# 非线性切换系统的动力学行为分析\*

## 张晓芳节 周建波 张春 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院,镇江 212013) (2013年7月8日收到;2013年9月16日收到修改稿)

建立了周期切换下的非线性电路模型,基于子系统平衡点及其稳定性分析,分别给出了其相应的 fold 分岔和 Hopf 分岔条件,讨论了子系统在不同平衡态下由周期切换导致的各种复杂行为,指出切换系统的周期解随参数的变 化存在着倍周期分岔和鞍结分岔两种失稳情形,并相应地导致不同的混沌振荡,进而结合系统轨迹及其相应的分岔分析,揭示了各种振荡模式的动力学机理.

关键词:周期切换,倍周期分岔,鞍结分岔,混沌

**PACS:** 05.45.—a

**DOI:** 10.7498/aps.62.240505

## 1 引言

近年来,一类含有特殊非线性结构的切换系统,如汽车引擎控制系统 <sup>[1]</sup>、智能交通控制系统 <sup>[2]</sup>、电力系统 <sup>[3]</sup>、机器人控制系统 <sup>[4]</sup>、化工过程控制系统 <sup>[5]</sup>等,由于其广泛的工程背景引起了国内外学术界的广泛关注. 所谓切换系统,指的是系统的控制方程会由于满足一定的条件而在不同子系统之间来回切换,如含有双向开关切换的控制电路系统 <sup>[6]</sup>等. 其切换模式大致分为两类: 一类与状态变量有关,即状态变量达到一定的临界值会导致切换;另一类与时间有关,即满足一定的时间关系也会引起子系统之间的切换. 这两类切换模式在系统中有时单独存在,有时则会组合作用.

由于切换会导致系统丰富的动力学现象<sup>[7]</sup>, 而传统的非线性分析方法尚不能很好地处理这类非线性问题, 为深入探讨其复杂行为的机理, 各国学者开展了大量的研究工作. 如: Xie 和 Wang<sup>[8]</sup>分析了时滞切换系统的稳定性; Branicky<sup>[9]</sup> 证明了由有限多个连续子系统组成的切换系统的稳定性; Cheng 等<sup>[10]</sup> 讨论了切换系统的稳定性控制; 吴

天一等 [11] 和余跃等 [12] 分析了电路切换系统在周期切换连接下的振荡行为; Zhang 等 [13] 讨论了Rossler 振子与 Chua 电路之间切换的动力学行为; Sun 等 [14] 提出了通过切换使二维系统产生瞬态混沌的一种方法. 迄今为止, 虽然在切换系统的研究方面取得了大量的成果, 但是, 这些成果大都是针对线性切换系统开展的, 重点探讨系统的平衡点及其稳定性, 并寻求其相应的控制方法或模式 [15]. 即使也有一定的有关非线性切换系统的研究工作, 其重点大都还是针对平衡态及其稳定性开展的, 如王仁明等 [16] 讨论了一类非线性切换系统的稳定性. 所以, 在非线性切换系统的复杂动力学行为方面还需要进行深入细致的研究工作.

本文综合了 Bohöffer-van der Pol 电路 <sup>[17]</sup> 和 Rayleigh<sup>[18]</sup> 振子的特点,建立了基于开关切换的非线性模型,考察了随参数变化的系统动力学演化过程,分析了各种不同的振荡行为,揭示了相应的动力学机理.

# 2 数学模型

考虑如图 1 所示的电路系统, 其中双向开关 SW 在 a 和 b 之间切换. 切换由时间控制. 当 SW 接

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (批准号: 21276115, 11272135)、江苏省 2013 年度普通高校研究生科研创新计划 (批准号: CXZZ13-0653) 和江苏大学高级人才基金 (批准号: 10JDG144) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn

<sup>© 2013</sup> 中国物理学会 Chinese Physical Society

通 a 点, 经过固定时间  $T_1$  后, SW 转接到 b 点, 经过固定时间  $T_2$  后, SW 再转回 a 点, 使得系统的切换周期为  $T=T_1+T_2$ . 两个子电路分别定义为 a 和 b 子系统, 均由一个电感 L, 两个电容 C, 两个额定电阻  $R_0$  和 r, 一个非线性电阻  $R_N$ , 以及一个额定电阻 R 和一个电源 E 组成. 当 SW 位于 a 时  $E=E_1$ ,  $R=R_1$ , 而位于 b 时  $E=E_2$ ,  $R=R_2$ . 设流过电感 L 的电流为  $i_L$ , 电容两端电压分别为  $V_1$  和  $V_2$ , 由此给出两子系统无量纲的数学模型为子系统 a

$$\dot{x} = y - z, 
\dot{y} = -x - g_1 y - \frac{1}{3} y^3 + b_1, 
\dot{z} = x - az, 
t \in [n(T_1 + T_2), n(T_1 + T_2) + T_1];$$
(1)

子系统 b

$$\dot{x} = y - z, 
\dot{y} = -x - g_2 y - \frac{1}{3} y^3 + b_2, 
\dot{z} = x - az, 
t \in [n(T_1 + T_2) + T_1, (n+1)(T_1 + T_2)];$$
(2)

其中,

$$x = i_L, \quad y = V_1, \quad z = V_2,$$
  $g_i = \frac{1}{R_0 + R_i},$   $a = \frac{1}{r}, \quad b_i = g_i E_i \quad (i = 1, 2).$ 

双向开关 SW 在两个子系统 a 与 b 之间来回切换,会产生一类非光滑点,即切换点,由此来连接由两子系统定义的轨道. 其中切换周期以及两子系统的行为及其分岔模式都会对切换系统的动力学演化过程产生影响. 因此,首先对两子系统的各种稳态解及其相应的分岔特性进行分析.

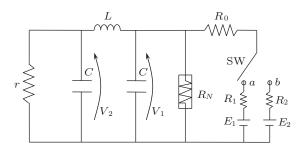


图 1 切换系统电路图

## 3 子系统的平衡点及稳定性分析

子系统 a 和 b 的方程可以统一表示为

$$x = y - z,$$
  
 $\dot{y} = -x - g_i y - \frac{1}{3} y^3 + b_i,$   
 $\dot{z} = x - az$   
 $(i = 1, 2),$  (3)

则平衡点可表示为  $E(ay_0, y_0, y_0)$ , 其中  $y_0$  满足如下条件:

$$-\frac{1}{3}y_0^3 - (a+g_i)y_0 + b_i = 0. (4)$$

相应的 Jacobian 矩阵的特征方程为

$$\lambda^{3} + (a + g_{i} + y^{2}) \lambda^{2} + (2 + ag_{i} + ay^{2}) \lambda$$
$$+ g_{i} + a + y^{2} = 0.$$
 (5)

由 Routh-Hurwitz 准则可知, 当  $g_i + y^2 + a > 0$  且  $(a+g_i+y^2)(1+ag_i+ay^2) > 0$  时, 系统平衡点将会是稳定的, 根据条件, 可以得到两种分岔, 即 fold 分 岔和 Hopf 分岔, 其对应的分岔条件分别为

fold: 
$$\begin{cases} -\frac{1}{3}y^3 - (a+g_i)y + b_i = 0, \\ g_i + y^2 + a = 0, \end{cases}$$
 (6)

Hopf: 
$$\begin{cases} -\frac{1}{3}y^3 - (a+g_i)y + b_i = 0, \\ (g_i + a + y^2)(1 + ag_i + ay^2) = 0. \end{cases}$$
(7)

fold 分岔和 Hopf 分岔可以把参数空间划分为对应于不同平衡点特性的多个区域,图 2 所示为当参数 a = -0.55 时的分岔集,它把参数空间分为了三个区域.

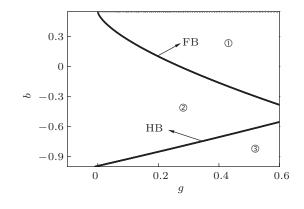


图 2 参数空间划分图

当参数位于区域①中时, 系统只存在一个平衡点, 例如当固定  $g_i = 0.6$ ,  $b_i = 0.3$  时, 系统存在一

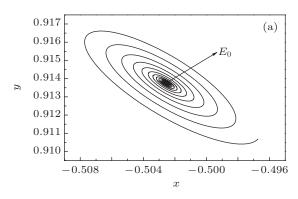
个稳定的焦点为  $E_0 = (-0.5025, 0.9137, 0.9137)$ (图 3(a)); 而当参数分布在区域②时, 系统有三个平衡点, 如固定  $g_i = 0.2$ ,  $b_i = -0.1$  时, 三个平衡点分别为

$$E_1 = (0.4563, -0.8297, -0.8297),$$
  
 $E_2 = (0.1736, -0.3157, -0.3157)$ 

和

$$E_3 = (-0.6290, 1.1454, 1.1454),$$

其中  $E_1$  和  $E_3$  是稳定的焦点,  $E_2$  为不稳定的焦点. 当参数在穿越 Hopf 分岔线由区域②到区域③时, 平衡点  $E_1$  和  $E_3$  发生 Hopf 分岔, 产生一个不稳定的极限环和一个稳定的极限环, 致使在区域③中产生周期振荡解, 如图 3(b) 所示为当  $g_i=0.6, b_i=-0.8$ 时, 围绕平衡点的稳定极限环.



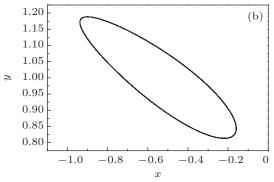


图 3 子系统相图 (a)  $g_i = 0.6$ ,  $b_i = 0.3$ ; (b)  $g_i = 0.6$ ,  $b_i = -0.8$ 

# 4 切换系统的 Floquet 特征乘子计算方 法及分岔分析

## 4.1 Floquet 特征乘子计算方法

在周期切换连接作用下, 系统向量场连续但不 光滑, 会产生非光滑分岔. 下面我们就引入局部映 射,构造 Poincaré 映射来分析切换系统的不动点, 引入周期切换系统的 Floquet 特征乘子的计算方法, 来分析非光滑系统特有的动力学特性.

设  $\varphi_i$  为周期切换系统  $\dot{x} = f_i(x,t), x \in \mathbb{R}^3$  的两子系统的解. 由于整个系统在两个子系统之间周期切换, 存在两个局部超平面:

$$\Pi_{1} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{3} \times \mathbb{R}^{t} \middle| t = (i+1)T_{1} + iT_{2} \right\}, \tag{8}$$

$$\Pi_{2} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{3} \times \mathbb{R}^{t} \middle| t = (i+1)(T_{1} + T_{2}) \right\}. \tag{9}$$

取定  $\Pi_1$  为 Poincaré 截面, 则 Poincaré 映射可由两个局部映射复合得到, 即

$$P = P_2 \circ P_1, \tag{10}$$

其中:

$$P_{1}: \Pi_{1} \to \Pi_{2},$$

$$(x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', T_{1}) = \varphi_{1}(T_{1}, x, y, z); \quad (11)$$

$$P_{2}: \Pi_{2} \to \Pi_{1},$$

$$(x', y', z', T_{1}) \mapsto \varphi_{2}(T_{2}, x', y', z')$$

$$= \varphi_{2}(T_{2}, \varphi_{1}(T_{1}, x, y, z))$$

$$= \varphi_{2} \circ \varphi_{1}(T_{1} + T_{2}, x, y, z). \quad (12)$$

Poincaré 映射 P 的不动点与切换系统的周期解对应, 如果 Poincaré 映射 P 有 k 个周期点, 则系统便具有  $k(T_1+T_2)$  周期解. 数值上可以采用 Newton-Raphson 迭代方法求方程 P(X) = X 的解进而求 Poincaré 映射 P 的不动点. 假设 u 为映射 P 不动点的迭代值, 迭代公式为

$$u^{i+1} = u^{i} - \frac{P(u_i) - u_i}{DP(u_i) - E},$$
(13)

其中, DP 是映射 P 的 Jacobi 矩阵, E 为单位矩阵. DP 的计算可以借助于  $P_1$ ,  $P_2$  的 Jacobi 矩阵, 如下所示:

$$DP(u_i) = DP_2 \times DP_1(u_i), \qquad (14)$$

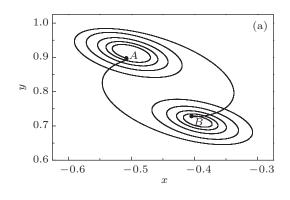
可以通过非光滑线性分析的打靶法和 Runge-Kutta 算法, 通过对周期积分来计算  $DP_1$  与  $DP_2$  的值. 在上述不动点的计算中, 同时得到 Poincaré 映射 P 的 Jacobi 矩阵, 再利用矩阵 QR 法求 DP 的特征值, 得

到系统的 Floquet 特征乘子. 根据 Floquet 理论, 系统周期解的稳定性及分岔条件如下:

- 1) 当所有特征值的模都小于 1 时, 系统的周期 解是渐近稳定的;
- 2) 当一个特征值通过 -1 穿过单位圆, 而其他特征值的模都小于 1 时, 系统的周期解产生倍周期分岔;
- 3) 当一个特征值通过 1 穿过单位圆, 而其他特征值的模都小于 1 时, 系统的周期解产生鞍结分岔.

## 4.2 数值计算与分析

通过分析可知,子系统动力特性随参数的变化而变化 (如图 2),这些特性将会对切换系统的动力学行为产生影响.例如,当子系统参数取在区域②时,两子系统均为稳定的焦点,在切换系统中则可表现为焦点与焦点切换 (如图 4(a)).而当子系统参数取在区域③时,两子系统经过 Hopf 分岔产生周期运动,则切换系统表现为周期解与周期解切换(如图 4(b)).当子系统 a 参数处于区域②子系统 b 参数处于区域③时,子系统分别为稳定的焦点和周期解,相应的切换系统呈现出焦点与周期解的切换(如图 7(a)).



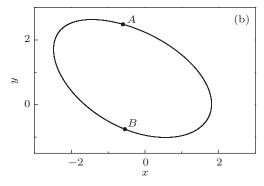
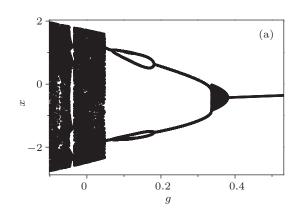


图 4 切换系统相图 (a) 焦点与焦点切换; (b) 周期与周期切换

取定参数 a = -0.55,  $b_1 = -0.80$ ,  $b_2 = 0.30$ , 以  $g_1 = g_2 = g$  为分岔参数, 给出切换系统的分岔图 (如图 5 所示), 以此来探讨切换系统的动力学演化过程.

从分岔图 (图 5(a)) 可以看到, 当 g = 0.0565 时系统做稳定的  $2(T_1 + T_2)$  周期运动, 随着 g 的增加, 在 g = 0.0681 处产生倍周期分岔, 产生  $4(T_1 + T_2)$  周期解,继续增加 g,系统并没有由倍周期分岔导致混沌,而是在 g = 0.1812 处由倒倍周期分岔重新产生稳定的  $2(T_1 + T_2)$  周期解,随着 g 的进一步增加,在 g = 0.3362 时直接导致混沌.在另一个参数区域 (图 5(b)),当 g 取 -0.0376 时系统为  $4(T_1 + T_2)$  运动,随着 g 的减小,系统在 -0.0410 处发生倍周期分岔产生了  $8(T_1 + T_2)$  解,最终进一步倍周期分岔导致了混沌.下面结合 Floquet 特征乘子的计算细述其分岔特性.



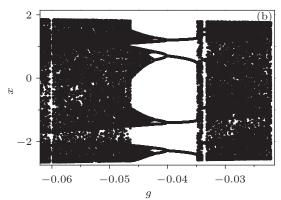


图 5 以 g 为参数的切换系统分岔图 (a) -0.05 < g < 0.45; (b) -0.06 < g < -0.02

### 4.2.1 倍周期与倒倍周期分岔

当 0.0480 < g < 0.0680 时, 经计算可知系统所有的 Floquet 特征乘子均在单位圆内, 而在 g = 0.0681 处有一 Floquet 特征乘子通过 -1 穿出单位圆, 如表 1 所示.

根据 Floquet 理论, 表明系统出现了倍周期分 岔, 由稳定的  $2(T_1+T_2)$  周期解变为  $4(T_1+T_2)$  周期解 (如图 5(a)).

在 0.1812 < g < 0.3340 区域, 切换系统所有的 Floquet 特征乘子均在单位圆内, 即特征值的模均小于 1, 而在 g = 0.1812 处有一 Floquet 特征乘子通过 -1 穿出单位圆, 如表 2 所示. 根据 Floquet 理论可知, 在 g = 0.1812 处, 系统发生倒倍周期分岔, 由稳定的  $4(T_1 + T_2)$  周期解变为 0.1812 < g < 0.3340 内的稳定的  $2(T_1 + T_2)$  周期解,此结果与分岔图 5(a) 一致.

表 1 0.0650 < g < 0.0681 时切换系统的 Floquet 特征乘子

<i>g</i>	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
0.0650	-0.90406	-0.07306	0
0.0660	-0.93704	-0.07088	0
0.0670	-0.96857	-0.06899	0
0.0680	-0.99872	-0.06735	0
0.0681	-1.00167	-0.06720	0

表 2 0.1812 < g < 0.1940 时切换系统的 Floquet 特征乘子

g	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
0.1940	-0.80299	-0.24983	0
0.1840	-0.96074	-0.20058	0
0.1820	-0.98922	-0.19305	0
0.1815	-0.99621	-0.19125	0
0.1812	-1.00038	-0.19019	0

#### 4.2.2 鞍结分岔

当 0.1813 < g < 0.3361 时, 系统所有的 Floquet 特征乘子均在单位圆内, 而在 g = 0.3362 处, 有一 Floquet 特征乘子通过 1 穿过单位圆, 如表 3 所列. 根据 Floquet 理论可判断, 系统之前做稳定的周期 2 运动, 而在 g = 0.3362 处发生鞍结分岔, 系统由稳定的周期 2 解经鞍结分岔通往混沌 (图 6).

总之, 切换系统的两子系统间进行周期切换时得到的周期解是渐近稳的, 并可通过倍周期分岔和鞍结分岔两种方式进入混沌, 同时, 切换系统还存在倒倍周期分岔. Floquet 理论可以对周期切换运动的稳定性和分岔行为进行分析, 所得结果与分岔

#### 图一致.

表 3 0.3340 < g < 0.3362 时切换系统的 Floquet 特征乘子

g	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
0.3340	0.70484	0.39327	0
0.3350	0.80657	0.35014	0
0.3360	0.98620	0.29916	0
0.3361	0.99504	0.29716	0
0.3362	1.01399	0.27021	0

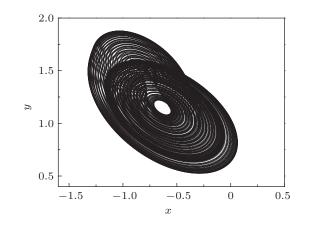


图 6 系统混沌相图

# 5 切换系统振荡行为机理

切换系统以时间作为控制条件在两个子系统 之间来回切换,下面利用系统相图和时间历程对其 不同的振荡机制进行分析.

#### 5.1 周期振荡机制

当 g = 0.4012 时, 子系统 a 为稳定的极限环, 子系统 b 为稳定的焦点. 假设最初开关位置置于 a 点, 以点 A 作为计时起点, 记为 t = 0. 在  $[0,T_1]$  时间内, 轨迹将从 A 点开始沿着子系统 a 的轨迹线 ACB 旋转并逐渐趋向于稳定的极限环. 当轨迹运动到点 B 时, 即  $t = T_1$  时刻, 满足周期切换的条件, 系统由子系统 a 切换到子系统 b. 此后, 系统又将以 B 点作为初值点, 向子系统 b 的稳定的焦点逼近, 即按图 7中所示轨迹线 BDA 运动. 在  $t = T_1 + T_2$  时刻, 系统将重新满足周期切换的条件, 此时轨迹刚好重新回到切换点 A 且再次以之为初值点, 受子系统 a 控制, 趋于其稳定的极限环. 上述过程重复进行, 便会产生周期为  $T_1 + T_2$  的周期解.

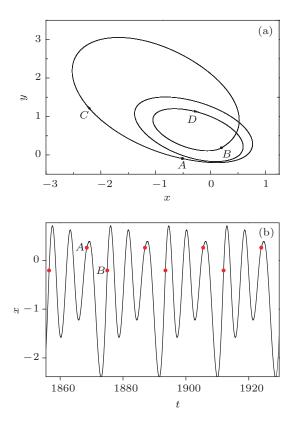


图 7 系统 g = 0.4012 时的周期  $T_1 + T_2$  解 (a) 相图; (b) 时间 历程

#### 5.2 倍周期分岔及混沌振荡机制

随着 g 的变化, 当 g = 0.3350 时将会产生具有 4 个切换点的周期  $2(T_1 + T_2)$  解 (如图 8), 切换点由 原来的两个变为四个, 这表示切换系统的轨迹在每一周期内在两子系统间来回震荡两次.

类似于周期振荡机制, 系统首先在子系统 a 中振荡, 即从点  $A_1$  开始运动时间  $T_1$  之后, 到达 b 子系统, 再以  $B_1$  为起点, 进入子系统 b 中振荡. 直到  $t=T_1+T_2$  时刻, 系统再次发生切换回到子系统 a. 由于 g 的变化, 切换系统的轨迹发生变化, 使得在  $T_1+T_2$  时刻, 轨迹无法重新回到初始切换点  $A_1$ , 而是沿轨迹  $B_1D_1A_2$  到达点  $A_2$ , 进入子系统 a 中运动. 由于改变了初值, 从  $A_2$  出发的轨迹线将不会与  $[0,T_1]$  时间内从  $A_1$  出发的轨迹线重合. 轨迹将会沿  $A_2C_2B_2$  运动到点  $B_2$ , 进入子系统 b 中运动, 趋于其稳定的焦点. 在  $t=2(T_1+T_2)$  时, 轨迹又回到点

 $A_1$ , 因此就构成了一个封闭的周期切换系统的周期  $2(T_1 + T_2)$  解.

因为切换系统发生倍周期分岔,导致系统轨道上的切换点成倍增加,切换系统轨迹将会被四个切换点划分为四个部分,并且分别受两子系统控制,而且切换位置不重合.随着参数的进一步变化,切换系统的轨道继续发生改变,将依次由倍周期分岔到倒倍周期分岔,直至混沌的产生(如图 9).

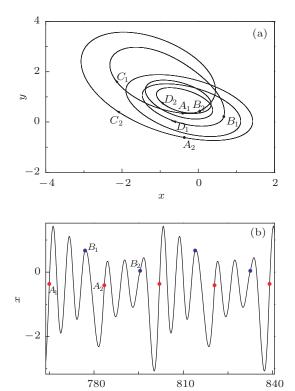


图 8 系统 g = 0.3350 时的周期  $2(T_1 + T_2)$  解 (a) 相图; (b) 时间历程

# 6 结 论

当参数选择在不同的分岔区域时,子系统存在着各种不同的平衡态,这些平衡态会直接影响到切换系统的动力学特性,使得切换系统呈现出不同的动力学行为.在周期切换下,切换系统通常会表现为周期振荡,而这种周期振荡会随着参数的变化通过倍周期分岔或鞍结分岔失稳,进而导致不同的混沌振荡.

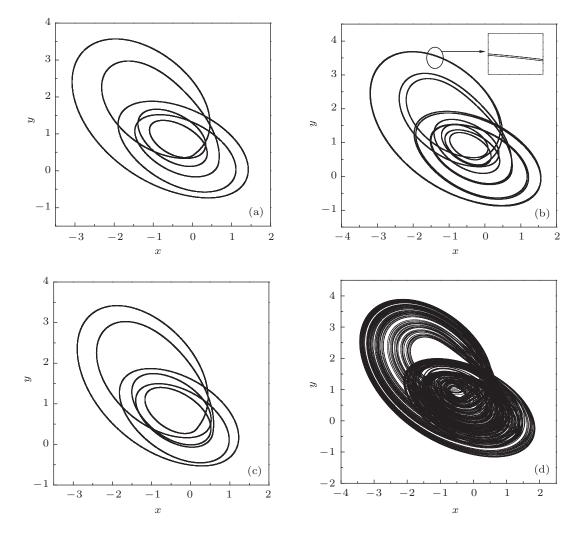


图 9 系统相图 (a) g = 0.335; (b) g = 0.142; (c) g = 0.048; (d) g = 0.02

- [1] Wyczalek F A 2001 IEEE Aero. El. Sys. Mag. 16 15
- [2] Varaiya P P 1993 IEEE Trans. Automat. Contr. 38 195
- [3] Wang Y B, Han Z J, Luo Z W 1997 Contr. Deci. 12 403
- [4] Shi Y Q 2001 Proceedings of ICII Beijing International Conferences on Info-tech and Info-net Beijing, China, October 29, 2001 p85
- [5] Hiskens I A 2001 Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control Orlando, USA, December 4–7, 2001 p774
- [6] Ueta T, Kawakami H 2002 International Symposium on Circuits and Systems (Japan: Toskushima) pII–544
- [7] Zhang Z D, Bi Q S 2011 Proceedings of the 13th of the National Nonlinear Vibration Tianjin, China p167
- [8] Xie G M, Wang L 2005 J. Math. Anal. Appl. 305 277
- [9] Branicky M S 1998 IEEE Trans. Automat. Contr. 43 475
- [10] Cheng D, Guo L, Lin Y, Wang Y 2005 IEEE Trans. Automat. Contr. 50 661

- [11] Wu T Y, Zhang Z D, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 070502 (in Chinese) [吴天一, 张正娣, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 070502]
- [12] Yu Y, Zhang C, Han X J, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200507 (in Chinese) [余跃, 张春, 韩修静, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 200507]
- [13] Zhang C, Yu Y, Han X J, Bi Q S 2012 Chin. Phys. B 21 100501
- [14] Sun C C, Xu Q C, Sui Y 2013 Chin. Phys. B 22 030507
- [15] Dong X P, Ma G L 2004 *J. Hefei Univ. Technol.* **27** 10 (in Chinese) [董学平, 马国梁 2004 合肥工业大学学报 **27** 10]
- [16] Wang R M, Guan Z H, Liu X Z 2004 Syst. Engineer. Electron. **26** 1 (in Chinese) [王仁明, 美治洪, 刘新芝 2004 系统工程与电子技术 **26**
- [17] Nishiuchi Y, Ueta T, Kawakami H 2006 Chaos Solition. Fract. 27 941
- [18] Kousaka T, Ueta T, Ma Y, Kawakami H 2006 Chaos Solition. Fract. 27 1019

# Analysis of dynamical behaviors in a nonlinear switching circuit system\*

Zhang Xiao-Fang<sup>†</sup> Zhou Jian-Bo Zhang Chun Bi Qin-Sheng

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 8 July 2013; revised manuscript received 16 September 2013)

#### **Abstract**

A nonlinear circuit model with periodic switching is established. The fold bifurcation and Hopf bifurcation sets of the subsystems are derived via the analysis of the relevant equilibrium points as well as the stabilities. Complex dynamical behaviors caused by periodic switching in various equilibrium states of subsystems are investigated. The results show that there exist two types of destabilizing cases, i.e., period-doubling bifurcation and saddle-node bifurcation, in the variation of periodic solution to the switching system with parameter, leading to different forms of chaotic oscillations correspondingly. Furthermore, by analyzing the the phase trajectory and its corresponding bifurcation, the mechanisms for different types of oscillations are presented, which can explain some phenomena of the switched dynamical system.

Keywords: periodic switching, period-doubling bifurcation, saddle-node bifurcation, chaos

**PACS:** 05.45.—a **DOI:** 10.7498/aps.62.240505

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 21276115, 11272135), the Scientific Research Innovation Foundation of Jiangsu Province of 2013, China (Grant No. CXZZ13-0653), and the Senior Qualified Personal Foundation of Jiangsu University, China (Grant No. 10JDG144).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn