涉及 Hermite 多项式的二项式定理和 Laguerre 多项式的负二项式定理*

范洪义[1)†] 楼森岳[1)] 潘孝胤[1)] 笪诚[2)]

1) (宁波大学物理系, 宁波 315211)

2) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

(2013 年 9 月 30 日收到; 2013 年 10 月 15 日收到修改稿)

提出量子力学算符 Hermite 多项式方法, 即将若干常用的特殊函数的宗量由普通数变为算符, 并用它来发现涉及 Hermite 多项式 (单变数和双变数) 的二项式定理和涉及 Laguerre 多项式的负二项式定理, 它们在计算若干量子光场的物理性质时有实质性的应用. 该方法不但具有简捷的优点, 而且能导出很多新的算符恒等式, 成为发展数学物理理论的一个重要分支.

关键词: 量子力学, Hermite 多项式, 二项式定理, Laguerre 多项式

PACS: 03.65.−w, 42.50.−p, 02.30.Gp **DOI:** 10.7498/aps.62.240301

1 用算符 Hermite 多项式方法推导含 Hermite 和 Laguerre 多项式的二项式定理

Hermite 多项式 $\mathrm{H}_m(q)$ 和 Laguerre 多项式 $\mathrm{L}_l(z)$ 分别在量子力学计算谐振子能态和计算氢原子能态的波函数有实质的应用, Hermite 多项式也是分数 Fourier 变换的本征函数. 另一方面, 通常的二项式定理是指

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}y^l q^{m-l}=(y+q)^m, \tag{1}$$

通常的负二项式定理是指

$$\sum_{l=0}\frac{(n+l)!(-q)^l}{l!n!}=(1+q)^{-n-1}. \tag{2}$$

那么是否存在涉及 Hermite 多项式的二项式定理和涉及 Laguerre 多项式的负二项式定理呢？例如, 当我们在 (1) 式左边再附加一个 $(m-l)$ 阶 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_{m-l}(q)$, 那么含 $\mathrm{H}_{m-l}(q)$ 的二项式定理

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}y^l q^{m-l}\mathrm{H}_{m-l}(q) \tag{3}$$

是什么？又如, 当我们把 (2) 式的左边再附加一个 Laguerre 多项式 $\mathrm{L}_{n+l}(z)$

$$\sum_{l=0}\frac{(n+l)!(-q)^l}{l!n!}\mathrm{L}_{n+l}(z), \tag{4}$$

那么含 Laguerre 多项式的负二项式定理又是什么？注意当 $n=0$, (4) 式变成 $\sum_{l=0}(-q)^l\mathrm{L}_l(z)$, 恰应该是已知的 Laguerre 多项式的母函数公式

$$\sum_{l=0}(-q)^l\mathrm{L}_l(z)=(1+q)^{-1}\exp\left(\frac{zq}{q+1}\right), \tag{5}$$

因此 (4) 式的求和结果不仅将给出含 Laguerre 多项式的负二项式定理, 也将引导我们去导出 Laguerre 多项式的广义母函数公式. 以下提出量子力学算符 Hermite 多项式方法, 即将若干常用的特殊函数的宗量由普通数变为算符, 并用它来发现涉及 Hermite 多项式的二项式定理和 Laguerre 多项式的负二项式定理, 此方法不但具有简捷的特点, 而且能导出若干新的量子力学算符恒等式, 它们将在量子光学的若干计算中有实质性的应用.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11175113) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fhym@ustc.edu.cn

2 量子力学算符 Hermite 多项式方法简介

所谓量子力学算符 Hermite 多项式方法, 即是把普通 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_m(q)$ 的宗量 q 换成坐标算符 $\boldsymbol{Q}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{\dagger}}{\sqrt{2}}$, $[\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}]=\mathrm{i}\hbar$, $\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{\dagger}\right]=1$, 把 $\mathrm{H}_n(q)$ 变为算符 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q})$, 由于 $\mathrm{H}_m(\boldsymbol{Q})$ 的正规乘积排序形式在文献 [1—3] 中给出:

$$\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q})=:(2\boldsymbol{Q})^n:, \tag{6}$$

它是正规乘积内的幂级数形式, 符号 : : 代表正规乘积, 而在正规乘积内部, 产生算符与湮灭算符是可交换的, 这就为有关的计算带来很多方便. (6) 式的逆关系是

$$\boldsymbol{Q}^n=(2\mathrm{i})^{-n}:\mathrm{H}_n(\mathrm{i}\boldsymbol{Q}):, \tag{7}$$

它们是算符 Hermite 多项式方法的核心公式. 与相应的经典关系做如下比较:

经典关系

$$q^n=\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{n!\mathrm{H}_{n-2m}(q)}{2^n m!(n-2m)!},$$
$$\mathrm{H}_n(q)=2^n\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!}{2^{2k}k!(n-2k)!}q^{n-2k},$$

算符关系正常编序

$$\boldsymbol{Q}^n=(2i)^{-n}:\mathrm{H}_n(i\boldsymbol{Q}):,$$
$$\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q})=2^n:\boldsymbol{Q}^n:, \tag{8}$$

可见量子算符关系比相应的经典关系简明. 尤其是 (6) 式, 它把 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q})$ 转换为正规乘积内的幂级数, 就可极大地简化运算. 从 (6) 和 (7) 式出发, 若能得到同一编序规则下的新的算符恒等式和新的母函数公式, 再过渡到经典情况就能引出相应的函数公式, 此方法称为算符 Hermite 多项式方法, 它具有简捷的特点. 例如用 Baker-Hausdorff 公式, 即当 $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$ 时, 有 $\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]}$, 和 $\mathrm{H}_m(q)$ 的母函数公式 (此式也可以作为 $\mathrm{H}_m(q)$ 的定义式)

$$\mathrm{e}^{2\lambda q-\lambda^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{H}_m(q), \tag{9}$$

可得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda\left(f\boldsymbol{a}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)}&=:\mathrm{e}^{\lambda\left(f\boldsymbol{a}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)}:\mathrm{e}^{\frac{fg\lambda^2}{2}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{fg}{2}}\lambda\right)^n}{n!}:\mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\frac{f\boldsymbol{a}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}{\sqrt{2fg}}\right):\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda\left(f\boldsymbol{a}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)\right]^n}{n!}.\end{aligned} \tag{10}$$

比较 λ^n 的 "系数" 得到正规乘积展开

$$\begin{aligned}&\left(f\boldsymbol{a}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)^n\\&=\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{fg}{2}}\right)^n:\mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\frac{f\boldsymbol{a}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}{\sqrt{2fg}}\right):.\end{aligned} \tag{11}$$

2.1 涉及 Hermite 多项式的二项式定理

为了求出 (3) 式的结果, 把 $\mathrm{H}_{m-l}(q)$ 以 $\mathrm{H}_{m-l}(\boldsymbol{Q})$ 替代, 即考虑 $\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}y^l q^{m-l}\mathrm{H}_{m-l}(\boldsymbol{Q})$, 用 (6) 式得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}y^l q^{m-l}\mathrm{H}_{m-l}(\boldsymbol{Q})\\&=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}y^l q^{m-l}2^{m-l}:\boldsymbol{Q}^{m-l}:\\&=:(2q\boldsymbol{Q}+y)^m:,\end{aligned} \tag{12}$$

两边乘 $\sum_m^\infty\frac{\lambda^m}{m!}$ 求和得

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{m}{l}y^l q^{m-l}\mathrm{H}_{m-l}(\boldsymbol{Q})\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}:(2q\boldsymbol{Q}+y)^m:\\&=:\mathrm{e}^{\lambda(2q\boldsymbol{Q}+y)}:.\end{aligned} \tag{13}$$

再用 Baker-Hausdorff 公式和 (9) 式将 (13) 式右边化为

$$\begin{aligned}:\mathrm{e}^{\lambda(2q\boldsymbol{Q}+y)}:&=\mathrm{e}^{2\lambda q\left(\boldsymbol{Q}+\frac{y}{2q}\right)-\lambda^2q^2}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^m}{m!}\mathrm{H}_m\left(\boldsymbol{Q}+\frac{y}{2q}\right).\end{aligned} \tag{14}$$

所以比较方程 (13) 式的左边和 (14) 式右边 λ^m 的系数得到一个新的算符恒等式

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}y^l q^{m-l}\mathrm{H}_{m-l}(\boldsymbol{Q})=q^m\mathrm{H}_m\left(\boldsymbol{Q}+\frac{y}{2q}\right) \tag{15}$$

或

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}y^{m-l}q^l\mathrm{H}_l(\boldsymbol{Q})=q^m\mathrm{H}_m\left(Q+\frac{y}{2q}\right), \tag{16}$$

再把算符 $\boldsymbol{Q}\to x$, 得到经典函数的一个新求和公式

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{m}{l}y^{m-l}q^l\mathrm{H}_l(x)=q^m\mathrm{H}_m\left(x+\frac{y}{2q}\right), \tag{17}$$

这是一个涉及 H_l 的广义二项式定理, 并可推广. 从以上推导看出算符 Hermite 多项式方法的简捷.

特别地, 当 $q=1$,

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{m}{l}y^{m-l}\mathrm{H}_l(x)=\mathrm{H}_m\left(x+\frac{y}{2}\right) \tag{18}$$

作为此广义二项式定理应用, 考虑量子光学中一个平移压缩态 $\mathrm{e}^{f\boldsymbol{a}^{\dagger 2}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}|0\rangle$ 被湮灭 m 个光子以后的变化情形, 为此需将 $\boldsymbol{a}^m\mathrm{e}^{f\boldsymbol{a}^{\dagger 2}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}$ 化为正规乘积, 用 Baker-Hausdorff 公式得

$$\boldsymbol{a}^m\mathrm{e}^{f\boldsymbol{a}^{\dagger 2}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}=\mathrm{e}^{f\boldsymbol{a}^{\dagger 2}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}\left[\boldsymbol{a}+2f\boldsymbol{a}^{\dagger}+g\right]^m. \tag{19}$$

再用 (11) 和 (18) 式可将其中的多项式化为正规乘积

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{a}+2f\boldsymbol{a}^{\dagger}+g\right]^m\\&=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}g^{m-l}\left(\boldsymbol{a}+2f\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)^l\\&=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}g^{m-l}\left(-\mathrm{i}\sqrt{f}\right)^l:\mathrm{H}_l\left(\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{a}+2f\boldsymbol{a}^{\dagger}}{2\sqrt{f}}\right):\\&=\left(-\mathrm{i}\sqrt{f}\right)^m:\mathrm{H}_m\left(\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{a}+2f\boldsymbol{a}^{\dagger}+g}{2\sqrt{f}}\right):,\end{aligned} \tag{20}$$

于是就得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^m\mathrm{e}^{f\boldsymbol{a}^{\dagger 2}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}|0\rangle\\&=\mathrm{e}^{f\boldsymbol{a}^{\dagger 2}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}\left(-\mathrm{i}\sqrt{f}\right)^m:\mathrm{H}_m\left(\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{a}+2f\boldsymbol{a}^{\dagger}+g}{2\sqrt{f}}\right):|0\rangle\\&=\left(-\mathrm{i}\sqrt{f}\right)^m\mathrm{e}^{f\boldsymbol{a}^{\dagger 2}+g\boldsymbol{a}^{\dagger}}\mathrm{H}_m\left(\mathrm{i}\frac{2f\boldsymbol{a}^{\dagger}+g}{2\sqrt{f}}\right)|0\rangle.\end{aligned} \tag{21}$$

再用 (6) 式证明另一个涉及 Hermite 多项式的阶数的广义二项式定理

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{H}_{n-k}(x)\mathrm{H}_k(y)=\mathrm{H}_n(x+y). \tag{22}$$

取 $x\to\boldsymbol{Q}_1$, $y\to\boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_i=\dfrac{\boldsymbol{a}_i^{\dagger}+\boldsymbol{a}_i}{\sqrt{2}}$ $(i=1,\ 2)$, $[\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2]=0$, 所以

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{H}_{n-k}(\boldsymbol{Q}_1)\mathrm{H}_k(\boldsymbol{Q}_2)\\&=2^n\sum_{k=0}^{n}:\binom{n}{k}\boldsymbol{Q}_1^{n-k}\boldsymbol{Q}_2^k:\\&=2^n:(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2)^n:\\&=\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2)\end{aligned} \tag{23}$$

与 (22) 式自洽.

2.2 关于 $\mathrm{H}_{n+m}(q)$ 的两个母函数公式

关于 $\mathrm{H}_{n+m}(q)$ 的母函数公式有两种. 一是考虑求 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{H}_{n+m}(q)}{n!m!}t^n v^m$ 的母函数, 另一是考虑求 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{H}_{n+m}(q)}{n!}t^n$. 用算符 Hermite 多项式方法把其中的 q 换成算符坐标算符 $\boldsymbol{Q}$, 再用 (6) 和 (9) 式得到

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{n+m}(\boldsymbol{Q})}{n!m!}t^n v^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}:\frac{(2\boldsymbol{Q})^{n+m}}{n!m!}:t^n v^m\\&=:\exp[2(t+v)\boldsymbol{Q}]:\\&=\exp[2(t+v)\boldsymbol{Q}-(t+v)^2]\\&=\exp[2t\boldsymbol{Q}-t^2]\exp[2v(\boldsymbol{Q}-t)-v^2]\\&=\exp[2t\boldsymbol{Q}-t^2]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_m(\boldsymbol{Q}-t)}{m!}v^m,\end{aligned} \tag{24}$$

再把算符 $\boldsymbol{Q}$ 换成 q, 可见新的母函数公式

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{n+m}(q)}{n!m!}t^n v^m\\&=\exp[2tq-t^2]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_m(q-t)}{m!}v^m.\end{aligned} \tag{25}$$

如再比较两边 $\dfrac{v^m}{m!}$ 的系数, 又得另一母函数公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{n+m}(q)}{n!}t^n=\exp[2tq-t^2]\mathrm{H}_m(q-t). \tag{26}$$

(26) 式还可以算符 Hermite 多项式方法证明, 以 $\boldsymbol{Q}$ 代 q, 用 (6) 式有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}\frac{t^k}{k!}\mathrm{H}_{n+k}(\boldsymbol{Q})\\&=2^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}:\boldsymbol{Q}^{n+k}:=2^n:\mathrm{e}^{2tQ}\boldsymbol{Q}^n:\\&=2^n\mathrm{e}^{\sqrt{2}t\boldsymbol{a}^{\dagger}}:\boldsymbol{Q}^n:\mathrm{e}^{\sqrt{2}t\boldsymbol{a}}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}t\boldsymbol{a}^{\dagger}}\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q})\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}t\boldsymbol{a}}\\&=\mathrm{e}^{\sqrt{2}t\boldsymbol{a}^{\dagger}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}t\boldsymbol{a}}\mathrm{H}_n\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{\dagger}}{\sqrt{2}}-t\right)\\&=\mathrm{e}^{2tQ-t^2}\mathrm{H}_n(\boldsymbol{Q}-t)\end{aligned} \tag{27}$$

与 (26) 式是自洽的.

3 双变量 Hermite 多项式的一个重要母函数公式

双变量 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_{m,n}(x,y)$[4] 是两个单变量 Hermite 多项式的纠缠形式, 其物理应用是与

量子纠缠态表象密切相关的, 见文献 [4—9]. 它的定义式是

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{t^m\tau^n}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(x,y)=\exp(-t\tau+tx+\tau y),\tag{28}$$

右边是 $\mathrm{H}_{m,n}(x,y)$ 的母函数, 或

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_{m,n}(x,y)\\&=\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^m\partial\tau^n}\exp(-t\tau+tx+\tau y)|_{t,\tau=0}.\end{aligned}\tag{29}$$

能体现算符 Hermite 多项式方法在双变量情形下的应用是

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\tau^n t^m}{n!m!}\boldsymbol{a}^{\dagger n}\boldsymbol{a}^m\\&=\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{a}^\dagger}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{a}}=\mathrm{e}^{-t\tau}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{a}^\dagger}\\&=\vdots\exp\left(-t\tau+t\boldsymbol{a}+\tau\boldsymbol{a}^\dagger\right)\vdots\\&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\tau^n t^m}{n!m!}\vdots\mathrm{H}_{m,n}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger\right)\vdots,\end{aligned}\tag{30}$$

这里记号 $\vdots\ \vdots$ 代表反正规乘积, 在 $\vdots\ \vdots$ 内部的产生算符与湮灭算符也是可交换的. 比较 (30) 式的两边得到 $\boldsymbol{a}^{\dagger n}\boldsymbol{a}^m$ 的反正规乘积展开的简洁式 [10]

$$\boldsymbol{a}^{\dagger n}\boldsymbol{a}^m=\vdots\mathrm{H}_{m,n}\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^\dagger\right)\vdots=\vdots\mathrm{H}_{n,m}\left(\boldsymbol{a}^\dagger,\boldsymbol{a}\right)\vdots.\tag{31}$$

另一方面, 考虑

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\tau^n t^m}{n!m!}\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{a}^{\dagger m}\\&=\mathrm{e}^{\tau\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{a}^\dagger}=:\exp\left(\tau\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{a}^\dagger+\tau t\right):\\&=:\exp\left[-(-\mathrm{i}t)(-\mathrm{i}\tau)+(-\mathrm{i}t)\left(\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger\right)+(-\mathrm{i}\tau)(\mathrm{i}\boldsymbol{a})\right]:\\&=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}t)^m(-\mathrm{i}\tau)^n}{m!n!}:\mathrm{H}_{m,n}\left(\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger,\mathrm{i}\boldsymbol{a}\right):\end{aligned}\tag{32}$$

则得到 $\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{a}^{\dagger m}$ 的正规乘积展开的简洁式 [10]

$$\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{a}^{\dagger m}=(-\mathrm{i})^{m+n}:\mathrm{H}_{m,n}\left(\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger,\mathrm{i}\boldsymbol{a}\right):,\tag{33}$$

(31) 和 (33) 式是算符 Hermite 多项式方法在双模情形下能发挥使用的基本公式.

现在考察如何用算符 Hermite 多项式方法求和

$$\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}\mathrm{H}_{l+m,l+n}(x,y),\tag{34}$$

用算符 Hermite 多项式方法和 (33) 式我们转而考虑算符关系式

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}(-\mathrm{i})^{m+n+2l}:\mathrm{H}_{l+m,l+n}\left(\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger,\mathrm{i}\boldsymbol{a}\right):\\&=\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}\boldsymbol{a}^{l+n}\boldsymbol{a}^{\dagger l+m}\\&=\boldsymbol{a}^n\vdots\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger}\vdots\boldsymbol{a}^{\dagger m},\end{aligned}\tag{35}$$

然后用相干态 $|z\rangle=\exp\left[-\frac{|z|^2}{2}+z\boldsymbol{a}^\dagger\right]|0\rangle$ 的完备性

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z\rangle\langle z|\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:\exp[-|z|^2+z\boldsymbol{a}^\dagger+z^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}]:\\&=1\end{aligned}\tag{36}$$

和有序算符内的积分技术 [10—14]

$$\begin{aligned}\vdots\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger}\vdots&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z\rangle\langle z|\,\mathrm{e}^{\lambda|z|^2}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:\exp[-|z|^2(1-\lambda)\\&\quad+z\boldsymbol{a}^\dagger+z^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}]:\\&=\frac{1}{1-\lambda}:\mathrm{e}^{\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\left(\frac{1}{1-\lambda}-1\right)}:\\&=\frac{1}{1-\lambda}\mathrm{e}^{\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\ln\frac{1}{1-\lambda}},\end{aligned}\tag{37}$$

得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^n\vdots\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger}\vdots\boldsymbol{a}^{\dagger m}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}z^n\mathrm{e}^{\lambda|z|^2}z^{*m}|z\rangle\langle z|\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}z^nz^{*m}:\mathrm{e}^{-(1-\lambda)|z|^2+z\boldsymbol{a}^\dagger+z^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}}:\\&=(-\mathrm{i})^{m+n}(1-\lambda)^{-(n+m)/2-1}:\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}/(1-\lambda)}\\&\quad\times\mathrm{H}_{m,n}\left(\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger}{\sqrt{1-\lambda}},\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\lambda}}\right):.\end{aligned}\tag{38}$$

特别地, 当 $m=n$,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^n\vdots\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger}\vdots\boldsymbol{a}^{\dagger n}\\&=(-1)^n(1-\lambda)^{-n-1}:\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}/(1-\lambda)}\\&\quad\times\mathrm{H}_{n,n}\left(\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger}{\sqrt{1-\lambda}},\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\lambda}}\right):,\end{aligned}\tag{39}$$

比较 (35) 和 (38) 式, 我们看到算符恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}(-1)^l:\mathrm{H}_{l+m,l+n}\left(\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger,\mathrm{i}\boldsymbol{a}\right):\\&=(1-\lambda)^{-(n+m)/2-1}:\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}/(1-\lambda)}\\&\quad\times\mathrm{H}_{m,n}\left(\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{a}^\dagger}{\sqrt{1-\lambda}},\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\lambda}}\right):\end{aligned}\tag{40}$$

过渡到经典情况, 也就是说把 $\mathrm{i}\boldsymbol{a}^{\dagger} \to x$, $\mathrm{i}\boldsymbol{a} \to y$ 就得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}\mathrm{H}_{l+m,l+n}(x,y)\\ &=(1+\lambda)^{-(n+m)/2-1}\,\mathrm{e}^{\lambda xy/(1+\lambda)}\\ &\quad\times\mathrm{H}_{m,n}\left(\frac{x}{\sqrt{1+\lambda}},\frac{y}{\sqrt{1+\lambda}}\right),\end{aligned}\tag{41}$$

这是有关 $\mathrm{H}_{l+m,l+n}(x,y)$ 的新的母函数公式. 特别地, 当 $m=n$,

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}\mathrm{H}_{l+n,l+n}(x,y)\\ &=(1+\lambda)^{-n-1}\,\mathrm{e}^{\lambda xy/(1+\lambda)}\\ &\quad\times\mathrm{H}_{n,n}\left(\frac{x}{\sqrt{1+\lambda}},\frac{y}{\sqrt{1+\lambda}}\right).\end{aligned}\tag{42}$$

4 涉及 Laguerre 多项式的负二项式定理

注意到 Laguerre 多项式 $\mathrm{L}_n(x)$ 的定义是

$$\mathrm{L}_n(x)=\sum_{l=0}\binom{n}{l}\frac{(-1)^l}{l!}x^l,\tag{43}$$

与双变量 Hermite 多项式的级数展开式 (29) 式比较可见

$$\mathrm{L}_n(xy)=\frac{(-1)^n}{n!}\mathrm{H}_{n,n}(x,y),\tag{44}$$

把 (42) 式中的 $\mathrm{H}_{l+n,l+n}(x,y)$ 以 $(n+l)!(-1)^{n+l}\mathrm{L}_{l+n}(z)$, $(z=xy)$ 代替, 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}\frac{(n+l)!(-\lambda)^l}{l!n!}\mathrm{L}_{n+l}(z)\\ &=(1+\lambda)^{-n-1}\,\mathrm{e}^{\lambda z/(1+\lambda)}\mathrm{L}_n\left(\frac{z}{1+\lambda}\right),\end{aligned}\tag{45}$$

当 $n=0$, 它约化为 (5) 式, 如所期待. 当 $z=0$, 它约化为负二项式定律

$$\sum_{l=0}\frac{(n+l)!(-\lambda)^l}{l!n!}=(1+\lambda)^{-n-1},\tag{46}$$

这也是如所期待的. (45) 式就是我们新得到的涉及 Laguerre 多项式的负二项式定理.

总之, 用量子力学算符 Hermite 多项式方法, 我们导出了涉及 Hermite 多项式的二项式定理和 Laguerre 多项式的负二项式定理, 该方法具有简捷的优点, 可以系统地发展数学物理理论, 能导出很多新的算符恒等式. 例如用 (31) 和 (42) 式又可以导出

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^{\dagger n}:\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}}:\boldsymbol{a}^m\\ &=:\boldsymbol{a}^{\dagger n}\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}^m:\\ &=\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}\boldsymbol{a}^{\dagger n+l}\boldsymbol{a}^{m+l}\\ &=\sum_{l=0}\frac{\lambda^l}{l!}\vdots\mathrm{H}_{l+m,l+n}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{\dagger})\vdots\\ &=(1+\lambda)^{-(n+m)/2-1}\,\mathrm{e}^{\lambda xy/(1+\lambda)}\\ &\quad\times\vdots\mathrm{H}_{m,n}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1+\lambda}},\frac{\boldsymbol{a}^{\dagger}}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\vdots,\end{aligned}\tag{47}$$

这是把正规乘积排列的算符化为其发展正规乘积排列的算符的恒等式. 我们相信以算符为特殊函数宗量的理论将在发展数学物理方程方面起到重要的作用.

[1] Fan H Y, Ruan T N 1985 *Commun. Theor. Phys.* **4** 181

[2] Fan H Y, Ruan T N 1989 *Commun. Theor. Phys.* **12** 219

[3] Fan H Y 2012 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics-Progress of Dirac's Symbolic Method* (2nd Ed.) (Hefei: University of Science and Technology of China Press) (in Chinese) [范洪义 2012 量子力学表象与变换论 —— 狄拉克符号法进展 (合肥: 中国科学技术大学出版社)]

[4] Fan H Y, Hu L Y 2010 *Optical Transformation-From Quantum to Classical* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press) (in Chinese) [范洪义, 胡利云 2010 光学变换 —— 从量子到经典 (上海: 上海交通大学出版社)]

[5] Fan H Y, Li X C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200301 (in Chinese) [范洪义, 李学超 2012 物理学报 **61** 200301]

[6] Erdelyi A 1953 *Higher Transcendental Functions* (The Bateman Manuscript Project) (New York: McGraw Hill)

[7] Fan H Y, Jiang T F 2007 *Mod. Phys. Lett.* B **21** 475

[8] Fan H Y, Tang X B 2008 *Devolopment of Basis of the Mathematical Physics of Quantum Mechanics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) (in Chinese) [范洪义, 唐绪兵 2008 量子力学数理基础进展 (合肥: 中国科学技术大学出版社)]

[9] Fan H Y, Zhan D H, Yu W J, Zhou J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110302 (in Chinese) [范洪义, 展德会, 于文健, 周军 2012 物理学报 **61** 110302]

[10] Fan H Y 2003 *J. Opt.* B: *Quantum Semiclass. Opt.* **5** R147

[11] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480

[12] Fan H Y, Lü C H 2012 *The Phase Space Theory of Quantum Mechanics* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press) (in Chinese) [范洪义, 吕翠红 2012 量子力学的相空间理论 (上海: 上海交通大学出版社)]

[13] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev.* D **35** 1831

[14] Fan H Y, Da C 2013 *Chin. Phys.* B **22** 090303

Binomial theorem involving Hermite polynomials and negative-binomial theorem involving Laguerre polynomials*

Fan Hong-Yi[1)†] Lou Sen-Yue[1)] Pan Xiao-Yin[1)] Da Cheng[2)]

1) (*Department of Physics, Ningbo University, Ningbo* 315211*, China*)

2) (*Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026*, China*)

(Received 30 September 2013; revised manuscript received 15 October 2013)

Abstract

We propose an operator Hermite polynomial method, namely, we replace the arguments of the special function by quantum mechanical operators, and in this way we derive a binomial theorem involving Hermite polynomials and a negative-binomial theorem involving Laguerre polynomials. These two theorems will have essential applications in quantum optics calculations. This method is concise and helpful in deducing many operator identities, which may become a new branch in mathematical physics theory.

Keywords: quantum mechanics, Hermite polynomons, binomial theorem, Laguerre polynomials

PACS: 03.65.−w, 42.50.−p, 02.30.Gp **DOI:** 10.7498/aps.62.240301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11175113).

† Corresponding author. E-mail: fhym@ustc.edu.cn