

基于微分几何理论的参数失配系统时空同步研究*

谭平安^{1)†} 杨磊¹⁾ 张波²⁾

1) (湘潭大学信息工程学院, 湘潭 411105)

2) (华南理工大学电力学院, 广州 510640)

(2013 年 7 月 26 日收到; 2013 年 8 月 14 日收到修改稿)

本文采用状态反馈精确线性化方法, 实现了参数失配系统的时空同步控制. 引入微分几何理论, 首先采用李导数判定了参数失配系统的仿射模型是否满足状态精确线性化的充要条件, 通过非线性坐标变换得到了其线性解耦系统, 并结合线性最优控制理论确定了同步控制律, 数值仿真证实了该控制方法的有效性, 从非线性控制角度探索了混沌系统时空同步的新方法.

关键词: 时空同步, 微分几何, 精确线性化, 参数失配

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.230507

1 引言

时空混沌是时间和空间上都无序的复杂动力学行为, 广泛存在于空间延展系统中, 其产生的机理和其动力学规律一直是非线性科学中最重要的研究内容之一. 时空混沌系统的同步现象不仅广泛存在于自然界中, 而且在一些重要领域如物理学、信息科学、人体生命科学及工程等诸多领域具有潜在的应用价值^[1-3]. 为此, 时空混沌系统的同步研究已成为国内外该领域学者共同关注的方向之一. 然而, 由于系统内部结构和外界噪声干扰的影响, 时空混沌系统之间往往存在着参数的不匹配性. 因此, 研究参数失配的时空混沌系统之间的同步问题具有实际意义.

自从 1990 年 Pecora 和 Carroll 开始混沌同步的研究以来, 许多混沌同步方法相继被提出, 典型的主要有驱动响应法^[4], 变量耦合法^[5]以及延迟反馈法^[6-8], 但这些同步方法主要是针对时间混沌系统而设计的, 不能简单的扩展至更为复杂的时空混沌系统的同步控制中. 近几年来, 时空混沌的研究逐渐引起人们越来越多的关注, 滑模控制^[9,10]、鲁棒反演控制^[11]、自适应控制^[12]及状态反馈^[13,14]等

方法也逐渐应用到时空混沌系统的同步控制中, 但是大部分控制方法都是实现相同系统在不同的初始条件下达到同步或不同的自治系统之间的同步. 文献 [15, 16] 研究了两个具有参数失配的自治系统之间的同步, 而有关非自治系统之间的同步的研究相对较少. 最近, 文献 [17] 基于 Lyapunov 直接法和 Sylvester 准则研究了参数失配的受迫振动系统的同步判据, 然而构造 Lyapunov 函数具有一定难度, 至今仍未形成通用的实现方法. 为此, 本文拟运用微分几何理论的状态反馈精确线性化方法^[18,19]来探讨参数失配系统时空同步的问题. 与文献 [17] 不同, 该方法不需要构造 Lyapunov 函数, 在适当的非线性坐标变换下转化为线性系统过程中, 没有忽略掉任何高次非线性项, 并结合线性最优控制理论来确定同步控制律. 最后, 采用具有时空混沌行为的半导体漂移-扩散方程^[20]为对象开展研究, 验证了该方法的有效性.

2 混沌同步系统仿射模型

考虑时空混沌系统由下列半导体漂移-扩散方

* 国家自然科学基金 (批准号: 51207134)、国家自然科学基金重点项目 (批准号: 50937001) 和湖南省重点学科建设项目资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: tanpingan@xtu.edu.cn

程描述

$$\begin{aligned}\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2} + \frac{b-a(x,t)}{(b-a(x,t))^2+1} \\ &\quad - \zeta_1 a(x,t), \\ \frac{db}{dt} &= \omega(j_1 - b - \langle a \rangle),\end{aligned}\quad (1)$$

式中 t 为时间变量, x 为空间变量, $a(x,t)$ 、 b 为系统状态变量, $\langle a \rangle$ 为变量 $a(x,t)$ 在空间域内的平均值, ζ_1 , j_1 , ω 分别为系统的参数.

将 (1) 式作为目标系统, 相应的受控系统取为

$$\begin{aligned}\frac{\partial m(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 m(x,t)}{\partial x^2} + \frac{n-m(x,t)}{(n-m(x,t))^2+1} \\ &\quad - \zeta_2 m(x,t) + g_1 u_1 \\ \frac{dn}{dt} &= \omega(j_2 - n - \langle m \rangle) + g_2 u_2,\end{aligned}\quad (2)$$

式中 $m(x,t)$, n 为系统状态变量, $\langle m \rangle$ 为变量 $m(x,t)$ 在空间域内的平均值, ζ_2 , j_2 分别为系统的参数, u_1 和 u_2 为同步控制律, g_1 和 g_2 为增益系数.

首先, 假设受控系统没有施加控制信号, 选取以上系统的参数分别为 $\zeta_1 = 0.04$, $\zeta_2 = 0.05$, $\omega = 0.035$, 同时分别以 j_1 , j_2 为分岔参数, 分析了目标系统和受控系统中状态变量最小值 ($b_{\min}$ 和 $n_{\min}$) 的动力学行为. 如图 1 所示, 目标系统在分岔参数 $j_1 = 1.286$ 处出现分岔现象, 紧接着由倍周期分岔进入混沌; 而受控系统在 $j_2 = 1.243$ 时就出现分岔现象, 然后由倍周期分岔进入混沌, 同时还存在间歇性混沌现象. 由以上分析结果可知, 由于系统参数 $\zeta_1 \neq \zeta_2$, 目标系统和受控系统在 $j_1 = j_2$ 时其工作状态依然是不同步的. 因此, 需借助于有效的控制方法来加以抑制.

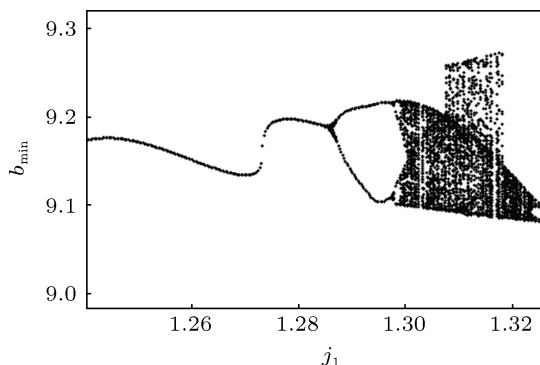


图1 目标系统分岔图

定义目标系统和受控系统的同步误差为

$$e_1 = n - b,$$

$$e_2 = \langle m \rangle - \langle a \rangle. \quad (3)$$

选取状态变量 $e = [e_1, e_2]^T$, 输入变量 $u = [u_1, u_2]^T$, 输出变量 $y = [y_1, y_2]^T$, 且定义

$$\begin{aligned}y_1 &= h_1(e) = e_1, \quad y_2 = h_2(e) = e_2, \\ d_1 &= \frac{n-m(x,t)}{(n-m(x,t))^2+1} - \zeta_2 m(x,t), \\ d_2 &= \frac{b-a(x,t)}{(b-a(x,t))^2+1} - \zeta_1 a(x,t),\end{aligned}$$

同时假设状态变量 $a(x,t)$ 已被镇定为空间均匀分布^[20], 可得系统仿射非线性模型为

$$\begin{aligned}\dot{e} &= f(e) + G(e)u, \\ y &= H(e),\end{aligned}\quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned}G(e) &= [g_1(e) \quad g_2(e)] = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}, \\ H(e) &= [h_1(e) \quad h_2(e)]^T, \\ f(e) &= \begin{bmatrix} -\omega(e_1 + e_2) \\ d_1 - d_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (5)$$

于是, 混沌同步问题转化为非线性系统 (4) 在原点处的渐近稳定问题. 为了实现目标系统和受控系统达到同步, 首先需分析系统 (4) 是否满足状态精确线性化的充要条件, 进而依据微分几何理论对系统控制律 u_1 和 u_2 进行合理设计, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 使得状态变量之间的误差 $e(t) \rightarrow 0$.

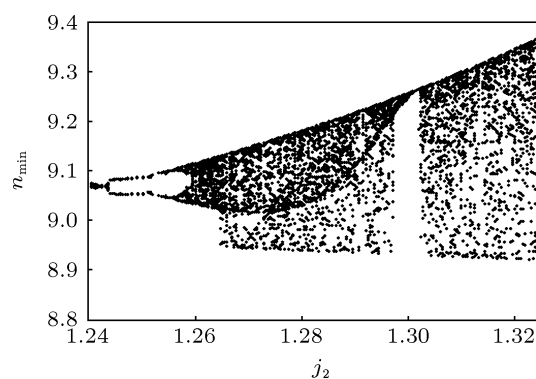


图2 受控系统分岔图

3 基于微分几何理论的同步机理

3.1 状态精确线性化条件验证

对于仿射非线性系统 (4), 假设状态变量 $e \in R^n$, 向量函数 $f \in R^n$, 系统平衡点为 e_0 , 矩阵 $G(e_0)$ 的

秩为 m , 状态精确线性化问题可解的充要条件是^[18]: 存在 m 维函数 $H(e) = [h_1(e), \dots, h_m(e)]^T$, 使得系统在 e_0 处有向量相对阶 $\{r_1, \dots, r_m\}$, 且 $r_1 + \dots + r_m = n$.

由定义可知, 系统的向量相对阶需要满足下面两个条件^[18]:

1) 对所有 e_0 邻域的 e 和所有 $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq m$, $0 \leq k < r_i - 1$, 满足

$$L_{g_j} L_f^k h_i(e) = 0. \quad (6)$$

2) 在 $e = e_0$ 处, 下面的 $m \times m$ 阵是非奇异的.

$$A = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(e) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(e) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(e) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(e) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

为求相对阶, 按此定义, 应当从 $k = 0$ 开始检查 $L_{g_j} L_f^k h_i(e)$ 值, 直到它不为零时为止. 把 $L_{g_j} L_f^k h_i(e)$ 首次不为零时的 k 值加 1 就是相对阶 r_i 的值.

首先, 当 $k = 0$ 时, 运用李导数求得

$$\begin{aligned} L_{g_1} h_1(e) &= g_1, \\ L_{g_2} h_1(e) &= 0, \\ L_{g_1} h_2(e) &= 0, \\ L_{g_2} h_2(e) &= g_2. \end{aligned} \quad (8)$$

同理有

$$\begin{aligned} L_f h_1(e) &= -\omega(e_1 + e_2), \\ L_f h_2(e) &= d_1 - d_2. \end{aligned} \quad (9)$$

由于 $L_{g_1} h_1(e) \neq 0$, $L_{g_2} h_2(e) \neq 0$, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}$ 是非奇异的, 可知系统 (4) 式的向量相对阶 $\{r_1, r_2\} = \{1, 1\}$, 系统总相对阶 $r = 1 + 1 = 2$, 等于系统的维数. 因此, 系统完全满足状态精确线性化的充要条件.

3.2 同步控制器设计

依据微分几何理论, 非线性坐标变换可定义为

$$z = [z_1 \quad z_2]^T = \Phi(e) = \begin{bmatrix} h_1(e) \\ h_2(e) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由此系统 (4) 式可转化为以新坐标系 $z = \Phi(e)$ 描述的完全可控的解耦系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(e) u_1 + L_f^{r_1} h_1(e) \\ L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(e) u_2 + L_f^{r_2} h_2(e) \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

为使其完全精确线性化, 令线性系统控制律

$$\begin{aligned} v &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(e) u_1 + L_f^{r_1} h_1(e) \\ L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(e) u_2 + L_f^{r_2} h_2(e) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

于是, (11) 式可变换为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 线性系统控制律 v 可用具有二次型性能指标的线性最优控制方法获得. 对于 (13) 式所示的线性系统可表达成

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t). \quad (14)$$

由线性系统最优控制原理可知, 其最优控制律

$$v(t) = -K^* z(t), \quad (15)$$

其中增益矩阵

$$K^* = R^{-1} B^T P^*, \quad (16)$$

式中 R 为权系数, P^* 为 Riccati 方程的

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (17)$$

的解. 文中选择权矩阵 Q 为单位矩阵及权系数 $R = 1$, 由 (16) 式和 (17) 式, 可得

$$\begin{aligned} v_1^* &= -z_1, \\ v_2^* &= -z_2. \end{aligned} \quad (18)$$

结合 (12) 式和 (18) 式, 可以得到用以实现目标系统与受控系统间时空同步的状态反馈控制律 u_1 和 u_2 为

$$u_1 = \frac{\omega(e_1 + e_2) - e_1}{g_1},$$

$$u_2 = \frac{d_2 - d_1 - e_2}{g_2}. \quad (19)$$

综上所述, 非线性系统反馈精确线性化理论的基本思路, 就是选择有效的非线性坐标变换 $z = \Phi(e)$ 和非线性状态反馈控制律 u , 从而使非线性系统得以在大范围甚至在全局范围内线性化.

4 仿真分析

为了验证以上控制方法的有效性, 对参数失配系统的时空同步控制进行了仿真分析. 选取系统参数为: $\zeta_1 = 0.04$, $\zeta_2 = 0.05$, $j_1 = j_2 = 1.32$, $\omega = 0.035$, 时间步长 $\Delta t = 0.001$, 空间节点数 $N = 40$.

图3为误差变量 e_1 的时域波形, 图4为误差变量 e_2 的时域波形. 由图可以看出, 当受控系统未施加同步控制时 ($t < 10000$), 误差变量 e_1 和 e_2 均不为零, 说明目标系统和受控系统状态变量之间工作不同步; 当施加同步控制后 ($t \geq 10000$), 误差变量 e_1 和 e_2 都迅速地减少到零, 同步效果明显, 与理论分析结果符合. 为了进一步说明受控系统是否在空间范围内也能很好地同步于目标系统, 图5给出了系统误差变量 $e_1(x, t)$ 的时空演化. 由图5可以看

出, 当受控系统未施加同步控制时, 由于目标系统和受控系统均处于混沌运行状态, 其状态变量 $a(x, t)$ 和 $m(x, t)$ 的演化轨迹无任何关联, 在空间范围内存在一定的偏差; 当施加同步控制器后, 受控系统状态变量 $m(x, t)$ 迅速地跟踪了目标系统中状态变量 $a(x, t)$ 的轨迹. 因此, 系统状态变量不仅实现了时域内的同步, 在空间范围内也是处于同步的.

图6和图7分别为控制律 u_1 和 u_2 的时域波形, 当目标系统和受控系统保持同步后, 其控制信号基本消失, 说明了该方法控制效果明显. 对比图6和图7, 可知控制信号 u_1 起主导作用, 研究发现仅将

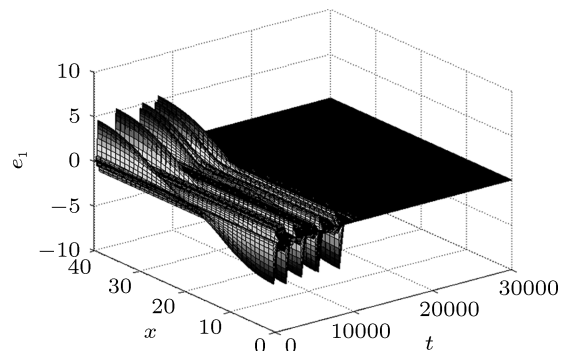


图5 变量 $e_1(x, t)$ 的时空演化

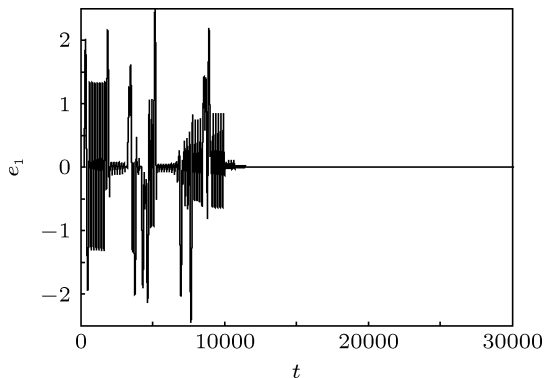


图3 误差变量 e_1 的时间演化

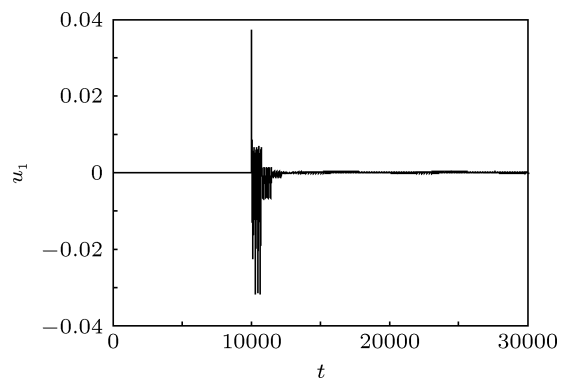


图6 控制律 u_1 波形

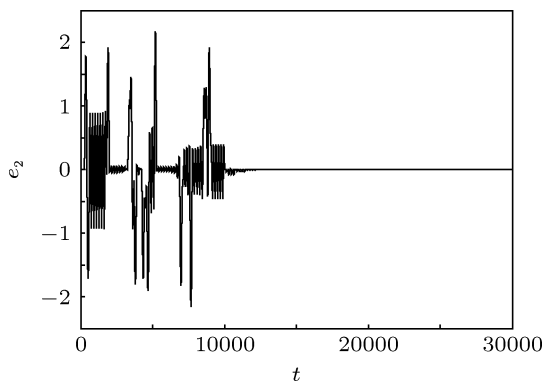


图4 误差变量 e_2 的时间演化

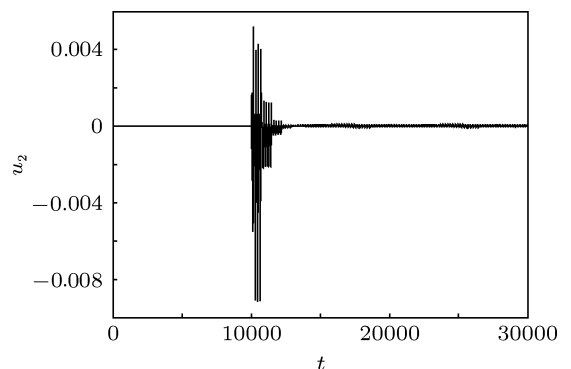


图7 控制律 u_2 波形

控制信号 u_1 施加于系统 (4) 式, 同样能达到很好地同步效果. 因此, 实际应用中可依据以上分析结论简化同步控制器的设计.

5 结 论

本文基于非线性微分几何理论, 以半导体漂移

- 扩散方程为研究对象, 提出了一种状态反馈精确线性化的同步控制器设计方法. 在建立参数失配时空混沌系统的非线性仿射模型基础上, 给出了判定系统精确线性化的方法和依据, 借助于非线性坐标变换设计了系统状态反馈控制律, 数值仿真结果证实了该控制方法的有效性, 该方法也可以推广至其他非线性系统的同步控制.

-
- [1] Lü L, Shang J Y, Zhu J B, Shen N, Liu S, Zhang X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 140504 (in Chinese) [吕翎, 商锦玉, 朱佳博, 沈娜, 柳爽, 张新 2012 物理学报 **61** 140504]
 - [2] Zhao Y B, Luo X S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6258 (in Chinese) [赵益波, 罗晓曙 2007 物理学报 **56** 6258]
 - [3] Yamada T, Graham R 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 1322
 - [4] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 - [5] Brandt S F, Dellen B K, Wessel R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 034104
 - [6] Pyragas K 2006 *Philos. T R Soc. A* **364** 2309
 - [7] Unkelbach J, Amann A, Just W, Schöll E 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026204
 - [8] Beck O, Amann A, Schöll E, Socolar J E, Just W 2002 *Phys. Rev. E* **66** 016213
 - [9] Vasegh N, Khellat F 2009 *Chaos Solitons and Fractals* **42** 1054
 - [10] Guan X P, He Y H 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 227
 - [11] Li H Y, Hu Y A 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 3904
 - [12] Han C Z, Li Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 666
 - [13] Zhou T S, Lü J H, Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12
 - [14] Wang Z, Zhao P D, Zhang X D 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 397
 - [15] Suykens J A K, Curran P F, Chua L O 1999 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **46** 841
 - [16] Wu X F, Cai J P, Zhao Y 2005 *IEEE Trans. Circ. Syst. II* **52** 429
 - [17] Wang J G, Cai J P, Ma M H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3367 (in Chinese) [王建根, 蔡建平, 马米花 2008 物理学报 **57** 3367]
 - [18] Li D P 2006 *Nonlinear control systems theory* (Harbin: Harbin engineering university press) p249 (in Chinese) [李殿璞 2006 非线性控制系统理论基础 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社) 第 249 页]
 - [19] Hu Y M 2005 *Nonlinear control systems theory and applications* (Beijing: National defense industry press) p21 (in Chinese) [胡跃明 2005 非线性控制系统理论与应用 (北京: 国防工业出版社) 第 21 页]
 - [20] Tan P A, Zhang B, Qiu D Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5299 (in Chinese) [谭平安, 张波, 丘东元 2010 物理学报 **59** 5299]

Spatio-temporal synchronization of parameter mismatch system based on differential geometry theory*

Tan Ping-An^{1)†} Yang Lei¹⁾ Zhang Bo²⁾

1) (College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

2) (College of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

(Received 26 July 2013; revised manuscript received 14 August 2013)

Abstract

A new nonlinear synchronization control strategy for a parameter mismatch system based on exact linearization via feedback is presented. First, a nonlinear affine model of parameter mismatch system is established, and the precondition of exact linearization is verified based on the differential geometry theory. Through the nonlinear coordinate transformation, the linear decoupling system is obtained, so the state feedback control law can be determined by the linear optimal control theory. It is found by simulation results that the proposed synchronization method based on exact linearization via feedback can ensure the successful control of the parameter mismatch system.

Keywords: spatio-temporal synchronization, differential geometry, exact linearization, parameter mismatch

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.230507

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51207134), the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50937001), and the Construct Program of the Key Discipline of Hunan Province, China.

† Corresponding author. E-mail: tanpingan@xtu.edu.cn