

一类含 Mathieu-Duffing 振子的相对转动系统的分岔和混沌*

侯东晓^{1)†} 赵红旭²⁾ 刘彬²⁾

1) (东北大学秦皇岛分校控制工程学院, 秦皇岛 066004)

2) (燕山大学信息科学与工程学院, 秦皇岛 066004)

(2013年8月17日收到; 2013年9月10日收到修改稿)

建立了一类具有 Mathieu-Duffing 振子的两质量相对转动系统的非线性动力学方程. 应用多尺度法求解该系统发生主共振-基本参数共振的分岔响应方程, 并通过奇异性分析得到系统稳态响应的转迁集. 利用 Melnikov 方法讨论系统在外扰动和参激扰动变化下的全局分岔和系统进入混沌状态的可能途径, 得到外激和参激幅值变化下系统可能出现多次通向混沌的道路, 获得系统发生混沌的必要条件. 最后采用数值方法验证了理论研究的有效性.

关键词: 相对转动, Mathieu-Duffing 振子, 混沌, Melnikov 方法

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.234501

1 引言

自 Carmeli 于 1995 年建立转动相对论力学理论^[1,2], 1996 年 Luo 建立了转动相对论系统的力学理论以来^[3,4], 转动相对论系统及其分岔和混沌的研究在各行各业得到了迅速发展. 文献 [5] 研究了在强迫周期力作用下具有三势阱 Duffing 系统的混沌和分岔. 文献 [6] 应用 Laguerre 正交多项式逼近法研究了具有随机双势阱 Duffing 系统的分岔和混沌特性. 文献 [7] 建立在外激和参激联合作用下的一个强非线性方程, 并研究了其参数的稳定性和全局分岔. 文献 [8—10] 求解一类具有非线性阻尼和强迫周期力作用下相对转动系统的稳定性、近似解和周期解. 文献 [11, 12] 研究了一类相对转动系统非线性动力学方程的混沌和控制. 文献 [13] 建立了一类具有时变刚度、非线性阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力系统, 并运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程的周期解.

本文研究了一类具有 Mathieu-Duffing 振子的

相对转动系统的分岔和混沌问题. 首先应用多尺度方法求解了该系统发生主共振-基本参数共振的分岔响应方程, 并通过奇异性理论得到了系统稳态响应的转迁集. 其次利用 Melnikov 方法讨论了系统在外激和参激幅值扰动变化下的全局分岔以及系统进入混沌状态的可能途径, 给出了系统发生混沌的必要条件. 最后采用数值方法验证了上述理论成果的有效性.

2 具有 Mathieu-Duffing 振子的相对转动非线性动力学方程

Mathieu-Duffing 系统是非线性动力学中典型的振动系统, 研究它的非线性动力学特征十分重要. Mathieu-Duffing 振子一般模型为 $(k_0 + k_1 \cos t)x + k_2 x^3$. 由于工程实际中三次刚度项同样存在参激扰动现象, 为了更加接近实际情况, 所以本文考虑一次刚度项和三次刚度项同时存在参激扰动的

* 国家自然科学基金 (批准号: 51105324, 51005196)、河北省科技支撑计划项目 (批准号: 13211907D) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: N110323008) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: houdongxiao1982@163.com

Mathieu-Duffing 振子, 其表达形式为

$$f(t) = K_1(t)x + K_2(t)x^3,$$

其中

$$\begin{aligned} K_1(t) &= K(t)\gamma, K_2(t) = K(t)\beta, \\ K(t) &= k_0^2 + k \cos \Omega_1 t. \end{aligned} \quad (1)$$

考虑具有上述 Mathieu-Duffing 振子的两质量相对转动系统, 该系统的动能为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2. \quad (2)$$

系统的势能为

$$U = \frac{1}{2} K_1(t) \theta^2 + \frac{1}{2} K_2(t) \theta^4. \quad (3)$$

系统的广义力为

$$Q_j = \sum_{i=1}^2 F_i^i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

其中 $J_i (i = 1, 2)$ 为该相对转动系统的转动惯量, $K_1(t)$ 为系统一次扭转刚度系数, $K_2(t)$ 为系统三次扭转刚度系数, $\theta_i (i = 1, 2)$, $\dot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 分别为系统的转角和转速. $F_i^i = T_i + F_i^c$, T_i 为广义外力, F_i^c 为系统广义阻尼. $q_j (j = 1, 2)$ 为广义坐标.

令

$$F_1^c = -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad F_2^c = -C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1),$$

则

$$F_1^1 = T_1 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad F_2^2 = T_2 - C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1),$$

其中 C 为线性阻尼系数, 将 (1) 式, (2) 式, (3) 式, (4) 式代入如下的 Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j, \quad (5)$$

得

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + K(t)\gamma(\theta_1 - \theta_2) + K(t)\beta(\theta_1 - \theta_2)^3 \\ + C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\theta}_2 + K(t)\gamma(\theta_2 - \theta_1) + K(t)\beta(\theta_2 - \theta_1)^3 \\ + C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = T_2, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\ddot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 为系统转动惯量的角加速度. 对于相对转动动力系统, 考虑相对转角的变化, (6) 式乘以 $\frac{1}{J_1}$ 减去 (7) 式乘以 $\frac{1}{J_2}$ 得到

$$(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} K(t)\gamma(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\begin{aligned} + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} K(t)\beta(\theta_1 - \theta_2)^3 \\ + \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 T_1 - J_1 T_2). \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$\ddot{x} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2, \quad \dot{x} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \quad x = \theta_1 - \theta_2,$$

$$F \cos \Omega_2 t = \frac{1}{J_1 J_2} (J_2 T_1 - J_1 T_2),$$

$$\mu = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} C, \quad \alpha = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1 J_2},$$

则方程转换为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu \dot{x} + \alpha(k_0^2 + k \cos \Omega_1 t)(\gamma x + \beta x^3) \\ = F \cos \Omega_2 t, \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式就是一类具有上述 Mathieu-Duffing 振子的两质量相对转动系统的动力学方程. 是进一步分析其分岔和混沌行为的基础.

3 系统主共振基本参数共振下分岔特性分析

考虑到上述系统为弱非线性系统, 将 (9) 式中非线性项冠以小参数 ϵ , 可得

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \epsilon \mu \dot{x} + \alpha k_0^2 \gamma x + \epsilon \alpha k_0^2 \beta x^3 \\ + \epsilon \alpha k \cos \Omega_1 t (\gamma x + \beta x^3) = \epsilon F \cos \Omega_2 t. \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$\omega_0^2 = \alpha k_0^2 \gamma,$$

则 (10) 式可写为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon F \cos \Omega_2 t - \epsilon \mu \dot{x} - \epsilon \alpha k_0^2 \beta x^3 \\ - \epsilon \alpha k \gamma x \cos \Omega_1 t - \epsilon \alpha k \beta x^3 \cos \Omega_1 t. \end{aligned} \quad (11)$$

采用多尺度方法, 设方程 (11) 的解形式为

$$x(t, \epsilon) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (12)$$

其中, $T_0 = t$ 为快变时间尺度, $T_1 = \epsilon t$ 为慢变时间尺度, 则有微分算子

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots \quad (14)$$

其中 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$, $n = (0, 1)$.

为分析系统的主共振 - 基本参数共振, 设 $\omega_0 = \Omega_1 + \epsilon \sigma$, $\Omega_2 = \Omega_1$, σ 为调谐参数, 将 (12) 式,

(13) 式和 (14) 式代入方程 (11), 可得到各阶近似的线性偏微分方程组

$$D_0^2 x_0 + \Omega_1^2 x_0 = 0, \quad (15)$$

$$D_0^2 x_1 + \Omega_1^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \mu D_0 x_0 - \alpha k_0^2 \beta x_0^3 - 2\Omega_1 \sigma x_0 - \alpha k \gamma x_0 \cos \Omega_1 t - \alpha k \beta x_0^3 \cos \Omega_1 t + F \cos \Omega_2 t. \quad (16)$$

令

$$x_0 = A(T_1) e^{i\Omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\Omega_1 T_0}, \quad (17)$$

其中, \bar{A} 为 A 的共轭复数, 将 (17) 式代入 (16) 式, 得到

$$D_0^2 x_1 + \Omega_1^2 x_1 = -i2\Omega_1 D_1 A e^{i\Omega_1 T_0} - i\mu \Omega_1 A e^{i\Omega_1 T_0} - 3\alpha k_0^2 \beta A^2 \bar{A} e^{i\Omega_1 T_0} - 2\Omega_1 \sigma A e^{i\Omega_1 T_0} + \frac{F}{2} e^{i\Omega_1 T_0} + \text{c.c.},$$

其中, c.c. 表示等式右端函数的共轭复数部分, 消除久期项并移项, 则有

$$D_1 A = -\frac{1}{2} \mu A + i \frac{3}{2} \alpha k_0^2 \beta A^2 \bar{A} + i \sigma A - i \frac{F}{4\Omega_1}. \quad (18)$$

令 $A = \frac{1}{2} a e^{i\theta}$, 将其代入 (18) 式, 分离实部和虚部, 得

$$\begin{aligned} & \dot{a} \cos \theta - a \dot{\theta} \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} \mu a \cos \theta - \frac{3}{8} \alpha k_0^2 \beta a^3 \sin \theta - \sigma a \sin \theta \\ & \dot{a} \sin \theta + a \dot{\theta} \cos \theta \\ &= -\frac{1}{2} \mu a \cos \theta + \frac{3}{8} \alpha k_0^2 \beta a^3 \sin \theta - \sigma a \cos \theta \\ & \quad - \frac{F}{2\Omega_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

由 (19) 式可得极坐标形式下的平均方程为

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{1}{2} \mu a - \frac{F}{2\Omega_1} \sin \theta, \\ a \dot{\theta} &= \frac{3}{8} \alpha k_0^2 \beta a^3 + \sigma a - \frac{F}{2\Omega_1} \cos \theta. \end{aligned} \quad (20)$$

考虑到稳态时, 存在 $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$, 将其代入 (20) 式并消掉 θ , 可得系统主共振-基本参数共振的分岔响应方程为

$$b_1 a^6 + b_2 a^4 + b_3 a^2 - b_4 = 0, \quad (21)$$

其中 $b_1 = \frac{9}{64} \alpha^2 k_0^4 \beta^2$, $b_2 = \frac{3}{4} \alpha \sigma k_0^2 \beta$, $b_3 = \frac{1}{4} \mu^2 + \sigma^2$, $b_4 = \frac{F^2}{4\Omega_1^2}$.

将 (21) 式两边同时除以 b_1 , (21) 式可写为

$$a^6 + \alpha_0 a^4 + \beta_0 a^2 - \gamma_0 = 0. \quad (22)$$

将 (22) 式乘以 a , 可写为如下形式:

$$a^7 + \alpha_0 a^5 + \beta_0 a^3 - \gamma_0 a = 0. \quad (23)$$

根据奇异性理论, (23) 式是 $a^7 - \gamma_0 a = 0$ 的普适开折, 它的 Z_2 对称余维数为 2. 此时系统的转迁集如下:

1) 分岔点集:

$$B_0(Z_2) = B_1(Z_2) = \emptyset \quad (\emptyset \text{ 为空集});$$

2) 滞后点集:

$$\begin{aligned} H_0(Z_2) &= \{\beta_0 = 0\}, \\ H_1(Z_2) &= \left\{ \beta_0 = \frac{\alpha_0^2}{3}, \alpha_0 \leq 0 \right\}; \end{aligned}$$

3) 双极限点集:

$$D(Z_2) = \left\{ \beta_0 = \frac{\alpha_0^2}{4}, \alpha_0 \leq 0 \right\};$$

4) 转迁集:

$$\Sigma = B_0 \cup B_1 \cup H_0 \cup H_1 \cup D.$$

图 1 为取不同开折参数 α_0, β_0 时系统的转迁集. 在该图中, 系统的转迁集将平面分成了 (1), (2), (3), (4) 四个不同的区域. 在不同区域中, 解的拓扑结构是不同的, 但是在同一区域中, 即使分岔参数变化, 其分岔图也将保持同一拓扑结构, 这样的分岔图为保持的; 而在区域边界, 分岔情况为非保持的. 图 2 为对应不同的参数下系统的分岔拓扑结构图. 其中 (1) 区不存在幅值的跳跃现象. (2), (3), (4) 区中一个 γ_0 对应于多个 a , 所以此三个区域会出现幅值的跳跃现象.

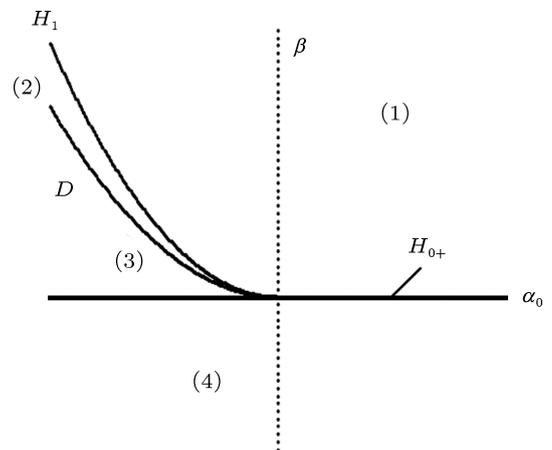


图 1 转迁集

4 系统混沌运动分析

Melnikov 方法^[14-17]的基本思想是将动力系统归结为平面上的一个 Poincare 映射, 研究该映射是否存在横截同宿轨道或者异宿轨道的数学条件, 从而得出映射是否具有 Smale 马蹄意义下的混沌运动.

4.1 系统的异宿轨道求解

令 $\dot{x} = y$, 则 (9) 式可以写如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha k_0^2 \gamma x - \alpha k_0^2 \beta x^3 - \alpha k \cos \Omega_1 t (\gamma x + \beta x^3) \\ &\quad - \mu y + F \cos \Omega_2 t. \end{aligned} \quad (24)$$

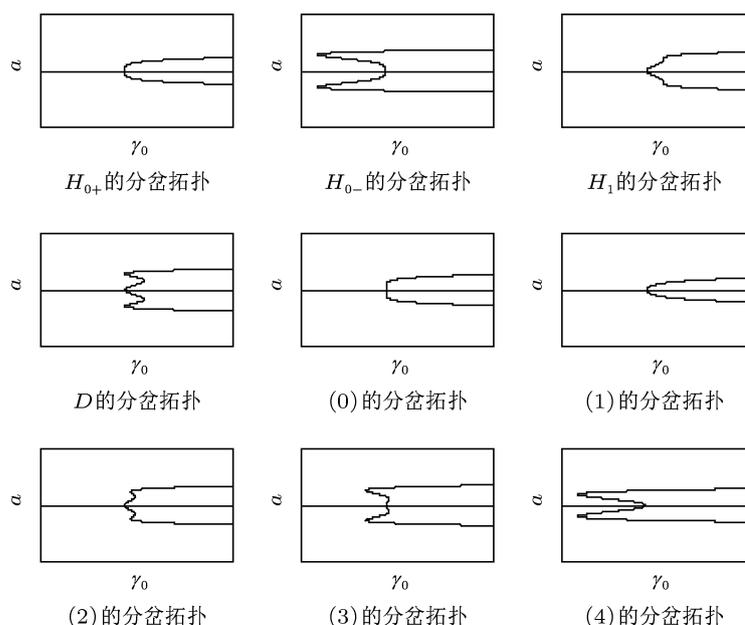


图2 分岔拓扑结构

非线性项前冠以小参数 ζ , 则 (24) 式可以化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha k_0^2 \gamma x - \alpha k_0^2 \beta x^3 + \zeta (-\alpha k \cos \Omega_1 t (\gamma x \\ &\quad + \beta x^3) - \mu y + F \cos \Omega_2 t). \end{aligned} \quad (25)$$

当 $\zeta = 0$ 时, 系统为一 Hamilton 系统, 如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha k_0^2 \gamma x - \alpha k_0^2 \beta x^3. \end{aligned} \quad (26)$$

其 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \alpha k_0^2 \gamma x^2 + \frac{1}{4} \alpha k_0^2 \beta x^4 \\ &= h. \end{aligned} \quad (27)$$

令 $\dot{x} = \dot{y} = 0$, 则由 (26) 式可得系统的不动点为

- 1) 当 $\beta\gamma < 0$ 时, 有三个不动点 $(0, 0)$, $\left(\pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}}, 0\right)$;
- 2) 当 $\beta\gamma > 0$ 时, 有一个奇点 $(0, 0)$.

在本文中我们只研究情况 1), 令 $\gamma > 0, \beta < 0$, 则 $(0, 0)$ 是中心点, $\left(\pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}}, 0\right)$ 是双曲鞍点;

当 $H\left(\pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}}, 0\right) = -\frac{\alpha k_0^2 \gamma^2}{4\beta}$, 存在两条连接鞍点 $\left(\pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}}, 0\right)$ 的异宿轨道 $q_i^0(t)$.

异宿轨道可以用下式求解:

$$\begin{aligned} H\left(\pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}}, 0\right) &= \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \alpha k_0^2 \gamma x^2 + \frac{1}{4} \alpha k_0^2 \beta x^4 \\ &= -\frac{\alpha k_0^2 \gamma^2}{4\beta}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\dot{x} = y. \quad (28)$$

由 (28) 式可解得

$$x(t) = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{2\alpha\gamma}}{2} k_0 t\right). \quad (29)$$

将 (29) 式求导, 可得

$$y(t) = \pm \frac{k_0 \gamma}{2} \sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2\alpha\gamma}}{2} k_0 t\right). \quad (30)$$

此时可得到两条异宿轨道的参数方程为

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{2\alpha\gamma}}{2} k_0 t \right), \\ y(t) &= \pm \frac{k_0 \gamma}{2} \sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2\alpha\gamma}}{2} k_0 t \right). \end{aligned} \quad (31)$$

4.2 混沌预测

根据 Melnikov 函数的定义, 利用 (31) 式则可以得到扰动作用下异宿轨道的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) [-\alpha k \cos \Omega_1(t+t_0)(\gamma x(t) \\ &\quad + \beta x^3(t)) - \mu y(t) + F \cos \Omega_2(t+t_0)] dt \\ &= -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \pm \alpha k \gamma \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) \sin \Omega_1 t \sin \Omega_1 t_0 dt \\ &\quad \pm \alpha k \beta \int_{-\infty}^{+\infty} x^3(t)y(t) \sin \Omega_1 t \sin \Omega_1 t_0 dt \\ &\quad \pm F \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cos \Omega_2 t \cos \Omega_2 t_0 dt \\ &= -\mu I_1 \pm \alpha k \gamma I_2 \sin \Omega_1 t_0 \\ &\quad \pm \alpha k \beta I_3 \sin \Omega_1 t_0 \pm F I_4 \cos \Omega_2 t_0 \\ &= -\mu I_1 \pm \sqrt{(\alpha k \gamma I_2 + \alpha k \beta I_3)^2 + (F I_4)^2} \\ &\quad \times \sin(\Omega_2 t_0 + r), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = -\frac{2\gamma k_0 \sqrt{2\alpha\gamma}}{3\beta}, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) \sin \Omega_1 t dt \\ &= -\frac{8\pi}{\alpha\beta k_0^2} \cosh \left(\frac{\pi}{k_0} \sqrt{\frac{2}{\alpha\gamma}} \right), \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3(t)y(t) \sin \Omega_1 t dt \\ &= \frac{8\pi}{3\sqrt{\alpha}\beta^2 k_0} \left(\frac{4}{\alpha k_0^2 \gamma} - 1 \right) \cosh \left(\frac{\pi}{k_0} \sqrt{\frac{2}{\alpha\gamma}} \right), \\ I_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cos \Omega_2 t dt \\ &= \frac{\Omega_2 \pi}{k_0} \sqrt{-\frac{2}{\alpha\beta}} \cosh \left(\frac{\pi \Omega_2}{2k_0} \sqrt{\frac{2}{\alpha\gamma}} \right), \\ r &= \arctan \frac{F I_4}{\alpha k \gamma I_2 + \alpha k \beta I_3}. \end{aligned}$$

当 Melnikov 函数出现简单零点时, 在庞加莱影像上双曲不动点的稳定流行和不稳定流行出现

横截异宿交点, 即 $M_{\pm}(t_0)$ 有简单零点时, 系统出现 smale 马蹄意义下的混沌. 故在主共振 - 基本参数共振情况下, 即 $\Omega_1 = \Omega_2 = \sqrt{\alpha k_0^2 \gamma}$, 当满足下式时:

$$\begin{aligned} \sup(M_{\pm}(t_0)) &> 0, \\ \inf(M_{\pm}(t_0)) &< 0, \end{aligned}$$

即 $\min < \mu I_1 < \max$, 其中

$$\begin{aligned} \max &= \max_{t_0 \in (0, T)} \left[\pm \sqrt{(\alpha k \gamma I_2 + \alpha k \beta I_3)^2 + (F I_4)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\Omega_2 t_0 + r) \right], \\ \min &= \min_{t_0 \in (0, T)} \left[\pm \sqrt{(\alpha k \gamma I_2 + \alpha k \beta I_3)^2 + (F I_4)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\Omega_2 t_0 + r) \right], \\ T &= \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\gamma} k_0}, \end{aligned}$$

存在使得 $M_{\pm}(t_0) = 0$ 和 $\frac{\partial M_{\pm}(t_0)}{\partial t_0} \neq 0$ 成立的 $t_0 \in (0, T)$, 对于充分小的 ζ , 系统可发生 smale 马蹄意义下的混沌行为.

5 数值仿真

针对 (25) 式的方程, 取 $\alpha k_0^2 \gamma = 4$, $\alpha k_0^2 \beta = -4$, $\Omega_1 = \Omega_2 = 2$, 小参数 $\xi = 0.01$, 初值取 $(-0.6, 0.9)$, 以下分别研究系统随着系统外激和参激幅值变化下系统的混沌特性.

5.1 外激幅值 ζF 变化时系统的分岔特性和通向混沌的途径

当 $\zeta \alpha k \gamma = 1$, $\zeta \alpha k \beta = -1$, $\zeta \mu = 0.5$ 时, 系统随着 ζF 变化的分岔图和 Lyapunov 指数分别如图 3 和图 4 所示.

由分岔图 (图 3) 和 Lyapunov 指数 (图 4) 可知, 外激幅值变化时系统通向混沌的途径为: 周期运动 \rightarrow 多次混沌与周期运动交替 \rightarrow 经过倍周期分岔到拟周期运动直至混沌状态. 在图 3 中, 当 ζF 处于 1.32—1.38 时, 系统为稳定的周期运动, 此时在图 4 中对应的 Lyapunov 指数小于零. 当 ζF 处于 1.37—1.4, 系统将出现多次密集的混沌与周期运动, 此时 Lyapunov 指数在这个区域出现多次正数与负数. 当 $\zeta F = 1.415$ 时, 图 5(a) 相轨迹为一条自相交八轨道封闭曲线, 系统经过倍周期分岔演化为周期

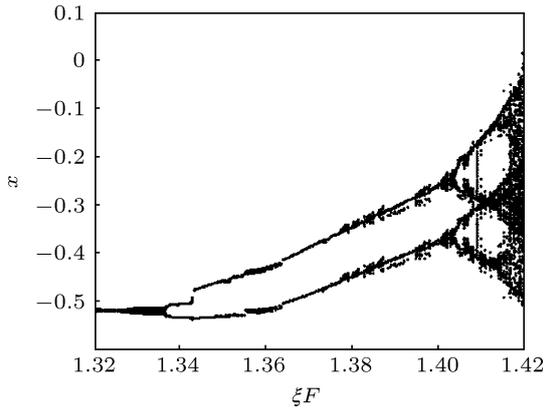


图3 分岔图

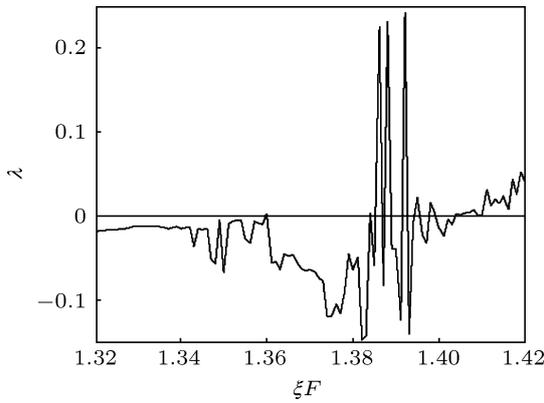


图4 ζF 变化的最大 Lyapunov 指数

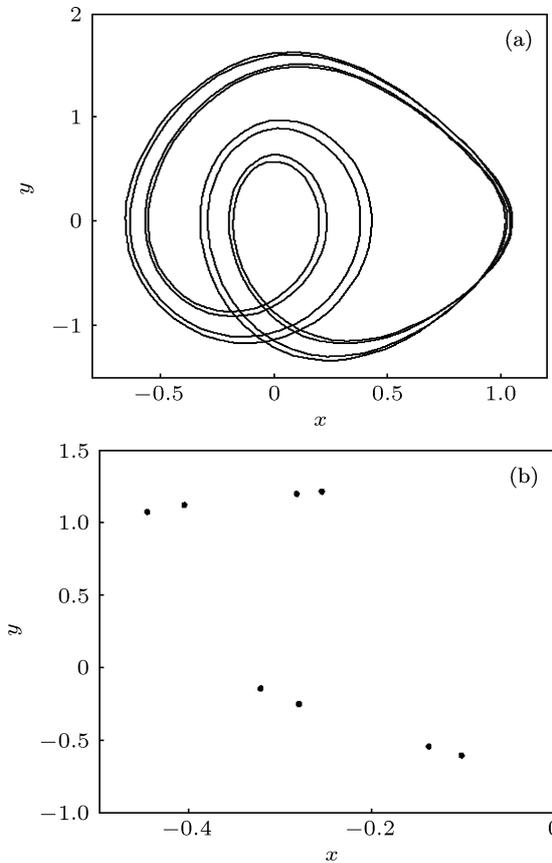


图5 $\zeta F = 1.415$ 时系统相轨迹和 Poincare 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincare 截面

8 运动. 当 $\zeta F = 1.42$ 时, 图 6 为系统出现混沌运动的时间历程图、相轨迹和 Poincare 截面, 此时可看出图 6(a) 中的时间历程图杂乱无章, 图 6(b) 系统相轨迹互不重叠, 相互缠绕, 图 6(c) 中的 Poincare 截面反映出系统具有混沌吸引子, 而此时图 4 中对应的 Lyapunov 指数为正, 以上特征说明系统处于混沌状态.

5.2 参激幅值 $\zeta \alpha k$ 变化时系统的分岔特性和通向混沌的途径

当 $\gamma = 1, \beta = -1, \zeta \mu = 0.5, \zeta F = 1.42$, 可得系

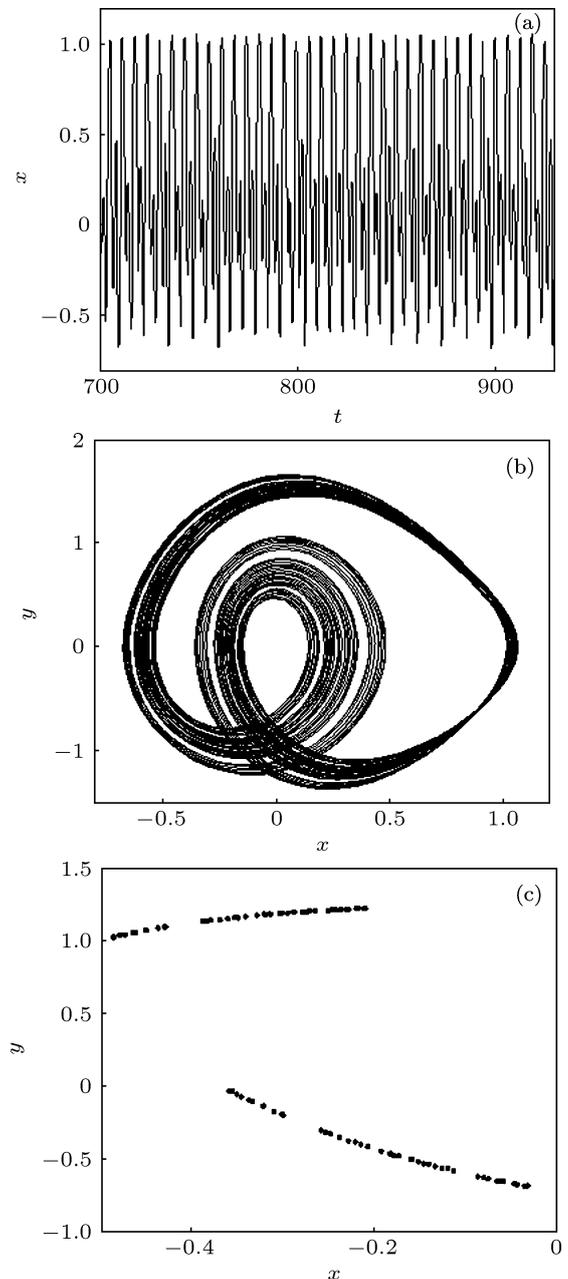


图6 $\zeta F = 1.42$ 时系统的时间历程图、相轨迹和 Poincare 截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincare 截面

统随着参激幅值 $\zeta\alpha k$ 变化的分岔图和 Lyapunov 指数图. 随着参激幅值 $\zeta\alpha k$ 的变化, 系统产生多次通向混沌的道路, 并最终进入完全混沌状态.

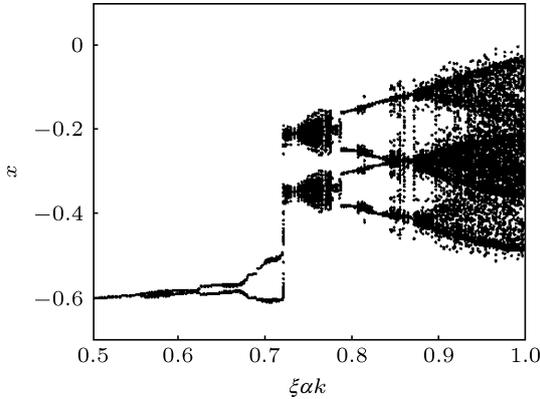


图7 分岔图

5.2.1 $\zeta\alpha k$ 处于 0.5—1 区间时系统通向混沌的过程研究

由分岔图(图7)和 Lyapunov 指数(图8)可知, $\zeta\alpha k$ 处于 0.5—1 区间参激幅值变化系统通向混沌的途径为: 周期运动 \rightarrow 混沌混沌 \rightarrow 退化为周期 2 \rightarrow 混沌运动 \rightarrow 退化为周期 6 \rightarrow 经过倍周期分岔而进入混沌状态.

在图7中, 当 $\zeta\alpha k$ 处于 0.5—0.7 区间时, 系统处于稳定的周期运动状态, 此时图8中对应于 Lyapunov 指数为负数. 当 $\zeta\alpha k = 0.72$ 附近系统出现跳跃分岔之后嵌入混沌状态. 当 $\zeta\alpha k = 0.732$ 时, 系统从混沌运动退化为周期 2 运动, 其对应的相轨迹和 Poincare 截面如图9所示.

当 $\zeta\alpha k = 0.7625$, 系统再次出现混沌运动, 其对应的相轨迹如图10(b)所示, 可以看出此时的相轨迹互不重叠, 相互缠绕, 图10(b)为对应的 Poincare 截面, 可以看出其具有复杂的混沌吸引子, 此时图8

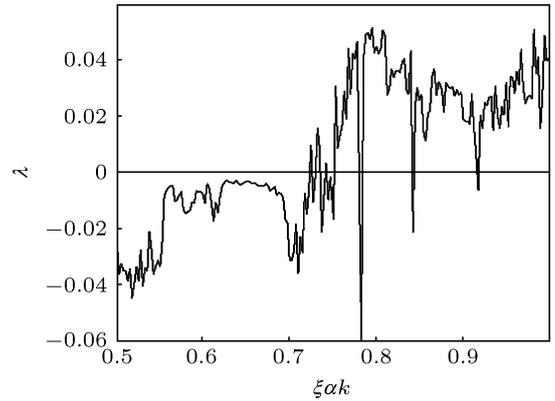


图8 $\zeta\alpha k$ 变化的最大 Lyapunov 指数

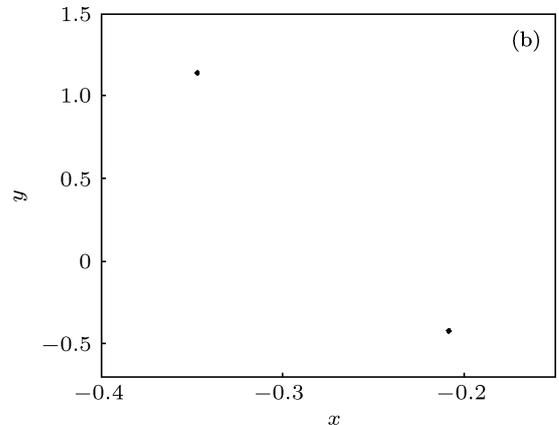
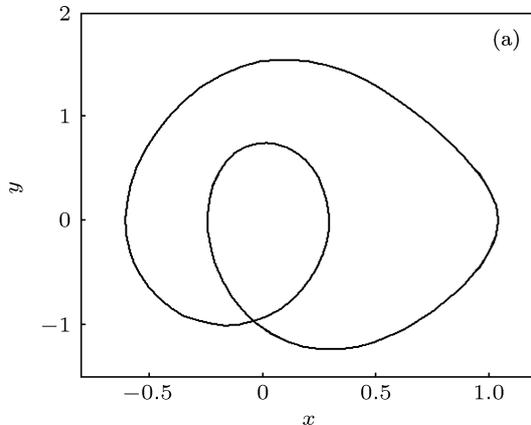


图9 $\zeta\alpha k = 0.732$ 时系统相轨迹和 Poincare 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincare 截面

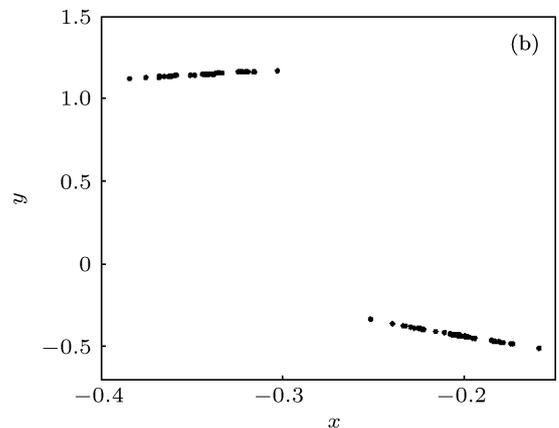
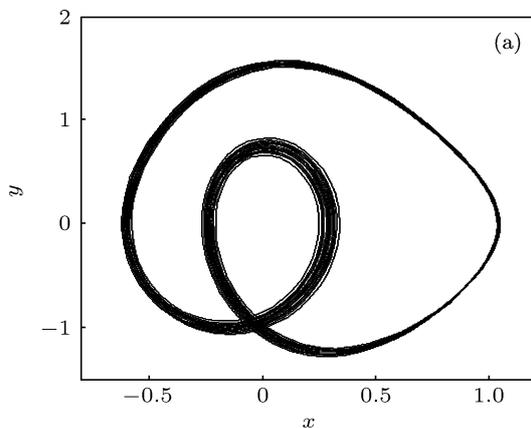


图10 $\zeta\alpha k = 0.7625$ 时系统相轨迹和 Poincare 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincare 截面

中对应的 Lyapunov 指数为正, 以上特征说明系统处于混沌状态. 当 $\zeta\alpha k$ 处于 0.7625—0.95 区间, 其对应的 Lyapunov 指数出现 3 次负数脉冲, 说明系统将出现 3 次周期运动. 其中当 $\zeta\alpha k = 0.778$ 时, 系统从混沌运动退化为周期 6 运动, 其对应的相轨迹和 Poincare 截面如图 11 所示.

当 $\zeta\alpha k = 1$ 时, 其对应相轨迹和 Poincare 截面如图 12 所示, 此时图 8 中 Lyapunov 指数为正, 说明

系统处于混沌状态.

5.2.2 $\zeta\alpha k$ 处于 4.4—6.6 区间时通向混沌的过程研究

由分岔图 (图 13) 和 Lyapunov 指数 (图 14) 可知, $\zeta\alpha k$ 处于 4.4—6.6 区间参激幅值变化系统通向混沌的途径为: 周期运动 → 阵发性混沌混沌 → 退化为周期 3 → 混沌运动 → 阵发性混沌 → 退化为周期 4 → 经过倍周期分岔而进入混沌状态.

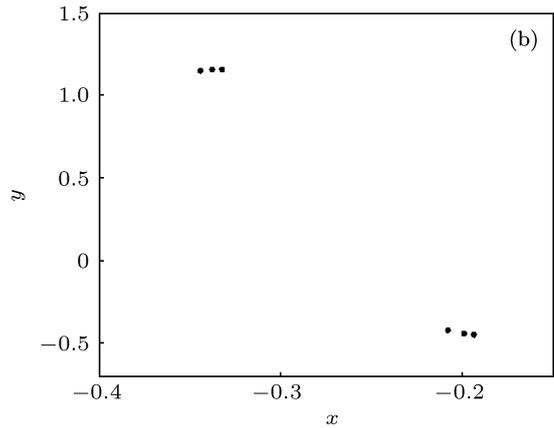
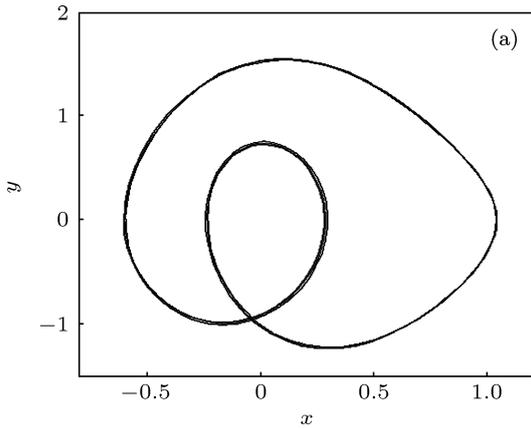


图 11 $\zeta\alpha k = 0.778$ 时系统相轨迹和 Poincare 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincare 截面

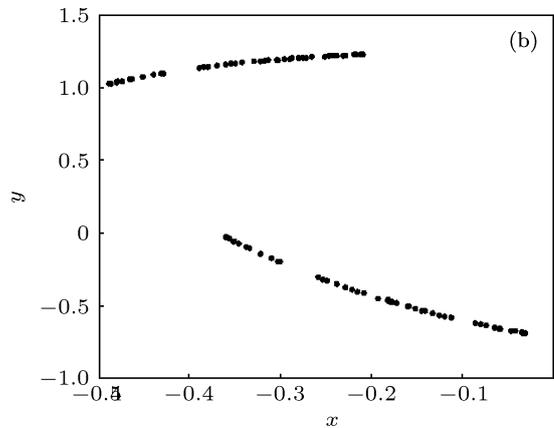
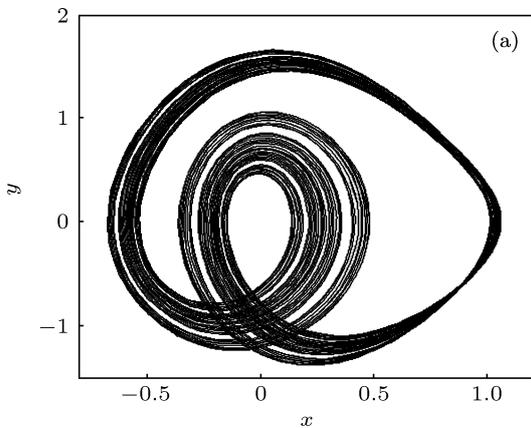


图 12 $\zeta\alpha k = 1$ 时系统相轨迹和 Poincare 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincare 截面

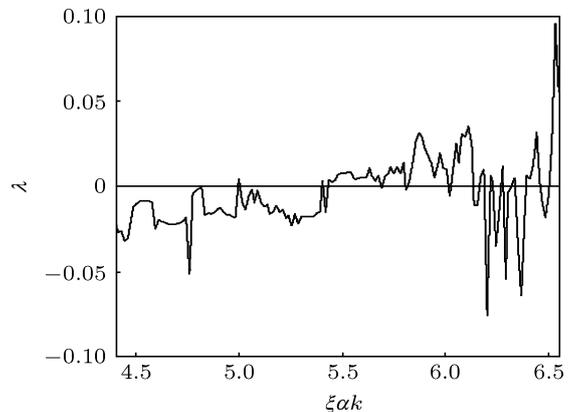
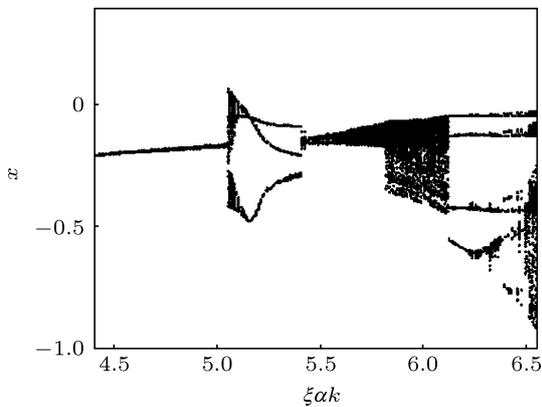


图 13 分岔图

图 14 $\zeta\alpha k$ 变化的最大 Lyapunov 指数

当 $\zeta\alpha k$ 处于 4.4—5 区间时, 对应的 Lyapunov 指数 (图 14) 为负数, 说明系统为周期运动. 紧接着系统在 $\zeta\alpha k = 5$ 附近产生一次阵发性混沌, 然后产生切分岔, 当 $\zeta\alpha k = 5.16$, 由图 15(a), (b) 可知系统退化为周期 3 运动, 周期 3 运动意味着混沌. 之后系统经过跳跃分岔, 在 5.4—6.0 区间处于混沌状态. 当 $\zeta\alpha k = 5.8$ 时, 在图 16 中, 图 16(a) 系统时间历程杂乱无章, 图 16(b) 系统相轨迹互不重叠, 相互缠绕, 图 16(c) 庞加莱截面出现混沌吸引子, 此时图 14 中 Lyapunov 指数为正, 以上特征都说明了系统处于混沌状态.

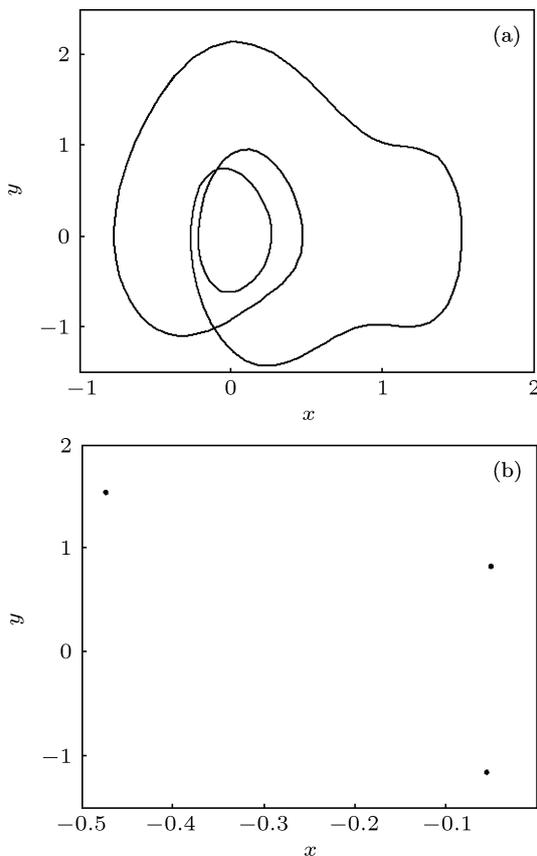


图 15 $\zeta\alpha k = 5.16$ 时系统相轨迹和 Poincaré 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincaré 截面

当 $\zeta\alpha k$ 处于 6.0—6.2 区间时, 系统再次发生阵发性混沌, 并伴随着切分岔和跳跃分岔的出现, 此后系统经过多次倍周期分岔而最终进入混沌状态. 当 $\zeta\alpha k = 6.125$ 时, 由图 17 中的相轨迹和 Poincaré 截面可知系统退化为周期 4 运动.

当 $\zeta\alpha k = 6.6$ 时, 图 18 为系统出现混沌运动的时间历程图、相轨迹和 Poincaré 截面, 此时可看出图 18(a) 中的时间历程图杂乱无章, 图 18(b) 系统相轨迹出现杂乱状态, 图 18(c) 中的 Poincaré 截面出现混沌吸引子, 而此时图 14 中对应的 Lyapunov 指数为正, 以上特征说明系统处于混沌状态.

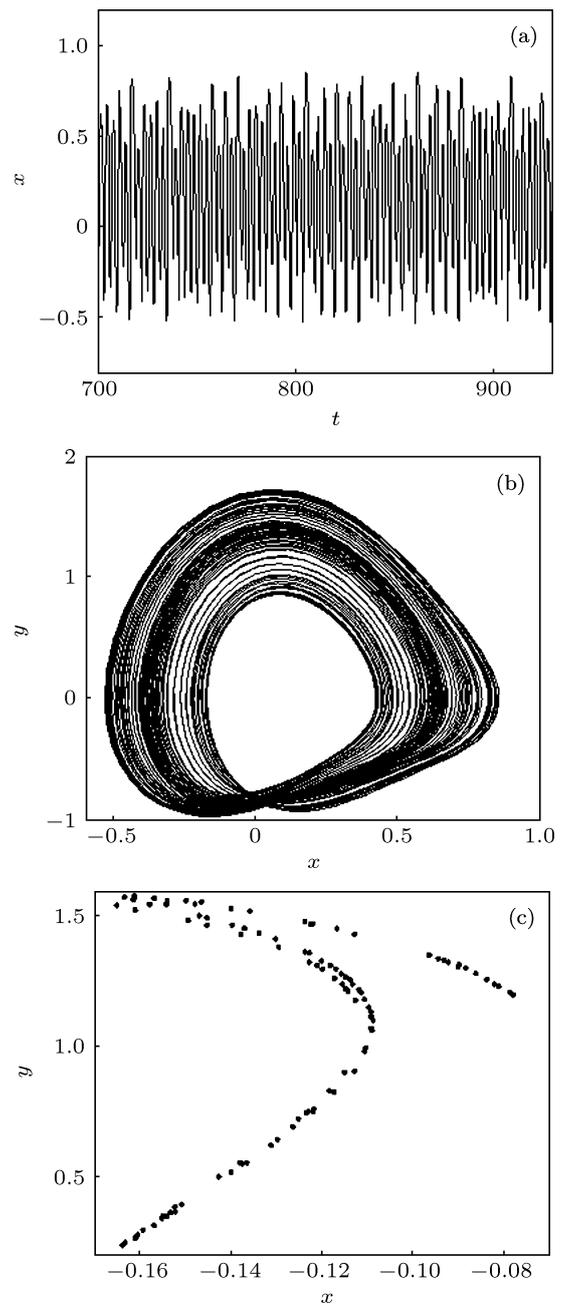


图 16 $\zeta\alpha k = 5.8$ 时系统的时间历程图、相轨迹和 Poincaré 截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincaré 截面

根据以上分析, 可以看出随着外激和参激幅值的变化, 系统的混沌运动和周期运动交替出现多次, 直到进入完全的混沌状态, 对于数值分析的每种情况下产生混沌运动的参数值均满足系统可发生 Smale 马蹄意义下混沌行为的解析条件, 这说明理论结果和数值结果还是比较符合的.

6 结论

本文建立了一类具有 Mathieu-Duffing 振子的两质量相对转动非线性动力学方程, 利用多尺度法

分析了系统的主共振 - 基本参数共振, 并推导出系统的分岔响应方程, 通过奇异性理论求解了系统的转迁集. 并应用 Melnikov 方法求解了系统发生混沌行为的条件. 最后通过数值仿真分析, 发现外激和参激幅值的变化可以使系统进入混沌行为, 伴随

着幅值的增大, 系统能够出现多次通向混沌的道路, 并且存在倍周期分岔通向混沌和阵发性混沌等显著现象. 结果表明, 在外激和参激的联合作用下, 系统更容易出现混沌行为. 因此适当的减小外激和参激幅值的大小可以有效的抑制混沌的发生.

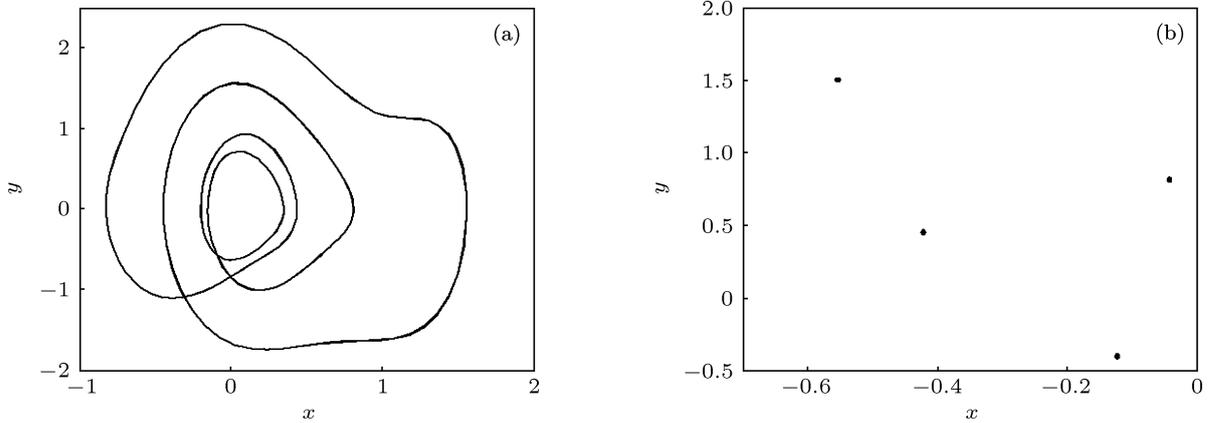


图 17 $\zeta\alpha k = 6.125$ 时系统相轨迹和 Poincaré 截面 (a) 相轨迹; (b) Poincaré 截面

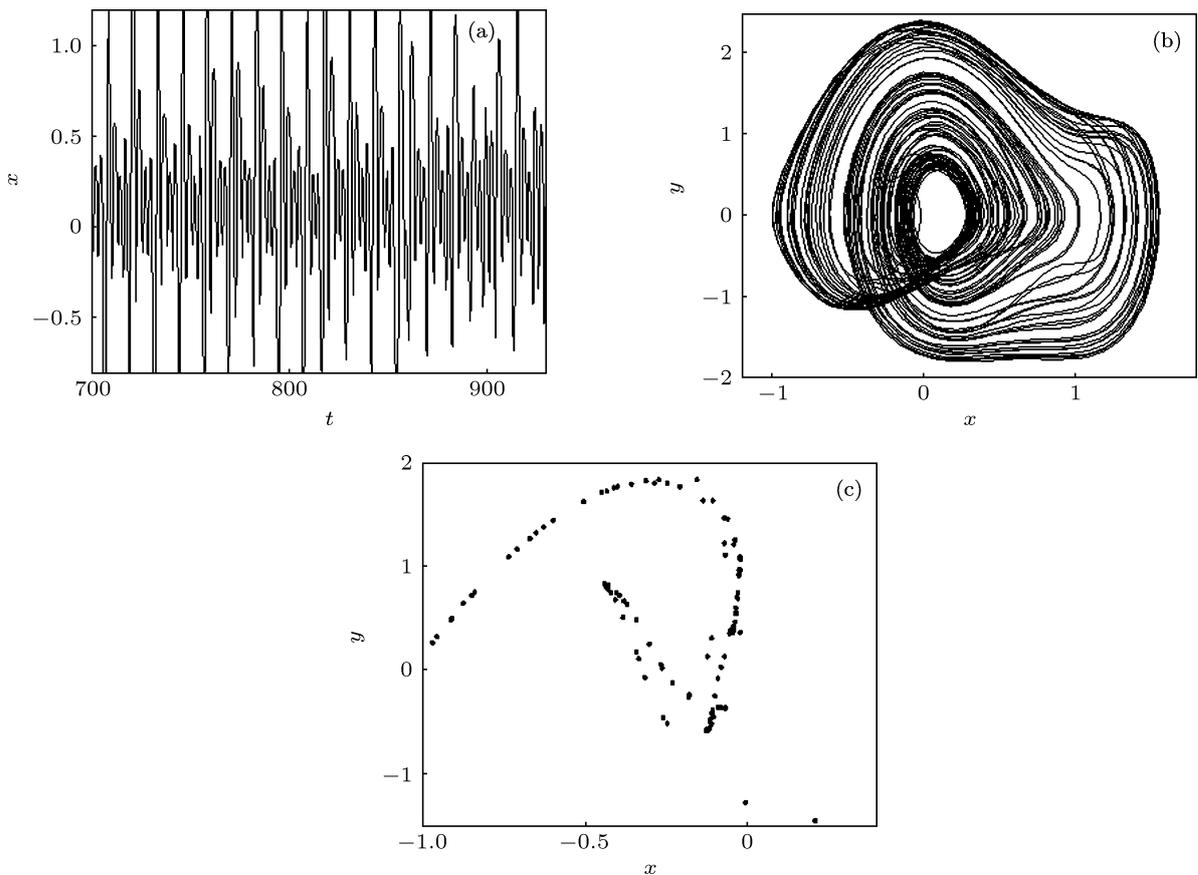


图 18 $\zeta\alpha k = 6.6$ 时系统的时间历程图、相轨迹和 Poincaré 截面 (a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) Poincaré 截面

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
 [2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89
 [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16** 154]
 [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
 [5] Huang J C, Jing Z J 2009 *Chaos Solitons and Fractals* **40** 1449
 [6] Ma S J, Xu W, Li W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4013 (in Chinese) [马少娟, 徐伟, 李伟 2006 物理学报 **55** 4013]
 [7] Chen S Y, Tang J Y 2008 *J. Sound Vib.* **318** 1109
 [8] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648 (in Chinese) [王坤, 关新平, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]
 [9] Mo J Q, Cheng R J, Ge H X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040203 (in Chinese) [莫嘉琪, 程荣军, 葛红霞 2011 物理学报 **60** 040203]
 [10] Tang R R 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200201 (in Chinese) [唐荣荣 2012 物理学报 **61** 200201]
 [11] Shi P M, Han D Y, Liu B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 9
 [12] Liu H R, Zhu ZH L, Shi P M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6770 (in Chinese) [刘浩然, 朱占龙, 时培明 2010 物理学报 **59** 6770]
 [13] Li X J, Chen X Q, Yan J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 090202 (in Chinese) [李晓静, 陈绚青, 严静 2013 物理学报 **62** 090202]
 [14] Yagasaki K 1996 *J. Sound Vib.* **190** 587
 [15] Siewe Siewe M, Hongjun Caob, Miguel A F Sanjuán 2009 *Chaos Solitons and Fractals* **41** 772
 [16] Vladimir Aslanov, Vadim Yudintsev 2012 *Chaos Solitons and Fractals* **45** 1100
 [17] Siewe Siewe M, Moukam Kakmeni F M, Tchawoua C 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **21** 841

Bifurcation and chaos in some relative rotation systems with Mathieu-Duffing oscillator*

Hou Dong-Xiao^{1)†} Zhao Hong-Xu²⁾ Liu Bin²⁾

1) (Department of Control Engineering Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China)

2) (College of Information Science and Engineering, YanShan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Received 17 August 2013; revised manuscript received 10 September 2013)

Abstract

The dynamic equation of relative rotation nonlinear dynamic system with Mathieu-Duffing oscillator is investigated. Firstly, the bifurcation response align of the relative rotation system under primary resonance-basic parameters condition is deduced using the method of multiple scales, and a singularity analysis is employed to obtain the transition set of steady motion. Secondly, a global bifurcation of the system, some probable routes leading to chaos and multiple times leading to chaos with parametric and external excitation amplitude changes have been discussed by using Melnikov method, and the necessary condition for chaotic motion of the system is presented. Finally, a numerical method is employed to further prove the effectiveness of the theoretical research.

Keywords: relatively rotation, Mathieu-Duffing, chaos, Melnikov method

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.234501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51105324, 51005196), the Hebei Province Science and Technology Support Program, China (Grant No. 13211907D), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. N110323008).

† Corresponding author. E-mail: houdongxiao1982@163.com