsymbol{x}|_{t=0} &= \boldsymbol{x}_0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2)$$

因为控制向量不能无限大或无限小, 所以设定控制向量的容许控制集合为  $U = \{\boldsymbol{u}(t) \in L^2(0, T) : \boldsymbol{u}^{\min} \leq \boldsymbol{u}(t) \leq \boldsymbol{u}^{\max}, 0 \leq t \leq T\}$ . 为了确定合适的控制向量  $\boldsymbol{u}(t)$ , 从而同时实现将混沌系统稳定在平衡点上和消耗能量最小的双重目标, 可以通过对下面性能指标进行最小化 [3]:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2} \int_0^T \Phi(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

从物理上看, (3) 式中状态向量的二次型函数  $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}$  在有限时间段上的积分表示了“运动能量”; 而控制向量的二次型函数  $\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}$  关于时间的积分则表示“控制能量”, 衡量的是对混沌系统控制所消耗能量的大小 [3]. 需要解决的问题是在满足微分方程组 (2) 式以及容许控制集合的约束下, 寻找最优控制向量输入  $\boldsymbol{u}(t)$  使得目标泛函 (3) 式最小. 因为在实际物理系统中控制器输出能量是有限的, 所以 (3) 式的物理意义是同时期望受控系统运动能量和所施加的控制能量越小越好 [3]. 另外, (3) 式中的  $\boldsymbol{R}$  和  $\boldsymbol{Q}$  矩阵的确定与受控混沌系统有密切关系, 它们分别表示赋予不同状态分量“运动能量”和“控制能量”的权重因子, 目的是使得性能指标各个分项具有相同的量级, 从而在最优控制过程中各个混沌系统状态能够同时达到收敛. 严格来说, 最优的  $\boldsymbol{R}$  和  $\boldsymbol{Q}$  矩阵应该是随时间变化的, 可以采用后验方法来指定. 本文为了讨论问题方便, 只采用静态  $\boldsymbol{R}$  和  $\boldsymbol{Q}$  矩阵, 且具体数值参考了文献 [3].

下面通过变分方法 [24–32] 推导出最优控制输入的必要条件. 首先引入伴随状态 (也称协态) 向量  $\boldsymbol{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ , 则可以将控制输入向量  $\boldsymbol{u}(t)$  表示成状态变量  $\boldsymbol{x}(t)$  与  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  的函数 [27–29],

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)). \quad (4)$$

从而有  $\Phi(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})]^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ , 此时 Hamilton 函数只是状态量和伴随量两类变量的函数, 即

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), t) \\ = \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), t) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), t). \end{aligned} \quad (5)$$

易知混沌系统最优控制的必要条件为如下正则方程:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), t), \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于方程组 (6) 式, 利用变分运算可以推导出相应的边界条件

$$\boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}|_{t=T} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

(7) 式对应的是受控混沌系统状态向量在始端固定、终端自由情形的边界条件. 至此, 混沌系统最优控制问题已转化为非线性 Hamilton 系统的两点边值问题.

## 3 混沌系统最优控制的高斯伪谱法

在第 2 部分中利用变分方法将混沌系统最优控制问题转换为 Hamilton 边值问题, 然后通过数值方法求解, 这种数值方法称为间接法. 与间接法不同, 直接法采用参数化方法, 将连续空间的最优控制问题转化为非线性规划 (nonLinear programming, NLP) 问题, 通过数值求解非线性规划问题来获得最优解 [20,21]. 根据参数化方法不同, 直接法分为两种基本类型: 仅离散控制变量的打靶法和同时离散控制变量和状态变量的配点法. 由于配点法中的状态量也是拟合出来的, 所以不需要对动力学方程进行积分. 一般的直接配点法采用分段多项式近似状态和控制变量的时间轨迹, 缺点是设计变量数目庞大和初值给定困难. 本文采用的高斯伪谱法 (gauss pseudospectral method, GPM) 是配点法的一种, 它采用全局插值多项式在一系列勒让德 - 高

斯 (Legendre-Gauss, LG) 点上近似状态变量和控制变量 [20,21]. 与一般的配点法相比, 高斯伪谱法能够以较少的节点获得较高的求解精度, 且能使 NLP 问题的解满足传统间接法的一阶最优必要条件 [20,21], 完全避免了一般直接法的不足.

因为混沌系统最优控制的优化时域为  $t \in [0, T]$ , 而 GPM 定义的时间域为  $\tau \in [-1, 1]$ , 所以第一步是通过如下时域变换:

$$\tau = 2t/T - 1, \quad (8)$$

将时间区间从  $[0, T]$  映射到  $[-1, 1]$  内. 作为目前主流直接法的一种, GPM 利用全局插值多项式来近似状态量与控制量轨迹, 其中状态量和控制量分别由  $K+1$  和  $K$  阶拉格朗日插值多项式来拟合 [20,21]. 首先以  $K$  阶 Legendre 多项式的根  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_K)$  和  $\tau_0 = -1$  作为配置节点, 构造  $K+1$  个拉格朗日插值多项式近似受控混沌系统的状态变量

$$\bar{x}(\tau) \approx \bar{X}(\tau) = \sum_{i=0}^K L_i(\tau) \bar{X}(\tau_i), \quad (9)$$

其中拉格朗日函数定义为

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, K,$$

满足

$$L_i(\tau) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

因此, 在配置节点处的离散状态值与实际状态值相同, 即满足  $\bar{X}(\tau_i) = x(\tau_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, K$ . 同理, 构造  $K$  个拉格朗日函数  $\bar{L}_k(\tau)$  近似控制变量

$$\bar{u}(\tau) \approx \bar{U}(\tau) = \sum_{k=1}^K \bar{L}_k(\tau) \bar{U}(\tau_k). \quad (10)$$

对 (9) 式关于  $\tau$  求导, 得到

$$\dot{\bar{x}}(\tau_k) \approx \dot{\bar{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^K \dot{L}_i(\tau) \bar{X}(\tau_i), \quad (11)$$

每个拉格朗日多项式在勒让德-高斯点上的导数可以用一个微分近似矩阵  $D \in R^{K \times (K+1)}$  表示, 且可以离线确定 [20,21], 而  $R^{K \times (K+1)}$  表示  $K \times (K+1)$  阶实矩阵空间. 矩阵  $D$  中每个元素为

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \sum_{l=0}^K \left\{ \left[ \prod_{j=0, j \neq i, l}^K (\tau_k - \tau_j) \right] / \left[ \prod_{j=0, j \neq i}^K (\tau_i - \tau_j) \right] \right\}.$$

利用微分近似矩阵可以将混沌系统最优控制的微分方程动力约束转换为代数约束:

$$\sum_{i=0}^K D_{ki}(\tau_k) \bar{X}(\tau_i) - \frac{T}{2} G(\bar{X}(\tau_k), \bar{U}(\tau_k), \tau_k, t_0, t_f) = 0, \quad (12)$$

另外终端状态由初始状态加右函数在整个过程的积分获得, 使用高斯积分近似表示终端时刻的状态变量

$$\bar{X}(\tau_f) = X(\tau_0) + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^K w_k G(\bar{X}(\tau_k), \bar{U}(\tau_k), \tau_k, t_0, t_f), \quad (13)$$

式中  $w_k$  为高斯权重. 同理, 除了离散状态变量和控制变量外, 性能目标泛函 (3) 式中的积分项也利用高斯积分计算

$$J = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^K w_k \Phi(\bar{X}(\tau_k), \bar{U}(\tau_k), \tau_k, t_0, t_f). \quad (14)$$

最终, 采用 GPM 后将混沌系统最优控制问题转化为具有一系列代数约束的非线性规划问题, 即求满足代数约束 (8) 和 (9) 以及容许控制变量集合的状态变量  $\bar{X}_i$  和控制变量  $\bar{U}_k$ , 使目标函数 (14) 式最小. GPM 的一个重要性质是: 从理论上严格证明了非线性规划问题的最优解一定满足原动态优化问题的一阶最优性必要条件, 从而克服了其他直接法不一定满足一阶最优条件的缺点 [20,21]. 在已有的各种方法中, 序列二次规划 (SQP) 算法因为其整体收敛性和局部超一次收敛性被认为是目前求解 NLP 问题最有效的方法之一 [22,23]. 本文将采用 SQP 算法求解由混沌系统最优控制问题通过 GPM 导出的 NLP 问题.

## 4 数值仿真结果及分析

### 4.1 Lorenz 混沌系统最优控制

首先以典型的 Lorenz 混沌系统为例, 说明利用 GPM [20,21] 对混沌系统进行最优控制的有效性. Lorenz 系统可由如下的常微分方程组表示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \gamma x - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (15)$$

该系统的一个简单物理实现是在下方加热而在上方冷却时热对流管中的环流. 设定状态向量

$\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ ,  $x$ ,  $y$  和  $z$  分别表示流体速度、水平和垂直温差;  $\sigma$ ,  $\gamma$  和  $b$  是具有物理意义的常数. 在 (3) 式中设定  $R = I$ ,  $Q = \text{diag}(1, 4, 20)$ , 其中  $I$  为三阶单位阵,  $\text{diag}(\cdot, \cdot, \cdot)$  为对角阵 [3]. 数值仿真试验中各个物理参数设置如下:  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 28$  和  $b = 8/3$ , 此时 Lorenz 系统呈现混沌现象. 由 Hamilton 函数的正则方程 (6) 式, 可以得到 Lorenz 混沌系统最优控制的伴随方程表达式如下:

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_1 &= -\sigma\lambda_1 + (\gamma - z)\lambda_2 + y\lambda_3 - x, \\ -\dot{\lambda}_2 &= \sigma\lambda_1 - \lambda_2 + x\lambda_3 - 4y, \\ -\dot{\lambda}_3 &= -x\lambda_2 - b\lambda_3 - 20z, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|_{t=T} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

下面利用 GPM 分别考虑 Lorenz 系统单变量和全变量最优控制两种情形.

#### 4.1.1 单变量最优控制

首先研究 Lorenz 系统单变量最优控制问题的求解, 只对 Lorenz 系统中第三个方程施加控制, 则受控混沌系统的微分方程组表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \gamma x - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz + u. \end{aligned} \quad (17)$$

初始状态量  $(x_0, y_0, z_0)$  取为  $(-4.2603, -7.4557, 12.3290)$ , 其是 Lorenz 混沌状态中一点. 优化区间设置为  $t \in [0, 2]$ , 容许控制集为  $u(t) \in \{-200 \leq u(t) \leq -200, 0 \leq t \leq 2\}$ .

图 1 至图 3 分别表示 Lorenz 混沌系统在进行单变量最优控制后, 利用高斯伪谱方法求得的状态向量、控制量和伴随状态向量随时间的变化图. 从图中易知, 状态量在经过短暂的增长后很快收敛到零点, 同时需要施加的控制量也快速变为 0, 没有造成控制器能量的过多浪费. 图 3 表示的是 Lorenz 混沌系统单变量最优控制中伴随方程 (16) 式的数值解, 伴随向量的物理意义是性能指标泛函关于不同状态向量的敏感度, 从图 3 中可知伴随量的变化具有一定的连续光滑性, 从而保证控制向量不发生跃变, 从而说明高斯伪谱方法的优点. 另外, 从图 1 和图 3 可知, GPM 方法求得的状态向量和伴随向量数值解满足边界条件 (7) 式. 总之, 仿真结果表明了高斯伪谱方法求解 Lorenz 混沌系统单变量最优控制问题的有效性.

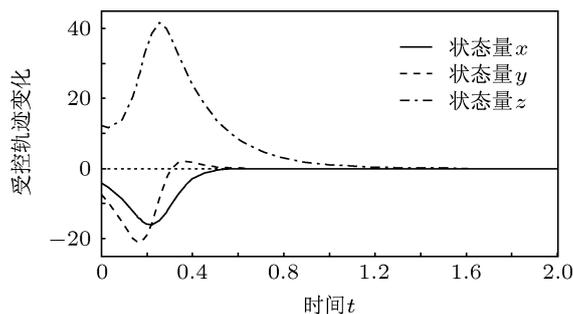


图 1 Lorenz 混沌系统单变量控制时状态轨迹随时间变化图

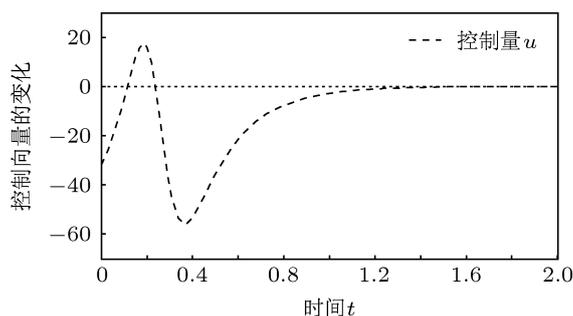


图 2 Lorenz 混沌系统单变量控制时控制量随时间变化图

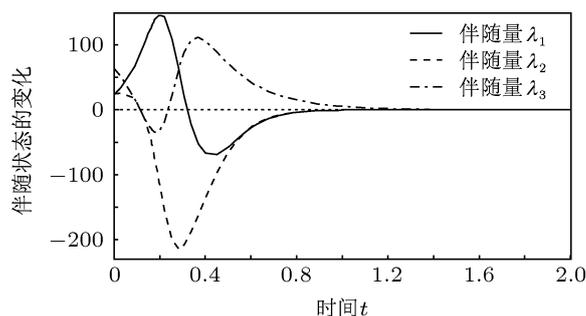


图 3 Lorenz 混沌系统单变量控制时伴随状态随时间变化图

#### 4.1.2 全变量最优控制

接着考虑对 Lorenz 系统进行全变量最优控制的仿真实验, 受控混沌系统的微分方程组表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) + u_1, \\ \dot{y} &= \gamma x - xz - y + u_2, \\ \dot{z} &= xy - bz + u_3. \end{aligned} \quad (18)$$

初始状态量  $(x_0, y_0, z_0)$  取为  $(10.6129, 13.5981, 25.8743)$ , 其是 Lorenz 系统混沌状态中一点. 性能指标采用 (3) 式所表示的目标泛函, 优化时间区间设置为  $t \in [0, 2]$ , 设定控制向量  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$  中三个分量的最小值和最大值分别都为  $-200$  和  $200$ . 图 4 至图 6 分别表示利用高斯伪谱方法求得的全变量最优控制时状态向量、控制量和伴随状态向量的数值解随时间的变化图. 从图中易知, 实施控制后所有

状态量很快稳定地收敛到零点,且全变量最优控制收敛速度明显快于单变量最优控制收敛速度;同时需要输入的控制向量也快速变为0,即没有造成控制能量的过多浪费.数值仿真结果表明了高斯伪谱方法求解 Lorenz 混沌系统全变量最优控制的有效性.图6表示的是 Lorenz 混沌系统全变量最优控制中伴随方程(16)式的数值解,伴随向量轨迹表示的是性能指标泛函关于不同受控混沌系统状态向量的敏感度(sensitivity),从图6中可知伴随量的变化具有一定的连续性和光滑性,从而保证控制向量不发生跃变,从而说明高斯伪谱方法的优点.另外,从图4和图6可知,GPM求得的状态向量和伴随向量数值解满足边界条件(7)式.总之,仿真结果表明了GPM求解 Lorenz 混沌系统全变量最优控制问题的有效性.

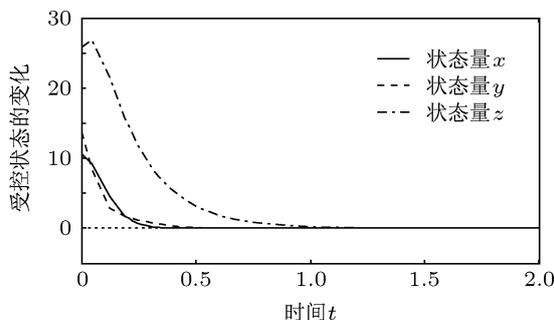


图4 Lorenz 混沌系统受控状态轨迹时间曲线图

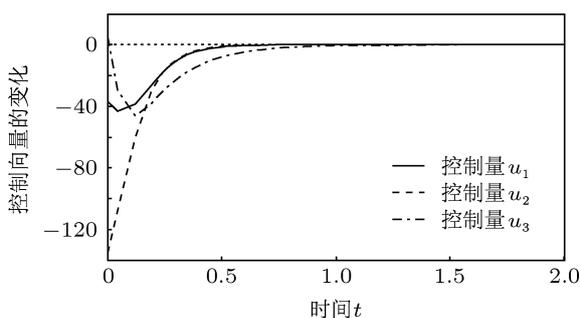


图5 Lorenz 混沌系统控制向量轨迹随时间变化图

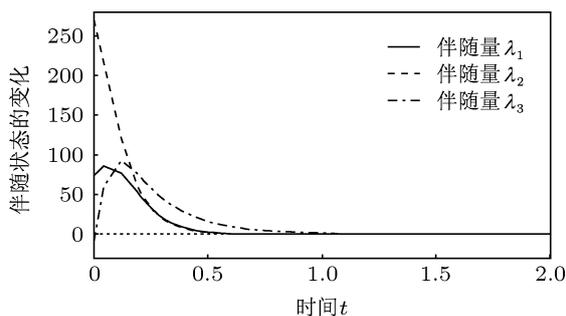


图6 Lorenz 混沌系统伴随向量随时间变化图

## 4.2 Chen 混沌系统的最优控制

本部分中以典型的混沌 Chen 系统为例,进一步说明利用高斯伪谱方法<sup>[20,21]</sup>对混沌系统进行最优控制的有效性.受控 Chen 混沌系统的数学模型可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + u_1, \\ \dot{y} &= (c-a)x - xz + cy + u_2, \\ \dot{z} &= xy - bz + u_3. \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in R^3$  为系统状态,  $a > 0, b > 0$  和  $c > 0$  为系统参数.对(19)式所表示的混沌系统,取参数  $a = 35, b = 3$  和  $c = 28$  时,系统处于具有吸引子的混沌状态.性能指标采用(3)式所表示的目标泛函,并设定  $R = I$  和  $Q = \text{diag}(1, 4, 20)$ , 其中  $I$  为三阶单位阵,  $\text{diag}(\cdot, \cdot, \cdot)$  为对角阵<sup>[3]</sup>.优化时间区间设置为  $t \in [0, 2]$ , 控制向量  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$  中三个分量的最小值和最大值分别都设为  $-200$  和  $200$ .由 Hamilton 函数的正则方程(6)式,可以得到 Chen 混沌系统最优控制的伴随方程表达式如下:

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_1 &= -a\lambda_1 + (c-a-z)\lambda_2 + y\lambda_3 - x, \\ -\dot{\lambda}_2 &= a\lambda_1 + c\lambda_2 + x\lambda_3 - 4y, \\ -\dot{\lambda}_3 &= -x\lambda_2 - b\lambda_3 - 20z, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|_{t=T} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

在数值仿真试验中模式初始状态量  $(x_0, y_0, z_0)$  取为  $(-10.4441, -9.3512, 25.4651)$ , 其是 Chen 系统混沌状态中一点.图7至图9分别表示利用高斯伪谱方法求得的 Chen 混沌系统最优控制时状态向量、控制量和伴随状态向量的数值解随时间的变化图.从图中易知,实施控制后所有状态量平稳地收敛到零点,收敛建立时间短,收敛精度高;同时需要输入的控制向量绝对值也快速变为0,没有造成控制能量的过多消耗.因此数值仿真结果表明了高斯伪谱方法求解 Chen 混沌系统最优控制的有效性.实际上,图9表示的是 Chen 混沌系统最优控制中伴随方程(20)式的数值解,伴随向量轨迹表示的是性能指标泛函关于不同状态向量的敏感度(sensitivity),从图9中可知伴随量的变化具有一定的连续光滑性,从而保证了控制向量不发生跃变,说明了高斯伪谱方法的优点.另外,从图7和图9可知,GPM求得的状态向量和伴随向量数值解显然满足边界条件(7)式.

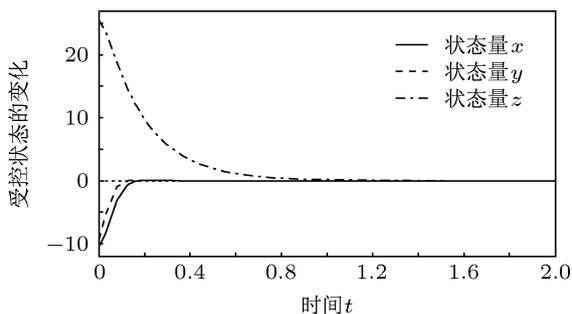


图7 Chen 混沌系统最优控制中状态轨迹时间曲线图

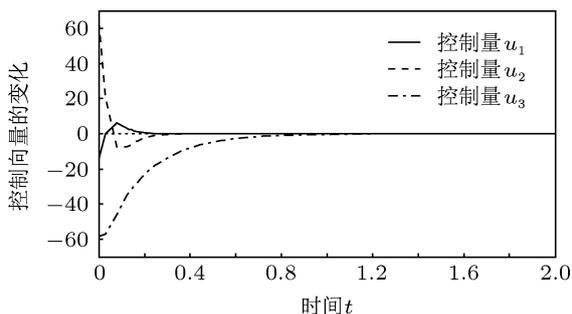


图8 Chen 混沌系统最优控制中控制向量随时间变化曲线图

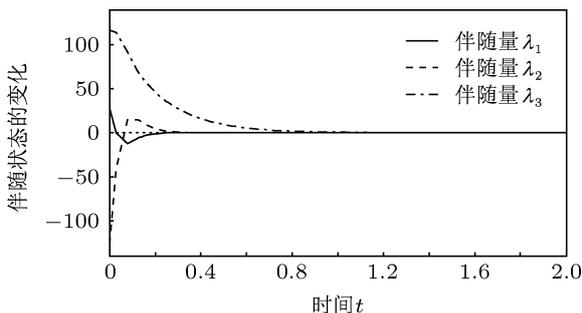


图9 Chen 混沌系统最优控制中伴随状态轨迹时间曲线图

### 4.3 Liu 混沌系统的最优控制

本部分中以典型的混沌 Liu 系统为例, 进一步验证利用高斯伪谱方法求解混沌系统最优控制问题的有效性. Liu 混沌系统是一类含有平方非线性项的混沌系统, 其受控混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + u_1, \\ \dot{y} &= bx - kxz + u_2, \\ \dot{z} &= -cz + hx^2 + u_3. \end{aligned} \quad (21)$$

当  $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1$  和  $h = 4$  时, 系统处于具有吸引子的混沌状态. 在数值仿真试验中模式初始状态量  $(x_0, y_0, z_0)$  取为  $(10.1462, 17.7803, 33.7267)$ , 其是 Liu 系统混沌状态中一点. 在目标泛函 (3) 式中设定  $R = I$  和  $Q = \text{diag}(2, 4, 20)$ , 其中  $I$  为三阶单位阵,  $\text{diag}(\cdot, \cdot, \cdot)$  为对角阵 [3]. 优

化时间区间设置为  $t \in [0, 2]$ , 控制向量  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$  分量的最小值和最大值分别都设为  $-200$  和  $200$ . 由 Hamilton 函数的正则方程 (6) 式, 可以得到 Liu 混沌系统最优控制的伴随方程表达式如下:

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_1 &= -a\lambda_1 + (b - kz)\lambda_2 + 2hx\lambda_3 - 2x, \\ -\dot{\lambda}_2 &= a\lambda_1 - 4y, \\ -\dot{\lambda}_3 &= -kx\lambda_2 - c\lambda_3 - 20z, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|_{t=T} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

图 10 至图 12 分别表示利用高斯伪谱方法 [20,21] 求得的 Liu 混沌系统最优控制时状态向量、控制向量和伴随状态向量的数值解随时间的变化图. 从图中易知, 实施控制后所有状态量平稳地收敛到零点, 收敛建立时间短, 收敛精度高; 同时需要输入的控制向量绝对值也快速变为 0, 从而没有造成控制器输入能量的过多浪费. 因此数值仿真结果表明了高斯伪谱方法求解 Liu 混沌系统最优控制的有效性. 图 12 表示的是 Liu 混沌系统最优控制中伴随方程 (22) 式的数值解, 伴随向量轨迹表示的是性能指标泛函关于不同时间状态向量的敏感度, 从图 12 中可知伴随量的变化具有一定的连续光滑性, 从而保证控制向量和状态向量不发生跃变, 说明了高斯伪谱方法的优点. 另外, 从图 10 和图 12 可知, GPM 求得的状态向量和伴随向量数值解满足边界条件 (7) 式.

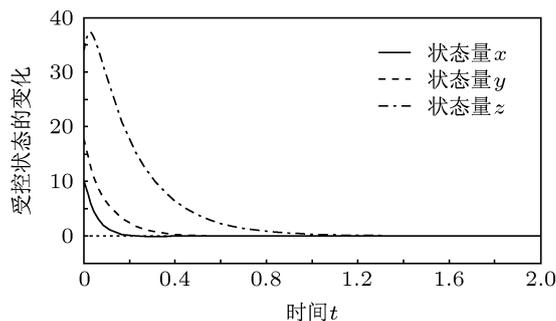


图10 Liu 混沌系统最优控制中状态轨迹时间曲线图

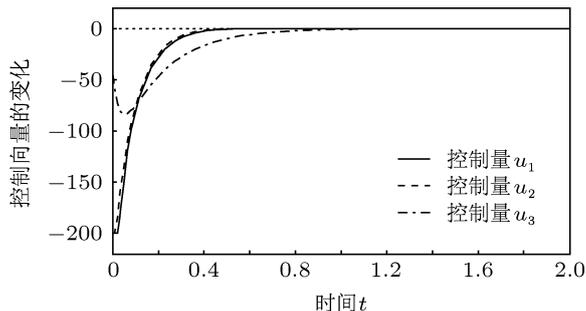


图11 Liu 混沌系统最优控制中控制向量随时间变化曲线图

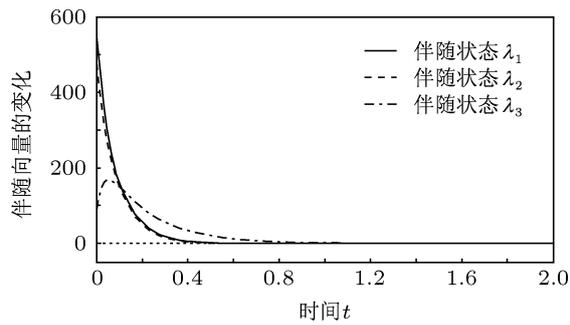


图 12 Liu 混沌系统最优控制中伴随状态轨迹时间曲线图

## 5 结论

本文利用高斯伪谱方法<sup>[20,21]</sup>的优点,提出了一种求解混沌系统最优控制问题的新方法. 首先建

立了一个性能指标泛函,引入伴随向量,并利用变分方法导出了受控混沌系统的伴随方程;其次在勒让德-高斯点上构造 Lagrange 插值多项式来近似表示混沌系统最优控制中的状态变量和控制变量,将连续空间的最优控制问题转化为非线性规划问题,并通过序列二次规划算法获得最优解;最后针对三个典型连续混沌系统进行了数值仿真实验,实验结果表明:无论是单变量最优控制还是全变量最优控制,新方法都能有效和快速地实现混沌系统的最优控制,同时具有避免求解 HJB 方程和满足最优控制一阶必要条件的优点. 新方法结合利用了高斯伪谱方法和序列二次规划算法的优点,可以广泛应用到其他复杂非线性动力学系统的最优控制问题求解中.

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Bernardo M D 1996 *Phys. Lett. A* **214** 7139
- [3] Zhu S P, Qian F C, Liu D 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2250 (in Chinese) [朱少平, 钱富才, 刘丁 2010 物理学报 **59** 2250]
- [4] Wang X Y, Wang M J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 0731 (in Chinese) [王兴元, 王明军 2008 物理学报 **57** 0731]
- [5] Liu D, Qian F C, Ren H P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2074 (in Chinese) [刘丁, 钱富才, 任海鹏 2004 物理学报 **53** 2074]
- [6] Zhang J S, Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2092 (in Chinese) [张家树, 肖先赐 2001 物理学报 **50** 2092]
- [7] Tan W, Wang Y N 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4087 (in Chinese) [谭文, 王耀南 2004 物理学报 **53** 4087]
- [8] Liu F C, Liang X M, Song J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1458 (in Chinese) [刘福才, 梁晓明, 宋佳秋 2008 物理学报 **57** 1458]
- [9] Chen L Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 900
- [10] Zhang S H, Shen K 2003 *Chin. Phys.* **12** 149
- [11] Sun F Y 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 32
- [12] Ma M, Zheng Y A, Hu F Y, Zhao L 2009 *Computer Simulation* **28** 409 (in Chinese) [马明, 郑永爱, 胡冯仪, 赵磊 2009 计算机仿真 **28** 409]
- [13] Rafikov M, Balthazar J M 2004 *Phys. Lett. A* **333** 241
- [14] Awad El-Gohary, Ammar Sarhan 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **30** 1122
- [15] Awad El-Gohary 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 345
- [16] Liu W, Chen G 2003 *Int. J. Bifurcation and chaos* **13** 261
- [17] Betts J T 1998 *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **21** 193
- [18] Bryson A E, Ho Y C 1975 *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control* (New York: John Wiley and Sons)
- [19] Kirk D E 2003 *Optimal Control Theory: An Introduction* (New York: Dover Publications)
- [20] Benson D A 2005 *Ph. D. Dissertation* (Massachusetts Institute of Technology, USA)
- [21] Rao A V, Benson D, Darby C, Patterson M A, Franconin C, Sanders I, Huntington G T 2010 *ACM Trans. Mathematical Software* **37** 1
- [22] Boggs P T, Jon W T 1995 *J. Comp. Appl. Math.* **124** 123
- [23] Philip E G 2005 *SIAM Review* **47** 99
- [24] Cao X Q, Song J Q, Zhang W M, Zhao J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070511 (in Chinese) [曹小群, 宋君强, 张卫民, 赵军 2011 物理学报 **60** 070511]
- [25] Cao X Q, Song J Q, Zhang W M, Zhu X Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080401 (in Chinese) [曹小群, 宋君强, 张卫民, 朱小谦 2011 物理学报 **60** 080401]
- [26] He J H 2008 *Int. J. Modern. Phys. B* **22** 3487
- [27] He J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 797
- [28] He J H 2001 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **2** 309
- [29] He J H, Lee E W M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1644
- [30] Peng H J, Gao Q, Wu Z G, Zhong W X 2011 *Acta Auto. Sin.* **37** 1248 (in Chinese) [彭海军, 高强, 吴志刚, 钟万勰 2011 自动化学报 **37** 1248]
- [31] Peng H J, Gao Q, Wu Z G, Zhong W X 2010 *Appl. Math. Mech.* **31** 1251
- [32] Gao Q, Peng H J, Wu Z G, Zhong W X 2010 *Journal of Dynamics and Control* **8** 1 (in Chinese) [高强, 彭海军, 吴志刚, 钟万勰 2010 动力学与控制学报 **8** 1]

# Optimal control for a chaotic system by means of Gauss pseudospectral method\*

Cao Xiao-Qun<sup>†</sup>

(School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 30 July 2013; revised manuscript received 6 September 2013)

## Abstract

A new numerical method is presented to solve optimal control problem of a chaotic system based on Gauss pseudospectral method (GPM). Firstly, the Lagrange interpolation polynomials are constructed on Legendre-Gauss nodes and used to parameterize the state and control the trajectories in optimal control of the chaotic system. Then, the chaotic optimal control problem in the continuous space is transformed into a nonlinear programming (NLP) problem through GPM. Furthermore, the NLP problem is solved by the sequential quadratic programming algorithm. Finally, the proposed method is applied to the optimal control of the typical Lorenz, Chen, and Liu chaotic systems respectively. The simulation processes indicate that the GPM is effective, fast and feasible for solving optimal control problems of chaotic systems.

**Keywords:** chaotic system, optimal control, Gauss pseudospectral method, nonlinear programming

**PACS:** 05.45.Gg, 45.20.Jj, 02.60.Pn

**DOI:** 10.7498/aps.62.230505

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41105063, 41375105).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn