

噪声环境下时滞耦合网络的广义投影滞后同步*

张丽¹⁾ 杨晓丽^{1)†} 孙中奎²⁾

1) (陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062)

2) (西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2013年7月11日收到; 2013年9月19日收到修改稿)

时滞和噪声在复杂网络中普遍存在, 而含有耦合时滞和噪声摄动的耦合网络同步的研究工作却极其稀少. 本文针对噪声环境下具有不同节点动力学、不同拓扑结构及不同节点数目的耦合时滞网络, 提出了两个网络之间的广义投影滞后同步. 首先, 构建了更加贴近现实的驱动 - 响应网络同步的理论框架; 其次, 基于随机时滞微分方程 LaSalle 不变性原理, 严格证明了在合理的控制器作用下, 驱动网络和响应网络在几乎必然渐近稳定性意义下能够取得广义投影滞后同步; 最后, 借助于计算机仿真, 通过具体的网络模型验证了理论推理的有效性. 数值模拟结果表明, 驱动网络与响应网络不但能够达到广义投影滞后同步, 而且同步效果不依赖于耦合时滞和比例因子的选取, 同时也揭示了更新增益和耦合时滞对同步收敛速度的显著性影响.

关键词: 复杂网络, 广义投影滞后同步, 随机噪声, 时滞

PACS: 05.40.Ca, 05.45.-a, 05.45.Xt, 02.30.Ks

DOI: 10.7498/aps.62.240502

1 引言

同步是自然界中普遍存在的一种现象^[1]. 动力系统的同步动力学一直是自然科学、社会科学及工程领域中众多科学家关注的热点课题^[2]. 特别是20世纪末复杂网络的提出^[3,4], 更是掀起了对同步的研究热潮.

早期关于复杂网络同步的研究, 主要集中于一个网络内不同节点之间的同步动力学^[5-9]. 国内外学者在同步流形的稳定性分析、网络拓扑结构与同步能力的关系、提高网络同步能力的方法等方面取得了丰硕成果, 具体可参见文献^[10, 11]. 另一方面, 现实世界中不同的群体相互制约, 从而用来描述不同群体的复杂网络的动力学行为也相互作用. 特别是在生态学与社会学中, 网络群体之间的同步显得尤其重要, 这也促使科学家们逐渐关注到网络之间的同步. 2007年, Li等^[12]针对两个单向耦合、拓扑结构与节点动力学相同的复杂网络模型, 利用 open-plus-closed-loop 方法, 首次讨论了耦

合网络的同步现象. 相对于一个网络内所有节点间动力学的同步, 两个网络间对应节点上动力学的同步被形象地称之为外同步. 随后, 基于经典的同步方案如非线性控制法、自适应控制法等, 不少学者将外同步拓展到具有不同节点动力学, 或者具有不同拓扑结构, 甚至具有不同节点数目的耦合网络中, 同时一些更具体的同步类型如完全同步、广义同步、投影同步等也不断涌现^[13-18].

随着外同步研究的不断深入, 人们在建立网络模型时也逐渐地融入一些客观因素, 如时滞和噪声. 众所周知, 信息传递速度的有限性和网络拥塞问题使得时间滞后在网络节点进行耦合时不可避免. 基于此, 含有时滞耦合的复杂网络的同步动力学也得到了广泛研究^[19-25]. 例如, 针对两个含有时滞耦合、具有不同节点动力学及不同拓扑结构的网络模型, 文献^[21-25]分别研究了网络模型在节点数目相同与不同时的同步问题. 同时, 现实世界中普遍存在的噪声也深刻地影响着非线性系统的动力学. 已有的研究表明, 无论对于未耦合系统, 还是简单的耦合系统, 甚至复杂网络系统, 噪声对振

* 国家自然科学基金(批准号: 11272258, 11172342)和中央高校基本科研业务费(批准号: GK201302001)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yangxiaoli@snnu.edu.cn

子之间的同步动力学都具有积极作用^[26-33]. 特别令人欣慰的是, 同时含有时滞与噪声的耦合网络的同步问题最近也被提出. 最新的研究成果报道了噪声摄动下含时滞耦合的两个复杂网络的随机同步问题: Wang 等^[34] 通过设计自适应同步方案, 研究了具有相同的节点动力学但具有不同拓扑结构的复杂网络的完全同步; 当两个网络节点上的动力学行为不同时, Cao 和 Ma 等^[35] 与 Sun 等^[36] 通过设计非线性控制方案, 进一步研究了耦合网络的广义同步. 目前, 据查阅文献关于这方面的其他研究成果还未见到报道. 而且, 已有结果的研究对象集中于耦合网络具有相同节点数目的情形^[34-36].

基于以上的分析, 我们进一步思考: 既然时滞和噪声在复杂网络中客观存在, 那么对于时滞耦合的网络模型, 当两个网络的节点数目不相同, 噪声摄动下耦合网络的动力学行为能否取得同步? 若同步, 同步类型是什么? 本文针对该问题展开系统研究. 首先, 我们构建了非常贴近现实的理论模型: 噪声环境下含时滞耦合且具有不同节点动力学、不同拓扑结构及不同节点数目的驱动 - 响应网络模型; 进一步地, 通过设计合理的控制器, 利用随机时滞微分方程 LaSalle 不变性原理, 在几乎必然渐近稳定性意义下, 严格证明了耦合网络能够取得广义投影滞后同步; 最后, 借助于计算机数值仿真, 验证了理论分析的有效性.

2 网络模型与预备知识

2.1 网络模型

首先构建驱动 - 响应网络同步的理论框架. 考虑一个时滞耦合的复杂网络, 其动力学方程如下:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_i(t) = & (\mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + f(\mathbf{x}_i(t)) \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} c_{ij}\mathbf{Q}\mathbf{x}_j(t-\tau))dt \\ & (i = 1, 2, \dots, N_1), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是常数矩阵; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑的非线性向量函数; 内部耦合矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 描述了耦合节点变量之间具体的连接关系; $\tau \geq 0$ 代表网络内部节点之间的耦合时滞; 矩阵 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{N_1 \times N_1}$ 表示网络的拓扑结构, 且 c_{ij} 定义如下: 如果从节点 i 到节点 j 有一条连接边, 那么, $c_{ij} > 0$ ($i \neq j$), 否则, $c_{ij} = 0$,

且 \mathbf{C} 中对角线上的元素满足 $c_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^{N_1} c_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, N_1$).

将方程 (1) 作为驱动网络, 构建包含 N_2 个节点的响应网络模型如下:

$$\begin{aligned} d\mathbf{y}_i(t) = & (\mathbf{B}\mathbf{y}_i(t) + g(\mathbf{y}_i(t)) \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij}\mathbf{Q}\mathbf{y}_j(t-\tau) + \mathbf{U}_i(t))dt \\ & + \mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i(t) - \gamma\mathbf{x}_i(t-\sigma), \mathbf{y}_i(t-\tau) \\ & - \gamma\mathbf{x}_i(t-\tau-\sigma), t)dw(t) \\ & (i = 1, 2, \dots, N_2), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{y}_i(t) = (y_{i1}(t), y_{i2}(t), \dots, y_{in}(t))^T \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是常数矩阵; $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑的非线性向量函数; \mathbf{Q} 和 τ 的定义同方程 (1); 耦合矩阵 $\mathbf{D} = (d_{ij})_{N_2 \times N_2}$ 表示响应网络的拓扑结构, 满足耗散耦合条件 $\sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N_2$), 且 d_{ij} 定义如下: 若从节点 i 到节点 j 有一条连接边, 那么, $d_{ij} > 0$ ($i \neq j$), 否则, $d_{ij} = 0$; $\mathbf{U}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, N_2$) 是待定的控制器; σ 代表网络之间的耦合时滞; $\mathbf{H}_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 称为噪声强度矩阵, $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$ 是定义在完全概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的布朗运动, $\mathbf{H}_i dw(t)$ 用于刻画网络之间耦合时不可避免的环境噪声等摄动. 不失一般性, 假设 $N_1 \geq N_2$.

2.2 预备知识

为了研究的需要, 给出如下定义和假设条件

定义 1 如果存在常数 γ ($\gamma \neq 0$), 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_i(t) - \gamma\mathbf{x}_i(t-\sigma)\| = 0$, a.s. ($i = 1, 2, \dots, N_2$), 则称驱动网络 (1) 与响应网络 (2) 在几乎必然渐近稳定性意义下取得广义投影滞后同步, 并且称 γ 为比例因子.

假设 1 噪声强度函数 $\mathbf{H}_i(x, y, t)$ ($i = 1, 2, \dots, N_2$) 满足 Lipschitz 条件, 且存在正常数 p, q , 使得

$$\frac{1}{2}\text{trace}(\mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i) \leq p\mathbf{x}^T \mathbf{x} + q\mathbf{y}^T \mathbf{y} \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$$

成立, 且 $\mathbf{H}_i(0, 0, t) \equiv 0$.

3 理论分析

针对第 2 部分建立的网络模型, 接下来我们将设计合适的控制器, 以确保驱动网络 (1) 和响应网

络 (2) 在几乎必然渐近稳定性意义下达到广义投影滞后同步. 主要结果由如下的定理和推论给出.

定理 1 对于驱动 - 响应网络模型 (1) 和 (2), 当耦合网络具有不同节点动力学、不同拓扑结构及不同节点数目时, 即 $f \neq g, \mathbf{A} \neq \mathbf{B}, \mathbf{C} \neq \mathbf{D}, N_1 \neq N_2$, 如果采用下面的控制器和更新律

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i(t) = & -g(\mathbf{y}_i(t)) + \gamma f(\mathbf{x}_i(t - \sigma)) \\ & - \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}_i(t - \sigma) \\ & - \gamma \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{y}_j(t - \tau) \\ & + \gamma \sum_{j=N_2+1}^{N_1} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) - k_i \mathbf{e}_i(t), \quad (3) \end{aligned}$$

$$dk_i = \lambda_i \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N_2), \quad (4)$$

其中 k_i 是反馈强度, 它将按照法则 (4) 适时地更新, 更新增益 λ_i 为任意正常数, 则驱动网络 (1) 和响应网络 (2) 在几乎必然渐近稳定性意义下实现广义投影滞后同步.

证明 定义误差状态变量 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \gamma \mathbf{x}_i(t - \sigma)$ ($i = 1, 2, \dots, N_2$),

则误差系统可以表示为

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_i(t) = & [\mathbf{B}\mathbf{e}_i(t) + \gamma \mathbf{B}\mathbf{x}_i(t - \sigma) + g(\mathbf{y}_i(t)) \\ & - \gamma f(\mathbf{x}_i(t - \sigma)) - \gamma \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t - \sigma) \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{e}_j(t - \tau) \\ & + \gamma \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & - \gamma \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & - \gamma \sum_{j=N_2+1}^{N_1} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & + \mathbf{U}_i(t)] dt + \mathbf{H}_i d\mathbf{w}(t) \\ = & [\mathbf{B}\mathbf{e}_i(t) + g(\mathbf{y}_i(t)) - \gamma f(\mathbf{x}_i(t - \sigma)) \\ & + \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}_i(t - \sigma) + \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{e}_j(t - \tau) \\ & + \gamma \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{e}_j(t - \tau) - \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{y}_j(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \gamma \sum_{j=N_2+1}^{N_1} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & + \mathbf{U}_i(t)] dt + \mathbf{H}_i d\mathbf{w}(t) \\ = & [\mathbf{B}\mathbf{e}_i(t) + g(\mathbf{y}_i(t)) - \gamma f(\mathbf{x}_i(t - \sigma)) \\ & + \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{x}_i(t - \sigma) \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} (c_{ij} + d_{ij}) \mathbf{Q} \mathbf{e}_j(t - \tau) \\ & + \gamma \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & - \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{y}_j(t - \tau) \\ & - \gamma \sum_{j=N_2+1}^{N_1} c_{ij} \mathbf{Q} \mathbf{x}_j(t - \tau - \sigma) \\ & + \mathbf{U}_i(t)] dt + \mathbf{H}_i d\mathbf{w}(t) \\ = & (\mathbf{B}\mathbf{e}_i(t) + \sum_{j=1}^{N_2} (c_{ij} + d_{ij}) \mathbf{Q} \mathbf{e}_j(t - \tau) \\ & - k_i \mathbf{e}_i(t)) dt + \mathbf{H}_i d\mathbf{w}(t) \\ & (i = 1, 2, \dots, N_2). \quad (5) \end{aligned}$$

建立如下函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_i} (k_i - \tilde{k})^2, \quad (6)$$

其中 \tilde{k} 是可以确定的足够大的正常数.

对误差方程 (5) 应用 Itô 公式 [37-39], 则 $V(t)$ 关于方程 (5) 的微分算子为

$$\begin{aligned} \ell V(t) = & \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{B} \mathbf{e}_i(t) - \tilde{k} \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) \\ & + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{e}_i^T(t) (c_{ij} + d_{ij}) \mathbf{Q} \mathbf{e}_j(t - \tau) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \text{trace}(\mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i), \quad (7) \end{aligned}$$

根据假设 1, 进一步可以得到

$$\begin{aligned} \ell V(t) \leq & \mathbf{e}^T(t) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{e}(t) - \tilde{k} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \\ & + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}(t - \tau) + p \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \\ & + q \mathbf{e}^T(t - \tau) \mathbf{e}(t - \tau), \quad (8) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, $\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}_1^T(t), \mathbf{e}_2^T(t), \dots, \mathbf{e}_{N_2}^T(t))^T \in \mathbb{R}^{n \times N_2}$, $\tilde{\mathbf{C}} = (c_{ij})_{N_2 \times N_2}$, $\mathbf{\Lambda} = (\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{D}) \otimes \mathbf{Q}$.

记 $\alpha = \lambda_m \left(\frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^T}{2} \right)$, $\beta = \lambda_m \left(\frac{\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^T}{2} \right)$, 则 (8) 式可以改写为

$$\ell V(t) \leq (\alpha - \tilde{k} + p) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{e}(t)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} e^T(t-\tau)e(t-\tau) \\
 & + q e^T(t-\tau)e(t-\tau) \\
 \leq & -(\tilde{k}-\alpha-\beta-p) e^T(t)e(t) \\
 & + \left(\frac{1}{2}+q\right) e^T(t-\tau)e(t-\tau) \\
 \triangleq & -\omega_1(e(t))+\omega_2(e(t-\tau)), \tag{9}
 \end{aligned}$$

记 $k^* = \alpha + \beta + p + q + \frac{1}{2}$, 总是能够找到足够大的正数 \tilde{k} , 满足 $\tilde{k} > k^*$, 使得

$$\omega_1(e(t)) > \omega_2(e(t)), \forall e(t) \neq 0, \tag{10}$$

又

$$\lim_{\|e(t)\| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t < \infty} V(e(t), t) = \infty, \tag{11}$$

根据随机时滞微分方程的 LaSalle 不变性原理 [40], 则对任意初始值 $\xi \in \mathbb{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 误差方程 (5) 的零解是几乎必然渐近稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t, \xi) = 0$, a.s.. 从而, 驱动网络 (1) 与响应网络 (2) 在几乎必然渐近稳定性意义下达到广义投影滞后同步.

注释 1 定理 1 中所考虑的网络模型非常一般, 驱动网络与响应网络可以具有不同节点动力学、不同拓扑结构甚至不同的节点数目. 事实上, 对于特殊的网络模型, 例如驱动网络与响应网络具有全同的节点动力学、不同的拓扑结构, 或者二者具有全同的拓扑结构、不同的节点动力学, 或者二者具有相同的拓扑结构、相同的节点动力学, 如果相应地设计出合适的控制器, 定理的结论也是成立的. 下面我们就以其中的一种情况为例给出说明.

推论 1 对于驱动 - 响应网络模型 (1) 和 (2), 当耦合网络具有相同的拓扑结构及相同的节点动力学时, 即 $C = D, N_1 = N_2, f = g, A = B$, 若采用以下控制方案

$$\begin{cases} U_i(t) = -f(y_i(t)) + \gamma f(x_i(t-\sigma)) - k_i e_i(t), \\ dk_i = \lambda_i e_i^T(t) e_i(t) dt, \end{cases} \tag{12}$$

其中更新增益 λ_i 为任意正常数 ($i = 1, 2, \dots, N_2$), 则驱动网络 (1) 和响应网络 (2) 在几乎必然渐近稳定性意义下实现广义投影滞后同步.

证明 在上述条件下, 误差系统的形式如下

$$\begin{aligned}
 d e_i(t) = & [A e_i(t) + \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij} Q e_j(t-\tau) - k_i e_i(t)] dt \\
 & + H_i dw(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N_2). \tag{13}
 \end{aligned}$$

引入定理中的 V 函数 (方程 (6)), 则 $V(t)$ 关于方程 (13) 的微分算子为

$$\begin{aligned}
 \ell V(t) = & \sum_{i=1}^{N_2} e_i^T(t) A e_i(t) - \tilde{k} \sum_{i=1}^{N_2} e_i^T(t) e_i(t) \\
 & + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} e_i^T(t) c_{ij} Q e_j(t-\tau) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \text{trace}(H_i^T H_i) \\
 \leq & e^T(t)(I \otimes A) e(t) - \tilde{k} e^T(t) e(t) \\
 & + e^T(t) M e(t-\tau) + p e^T(t) e(t) \\
 & + q e^T(t-\tau) e(t-\tau) \\
 \leq & -(\tilde{k}-\eta-\theta-p) e^T(t) e(t) \\
 & + \left(\frac{1}{2}+q\right) e^T(t-\tau) e(t-\tau) \\
 \triangleq & -\omega_1(e(t))+\omega_2(e(t-\tau)), \tag{14}
 \end{aligned}$$

其中 $I \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}, M = C \otimes Q, \eta = \lambda_m \left(\frac{A+A^T}{2}\right), \theta = \lambda_m \left(\frac{M M^T}{2}\right)$. 显然能够找到足够大的正数 \tilde{k} , $\tilde{k} > k^* = \eta + \theta + p + q + 1/2$, 使得

$$\omega_1(e(t)) > \omega_2(e(t)), \forall e(t) \neq 0, \tag{15}$$

又

$$\lim_{\|e(t)\| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t < \infty} V(e(t), t) = \infty, \tag{16}$$

根据随机时滞微分方程的 LaSalle 不变性原理 [40], 则对任意初始值 $\xi \in \mathbb{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, 误差方程 (13) 的零解为几乎必然渐近稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t, \xi) = 0$, a.s.. 从而, 驱动网络 (1) 与响应网络 (2) 在几乎必然渐近稳定性意义下达到广义投影滞后同步.

注释 2 在本文所考虑的网络模型中, 当网络之间的耦合时滞为零时, 即 $\sigma = 0$, 类似的推理过程表明上述定理和推论依然成立. 此时, 我们也称驱动网络和响应网络在几乎必然渐近稳定性意义下达到广义投影同步. 鉴于篇幅, 具体的证明过程在此略去.

4 数值仿真

在第 3 部分, 我们从理论上严格证明了在合适的控制器作用下, 驱动 - 响应网络模型 (1) 和 (2) 可以在几乎必然渐近稳定性意义下实现广义投影滞后同步. 在本部分, 我们进一步通过数值模拟以验证理论分析的有效性.

为了定量地刻画同步效果, 引进以下两个指标

$$\Delta(t) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \left(\sum_{j=1}^n (y_{ij}(t, \omega_k) - \gamma x_{ij}(t - \sigma, \omega_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$\rho_{ij}(t) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \frac{y_{ij}(t, \omega_k)}{x_{ij}(t - \sigma, \omega_k)}, \quad (i = 1, 2, \dots, N_2, j = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

其中 $\omega_k \in \Omega$, h 代表样本轨道, x_{ij} , y_{ij} 和 σ 形如第 2 部分描述的状态变量和网络之间的耦合时滞, 称 $\Delta(t)$ 与 $\rho_{ij}(t)$ 分别为网络的同步总误差和比例因子. 这里仅对定理 1 进行验证, 其他情形类似.

不失一般性, 假设驱动网络的节点动力学为 Lorenz 系统, 其节点个数 $N_1 = 15$, 内耦合矩阵 $Q = \text{diag}(1, 0, 0)$, 网络的拓扑结构由如下矩阵确定:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

则驱动网络的动力学方程为

$$d\mathbf{x}_i(t) = (\mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + f(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^{N_1} c_{ij} \mathbf{Q}\mathbf{x}_j(t - \tau)) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N_1), \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^T \in \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix}, \\ f(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

同时, 我们构建含有 $N_2 = 10$ 个节点的响应网络的

动力学方程形如

$$\begin{aligned} d\mathbf{y}_i(t) &= (\mathbf{B}\mathbf{y}_i(t) + g(\mathbf{y}_i(t)) + \sum_{j=1}^{N_2} d_{ij} \mathbf{Q}\mathbf{y}_j(t - \tau) \\ &+ \mathbf{U}_i(t)) dt + \mathbf{H}_i(\mathbf{y}_i(t) \\ &- \gamma \mathbf{x}_i(t - \sigma), \mathbf{y}_i(t - \tau) \\ &- \gamma \mathbf{x}_i(t - \tau - \sigma), t) d\mathbf{w}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N_2), \quad (20) \end{aligned}$$

其中节点上动力学为 Lü 系统, 即 $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, y_{i3})^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -36 & 36 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix},$$

网络的连接矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

不失一般性, 选取噪声强度函数如下:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_i(\mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_i(t-\tau), t) \\ &= [(e_{i1}(t) - e_{i1}(t-\tau)), (e_{i2}(t) - e_{i2}(t-\tau)), \\ & \quad (e_{i3}(t) - e_{i3}(t-\tau))]^T \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

易验证 \mathbf{H}_i 满足假设条件 1, 即

$$\begin{aligned} & |\mathbf{H}_i(\mathbf{e}_i(t), \mathbf{e}_i(t-\tau), t) - \mathbf{H}_i(\mathbf{e}_j(t), \mathbf{e}_j(t-\tau), t)|^2 \\ & \leq 2[|e_i(t) - e_j(t)|^2 + |e_i(t-\tau) - e_j(t-\tau)|^2], \\ & \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i) \leq \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \mathbf{e}_i^T(t-\tau) \mathbf{e}_i(t-\tau). \end{aligned}$$

在数值模拟中, 不妨取参数 $h = 10$, $\gamma = 3.0$, $\tau = 0.02$, $\sigma = 0.3$, 当采用定理 1 中的控制器和更新律时, 数值计算的结果如图 1—4 所示. 图 1 刻画了在不同的更新增益 λ_i 下, 网络的同步总误差 $\Delta(t)$ 的演化曲线. 通过图 1, 我们不难观察到对于固定的 λ_i , $\Delta(t)$ 随着时间很快趋于零, 这意味着驱动网络 (19) 和响应网络 (20) 在几乎必然渐近稳定性意义下达到广义投影滞后同步; 而且, 随着 λ_i 的增大, $\Delta(t)$ 趋于零的速度变快, 也就是说, 更新增益 λ_i 越大, 同步收敛的速度越快.

在以下图形中, 我们固定 $\lambda_i = 20.0$. 图 2 描述了反馈强度 $k_i (1 \leq i \leq 10)$ 的演化曲线. 结果表明, 反馈强度会根据同步误差自动地调整为适当的常数, 这与前面的理论分析相一致. 图 3 刻画了比例因子 $\rho_{ij}(t) (1 \leq i \leq 10, j = 1, 2, 3)$ 的演化曲线, 其中 (a)—(c) 与 (d)—(f) 是分别对应于 $\gamma = 3.0$ 与 $\gamma = 5.0$ 的情形. 结果显示数值计算的比例因子 $\rho_{ij}(t)$ 分别能够很快地趋于预先设定的常数 $\gamma = 3.0$ 与 $\gamma = 5.0$, 这说明了同步效果不依赖于比例因子 γ 的选取. 进一步数值计算的结果表明驱动网络 (19) 和响应网络 (20) 之间的广义投影滞后同步也不依赖于耦合时滞 σ 的选取, 其结果见图 4. 从图 4 中我们同时

观察到随着 σ 的增大, $\Delta(t)$ 收敛于零的速度变慢, 这意味着网络之间的耦合时滞越大, 驱动网络与响应网络达到同步的速度就越慢.

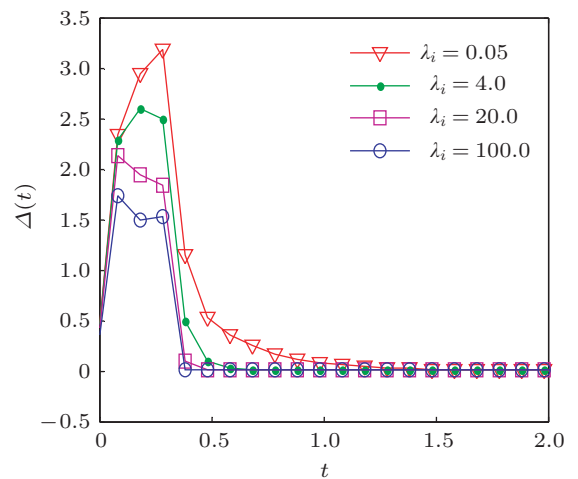


图 1 在不同的更新增益 λ_i 下, 网络的同步总误差 $\Delta(t)$ 的演化曲线

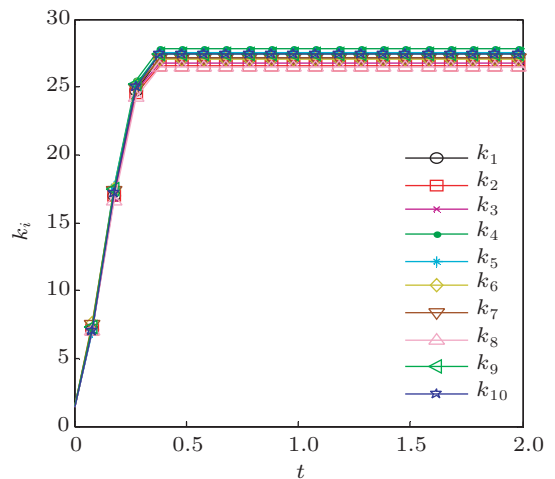


图 2 反馈强度 $k_i (1 \leq i \leq 10)$ 的演化曲线

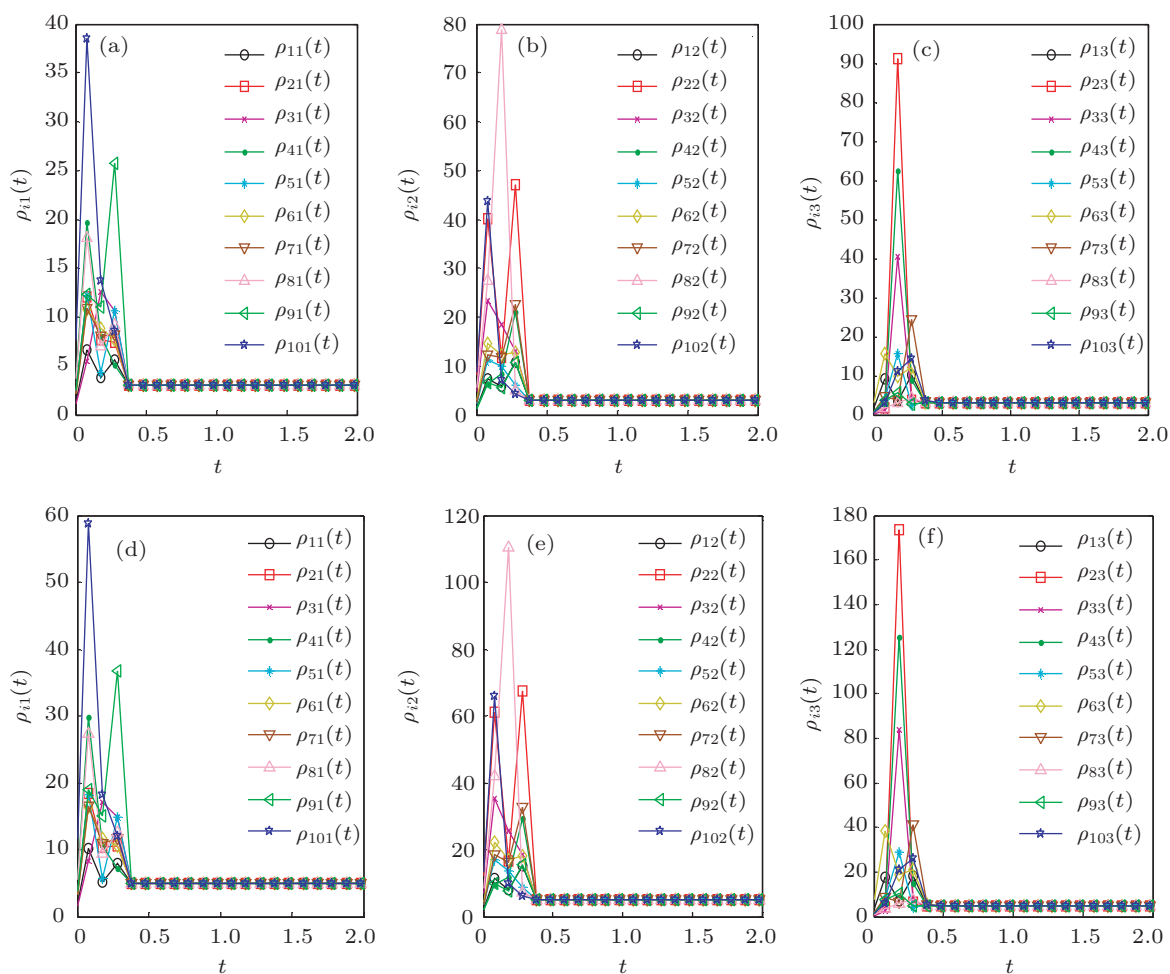


图3 比例因子 $\rho_{ij}(t)$ ($1 \leq i \leq 10, j = 1, 2, 3$) 的演化曲线, (a)—(c) 与 (d)—(f) 分别对应 $r = 3.0$ 与 $r = 5.0$ 的情形 (a) $\rho_{11}(t)$; (b) $\rho_{12}(t)$; (c) $\rho_{13}(t)$; (d) $\rho_{11}(t)$; (e) $\rho_{12}(t)$; (f) $\rho_{13}(t)$

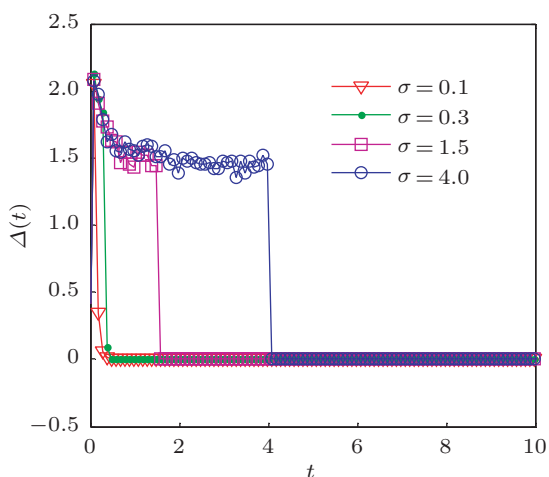


图4 在不同的耦合时滞下, 网络的同步总误差 $\Delta(t)$ 的演化曲线

在上面的数值仿真中, 驱动和响应网络上的节点动力学分别为 Lorenz 系统和 Lü 系统. 根据第 2 部分, 凡是满足驱动响应 - 网络模型 (1) 和 (2) 中关于节点上动力学要求的非线性系统都可以作为节

点上的动力学系统, 如 Liu 系统、统一混沌系统、Rosser 系统等. 类似的数值模拟结果也说明了本文方法的有效性. 限于篇幅, 文中不再一一列举.

5 结论

继 2007 年文献 [12] 报道了两个单向耦合复杂网络的同步行为后, 耦合网络之间的同步动力学在学术界引起了极大关注. 鉴于时间滞后和噪声摄动在耦合网络中客观存在, 本文通过构建噪声作用下具有不同节点动力学、不同拓扑结构及不同节点数目的耦合时滞网络, 首次研究了两个网络在几乎必然渐近稳定性意义下的广义投影滞后同步. 利用随机时滞微分方程 LaSalle 不变性原理, 文中严格证明了通过设计合理的控制器, 驱动网络和响应网络能够取得广义投影滞后同步. 借助于具体的网络模型, 计算机仿真的结果不但验证了理论推理的有效性, 同时也揭示了关键参数如耦合时滞、比例因子、更新增益对同步效果的一些显著性影响: 广义

投影滞后同步不依赖于耦合时滞和比例因子的选取, 更新增益越大同步收敛速度越快, 而耦合时滞越大同步收敛的速度却越慢. 需要指出的是, 在第 2 部分的网络模型中, 当网络之间的耦合时滞为零时, 即 $\sigma = 0$, 类似于本文的推理过程表明, 驱动网络和

响应网络在几乎必然渐近稳定性意义下能够达到广义投影同步.

本文首次研究了在节点数目不同时噪声环境下耦合时滞网络的同步行为, 它丰富了含耦合时滞和噪声摄动的耦合网络同步动力学的研究结果.

- [1] Huygens C 1669 *Instructions Concerning the Use of Pendulum-Watches for Finding the Longitude at Sea 4* (London: Philos. Trans. R. Soc.) p937
- [2] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares D L, Zhou C S 2002 *Phys. Rep.* **366** 1
- [3] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [4] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [5] Luo Q, Wu W, Li L X, Yang Y X, Peng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1529 (in Chinese) [罗群, 吴薇, 李丽香, 杨义先, 彭海朋 2008 物理学报 **57** 1529]
- [6] Jing X D, Lü L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7539 (in Chinese) [敬晓丹, 吕翎 2009 物理学报 **58** 7539]
- [7] Li Y, Lü L, Luan L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4463 (in Chinese) [李岩, 吕翎, 栾玲 2009 物理学报 **58** 4463]
- [8] Lü L, Zhang C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1462 (in Chinese) [吕翎, 张超 2009 物理学报 **58** 1462]
- [9] Liu J G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 129506
- [10] Arenas A, Guilerá A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C S 2008 *Phys. Rep.* **469** 93
- [11] Chen G R, Wang X F, Li X, Lü J H 2009 *Some Recent Advances in Complex Networks Synchronization* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag) pp3–16
- [12] Li C P, Sun W G, Kurths J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046204
- [13] Wu X J, Lu H T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070511
- [14] Tang H W, Chen L, Lu J A, Tse C K 2008 *Physica A* **387** 5623
- [15] Li Y, Liu Z R, Zhang J B 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 874
- [16] Sun M, Zeng C Y, Tian L X 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** 2162
- [17] Wu X Q, Zheng W X, Zhou J 2009 *Chaos* **19** 013109
- [18] Wu Y Q, Li C P, Wu Y J, Kurths J 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 349
- [19] Zheng S, Bi Q S, Cai G L 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1553
- [20] Sun M, Zeng C Y, Tian L X 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010501
- [21] Wu X J, Lu H T 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 3005
- [22] Dai H, Jia L X, Zhang Y B 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120508
- [23] Yang Z Q, Zhang Q, Chen Z Q 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 2628
- [24] Chen J R, Jiao L C, Wu J S, Wang X H 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060505
- [25] Wu X J, Lu H T 2010 *Phys. Lett. A* **374** 3932
- [26] Maritan A, Banavar J R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1451
- [27] Zhou C S, Kurths J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 230602
- [28] Yang X L, Xu W, Sun Z K 2006 *Phys. Lett. A* **353** 179
- [29] Guan S G, Lai Y C, Lai C H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 046210
- [30] Yang X L, Xu W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2004
- [31] Lin W, Chen G R 2006 *Chaos* **16** 013134
- [32] Xiao Y Z, Tang S F, Xu Y 2006 *Chaos* **22** 013110
- [33] Sun Z K, Yang X L 2011 *Chaos* **21** 033114
- [34] Wang G J, Cao J D, Lu J Q 2010 *Physica A* **389** 1480
- [35] Cao L, Ma Y 2012 *Int. J. Nonlinear Sci.* **13** 373
- [36] Sun Y Z, Li W, Ruan J 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** 989
- [37] Arnold L 1972 *Stochastic Differential Equation and Applications* (New York: Wiley)
- [38] Friedman A 1975 *Stochastic Differential Equations and Applications* (New York: Academic Press)
- [39] Shen Y, Luo Q, Mao X R 2006 *J. Math. Appl.* **318** 134
- [40] Mao X R 2002 *J. Math. Appl.* **268** 125

Generalized projective lag synchronization between delay-coupled networks under circumstance noise*

Zhang Li¹⁾ Yang Xiao-Li^{1)†} Sun Zhong-Kui²⁾

1) (*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

2) (*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

(Received 11 July 2013; revised manuscript received 19 September 2013)

Abstract

It is well known that time delay and random noise are universal in complex networks. However, the research on the synchronization of coupled networks that are subjected to delay-coupling and noise perturbation is very rare. In this paper, for two delay-coupled complex networks with different node dynamics, different topological structures and different numbers of nodes, under circumstance noise, the generalized projective lag synchronization between two networks is proposed for the first time. First, a more realistic theoretical framework is constructed for the drive-response network synchronization. Second, according to the LaSalle-type theorem for stochastic differential delay equations, we rigorously prove that the generalized projective lag synchronization between the drive-response networks can be achieved almost surely, by introducing an appropriate controller. Furthermore, numerical simulation is employed to verify the theoretical analysis. The results indicate that the drive-response networks can indeed achieve generalized projective lag synchronization, and that the synchronization is independent of time delay and scaling factor. Moreover, the remarkable influences of the update gain and the coupling delay on synchronization speed are revealed through the numerical results.

Keywords: complex networks, generalized projective lag synchronization, random noise, time delay

PACS: 05.40.Ca, 05.45.-a, 05.45.Xt, 02.30.Ks

DOI: 10.7498/aps.62.240502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272258, 11172342) and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. GK201302001).

† Corresponding author. E-mail: yangxiaoli@snnu.edu.cn