

## 最优的 Newman-Watts 网络与遍历网络的同步\*

王利利 乔成功 唐国宁†

(广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

(2013年6月6日收到; 2013年9月27日收到修改稿)

在 Hindmarsh-Rose 神经元动力系统中研究了 Newman-Watts (NW) 网络的同步, 给出了一些最优同步网络的拓扑结构. 数值结果表明: NW 网络的同步能力主要由耦合点在耦合空间的分布决定, 耦合点分布均匀的 NW 网络一般具有较强的同步能力; 在给定连边数的情况下, 可能存在多个结构不同的最优同步网络, 最优同步网络具有最强的同步能力、均匀的度分布和较好的对称性, 但是其对称性不一定是最好的. 最优同步网络一般是非规则网络, 但在少数情况下, 规则网络也有可能是最优同步网络. 提出了一种新的网络——遍历网络, 该网络具有最优同步网络的特点和很强的同步能力.

**关键词:** Newman-Watts 网络, 对称度, 耦合空间, 同步

**PACS:** 05.45.Xt, 87.19.lj, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.240510

## 1 引言

同步是自然界中广泛存在的一类重要现象, 从物理系统<sup>[1,2]</sup>到化学系统<sup>[3,4]</sup>、生物系统<sup>[5-8]</sup>等都可以观察到同步现象. 自从 1998 年 Watts 和 Strogatz<sup>[9]</sup>提出 WS 小世界网络模型和 1999 年 Barabási 和 Albert<sup>[10]</sup>提出无标度网络模型后, 人们对这两种网络的同步问题进行了大量研究. 结果表明, 小世界网和无标度网比规则网更容易同步<sup>[11-13]</sup>, 因为网络中“捷径”的存在会提高网络的同步能力<sup>[14]</sup>. 通过研究网络的各种拓扑成分对网络同步能力的影响, 人们发现: 小世界网和一些无标度网络的不均匀性会抑制网络的同步<sup>[14-18]</sup>, 可用最大介数描述网络的同步能力<sup>[15]</sup>. 赵明等<sup>[19]</sup>认为, 只有用网络的平均距离和度分布的标准方差才能保证较好地描述网络的同步能力, 且二者均较小的网络同步能力更强. McGraw 和 Menzinger<sup>[20]</sup>则认为簇系数是影响网络同步能力的关键因素, 增加簇系数可抑制网络的全局同步等. 上述提到的网络拓扑结构的特征量在一定程度上反映了网络的同步能力, 具体是哪种成分起关键作用, 目前仍需详

细研究.

为了定量衡量网络的同步能力, 人们相继提出很多判据. 最初由 Pecora 和 Carroll<sup>[21]</sup>给出了主稳定函数 (master stability function) 判据, 当最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{\max} < 0$  时, 网络可实现同步. Barahona 和 Pecora<sup>[13]</sup>提出通过计算耦合矩阵特征值比  $Q$  ( $Q = \lambda_N / \lambda_2$ ) 来确定网络的同步能力,  $Q$  值越小, 网络的同步能力就越强. 汪小帆和陈关荣<sup>[12]</sup>则认为网络的同步能力与耦合矩阵的非零最大特征值有关. 显然, 这些判据不仅存在计算复杂和难求解等缺点, 更重要的是不能直观反映网络拓扑结构的特点, 以方便给出同步能力最强的网络 (最优同步网络).

掌握最优同步网络的结构, 不仅可以清楚地知道网络的同步能力与什么因素有关, 还可以提出构造最优同步网络的方法, 这些结果在计算机和神经科学领域可能存在潜在的应用<sup>[22]</sup>, 因此人们一直在关注最优同步网络问题<sup>[23-25]</sup>. 最近, Donetti 等<sup>[22]</sup>还提出了一种纠缠网 (entangled networks), 该网络具有较好的同步能力, 但是该网络要求每次必须增加 4 条边, 形成的是规则网络, 因此该网络不一定是最优同步网络.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11165004) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: tangguoning@sohu.com

1999年, Newman和Watts对WS小世界网络模型做了少许改动,提出了另一个相近但较好的NW小世界网络模型<sup>[26]</sup>,其做法是不断开原来环形初始网络的任何一条边,而只是在随机选取的节点对之间增加一条边.这样在网络的形成过程中避免出现孤立的节点簇,因此在复杂网络的研究中被广泛使用.本文采用Hindmarsh-Rose(HR)神经元模型<sup>[27]</sup>研究了NW网络的同步能力,引入耦合空间和网络的对称度,给出了最优同步网络的结构.数值研究结果显示,网络的同步能力与耦合点在耦合空间中的均匀分布有密切关系.最优同步网络具有均匀的耦合点分布和度分布,但是对称度不一定是最高的;改变网络的尺寸(神经元的个数)和新增连边(除最近邻连边之外的其他连边)数,最优同步网络的结构将发生改变,以保证耦合点分布的均匀性.根据最优同步网络的特点,我们提出了一种新的网络模型——遍历网络.经研究发现,遍历网络具有最优同步网络的特点,其同步能力远强于随机加边产生的NW网络.先介绍本文提出的网络模型和耦合空间;然后研究该网络的同步能力,给出最优同步网络;接着提出遍历网络模型,给出遍历网络模型同步能力的数值模拟结果;最后是结论.

## 2 模型与耦合空间

我们考虑由 $N$ 个等价的HR神经元耦合形成的网络,神经元被安置在一个闭合的环上,神经元之间除存在最近邻耦合外,还存在非近邻耦合,对应的连边记为新增连边,并用 $M_L$ 表示新增连边数,这种网络称为NW网络<sup>[26]</sup>.神经元的位置用网络节点坐标 $i$ 标记,网络的动力学方程如下<sup>[27]</sup>:

$$\dot{x}_i = y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I_{\text{ext}} + c \sum_{j=1}^N l_{ij}x_j, \quad (1a)$$

$$\dot{y}_i = e - dx_i^2 - y_i, \quad (1b)$$

$$\dot{z}_i = r[s(x_i - x_0) - z_i], \quad (1c)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 $x$ 代表神经细胞的膜电位, $y$ 和 $z$ 分别代表快、慢离子电流, $I_{\text{ext}}$ 为外界激励电流.系统参数分别取: $a = 1.0, b = 3.0, e = 1.0, d = 5.0, r = 0.006, s = 4.0, x_0 = -1.6$ ,这样单个神经元处于时空混沌态. $c$ 为耦合强度, $\mathbf{L} = (l_{i,j})_{N \times N}$ 为耦合矩阵.对于耦合矩阵的非对角元素, $l_{i,j} = 1$ 表示神经元 $i$ 和神经元 $j$ 之间

存在耦合, $l_{i,j} = 0$ 则代表这两个神经元之间不存在耦合.对角元素满足

$$l_{i,i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N l_{i,j}. \quad (2)$$

采用四阶龙格库塔法解方程组(1),时间步长取 $\Delta t = 0.001$ .为了研究网络的同步,定义同步差 $\sigma$ 为

$$\sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N |x_i - x_1|, \quad (3)$$

当 $\sigma = 0$ 时,网络达到全局同步.在本文中,如果在 $t = 20000$ 时刻 $\sigma < 10^{-11}$ ,就认为网络达到全局同步.网络实现全局同步需要的耦合强度越小,网络的同步能力越强.反之,网络的同步能力就弱.

考虑到网络的同步能力与网络的对称性和度分布等很多因素有关,为了便于描述网络的对称性和均匀性,我们引入耦合空间,它就是全局耦合下非对角矩阵元支撑的空间. $l_{i,j} = 1$ 与该空间一个点 $(i, j)$ 对应,这样的点称为耦合点,规定耦合空间只取左斜上半空间(即在 $i > j$ 的情况下与耦合矩阵元 $l_{i,j}$ 对应的空间).利用物体质心概念定义网络的耦合距离 $\delta$ 如下:

$$\delta = \sqrt{(X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2}, \quad (4)$$

其中 $(X, Y)$ 为一般网络的耦合点中心:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N il_{i,j}}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N l_{i,j}}, \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N jl_{i,j}}{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N l_{i,j}}, \quad (5)$$

$(X_c, Y_c)$ 为全局耦合网的耦合点中心. $\delta$ 的大小与网络的度分布、新增连边数和网络的结构有关,在一定程度上反映了耦合点在耦合空间的均匀性.由于具有相同 $\delta$ 值的不同网络,耦合点在耦合空间的分布情况存在较大差异,导致网络的同步能力不相同,所以 $\delta$ 还不能精确描述网络的同步能力.

网络中所有新增连边均同时沿闭合环顺时针转动,每转一个节点,相当于各神经元的坐标值都增加1,得到一种网络,直到所有新增连边均旋转一周,得到 $N$ 种网络,它们虽然有相同的拓扑结构,但是这 $N$ 种网络对应耦合点在耦合空间的分布是不同的,即存在有 $N$ 个可能的 $\delta$ 值.假设这 $N$ 个 $\delta$ 值只有 $\xi$ 个 $\delta$ 值是不同的, $\xi$ 越小,网络的对称性越高,我们定义 $\xi$ 为网络的对称度.考虑到一种网络

拓扑结构对应有  $\xi$  个不同的  $\delta$  值, 下面规定一种网络拓扑结构的  $\delta$  应该取各种可能值的最小值.

### 3 NW 网络的同步能力与最优同步网络

网络的同步能力与网络的度分布有关, 网络的度分布可以用一个矢量  $\psi = (q_1, q_2, \dots, q_m, \dots, q_{N-1})$  来描述, 其中  $q_m$  表示度为  $m$  的节点个数. 网络的同步能力可用临界耦合强度表示, 在给定网络拓扑结构下, 由方程 (1) 描述的神经网络存在一个临界耦合强度  $c_{th}$ , 当  $c \geq c_{th}$  网络都可以实现全局同步. 例如具有 10 个神经元的最近邻耦合网络, 其临界耦合强度  $c_{th} = 2.32$ . 具有不同拓扑结构的网络, 可能具有相同的  $c_{th}$ , 我们就说这些网络具有相同的同步能力. 在给定连边数下, 具有最小  $c_{th}$  的网络称为最优同步网络.

为进一步了解网络同步能力与什么因素有关, 图 1 给出了只有 10 个神经元和  $N_L = 2$  的一些 NW 网络, 这些网络对应耦合空间中耦合点的分布情况如图 2 所示, 对应的临界耦合强度、耦合距离和网络的对称度已经标注在图 2 相应的图中. 从图 1 可以看出: 图 1(c) 与 (d) 有相同的度分布  $\psi = (0, 7, 2, 1, 0, 0, 0)$ , 其他图具有相同的度分布  $\psi = (0, 6, 4, 0, 0, 0, 0)$ , 后者的度分布更均匀, 因为网络只存在度为 2 和 3 的节点; 有三种形式的网络拓扑结构, 即长程连边呈人字形连接, 长程连边交叉

和不相交; 各网络具有不同的对称性, 图 1(a), 1(b), 1(c), 1(f) 和 1(h) 的网络均以环的直径 (长程连边) 为对称轴.

从图 2 可以直观地看出: 1) 图 2(a) 中网络的度分布和耦合点分布都是均匀的, 对应  $c_{th}$  最小, 网络的同步能力最强, 是  $N_L = 2$  情况下的最优同步网络, 但该网络不具有最小的耦合距离和最小的对称度, 其耦合距离接近图 1 中 8 个网络耦合距离的平均值; 图 2(c), 2(d), 2(f) 至 2(h) 的耦合点分布不如图 2(a) 的耦合点分布均匀, 所以同步能力相对较弱, 这表明耦合点分布均匀的网络具有较强的同步能力; 2) 图 1(b) 和 1(e) 是由图 1(a) 中两条新增连边  $l_{1,7}$  和  $l_{4,9}$  的末端各移动一个节点得到的, 而且图 2(a), 2(b), 2(e) 三者对应耦合点的分布都很均匀, 所以图 1(b), 1(e) 所示的网络同步能力接近图 1(a) 所示的最优同步网络; 显然, 三者耦合点分布的均匀程度存在一定差别, 但目前还无法用  $\delta$  精确描述这种差别; 3) 对称度和耦合距离都较大的网络同步能力不强 (这里没有给出对称度为 10 和耦合距离较大的网络结构), 是因为耦合点分布不均匀; 4) 通常认为增加连边可以促进同步, 然而图 2(g) 和 (h) 的结果表明, 这两种网络的同步能力与最近邻耦合网络的同步能力差不多, 可见, 不适当的连边不能有效地提高网络的同步能力; 5) 十字形连边网络的同步能力比人字形连边网络强, 平行连边的网络同步能力最差, 原因是耦合点分布相对不均匀.

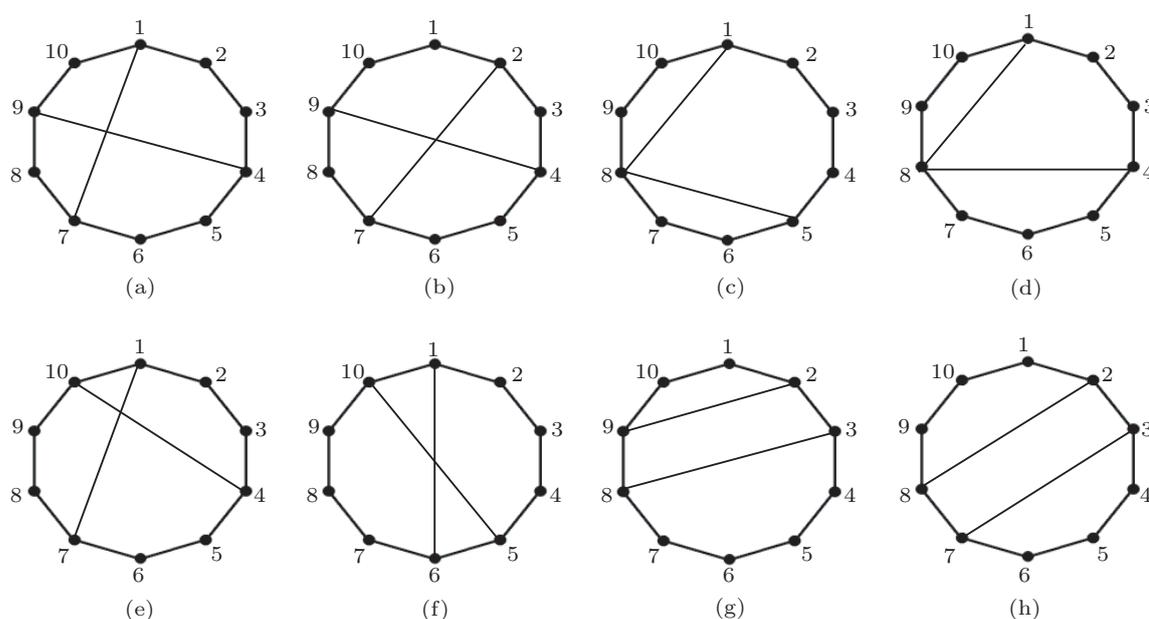


图 1 具有 10 个节点和两条新增连边的不同拓扑结构的 NW 网

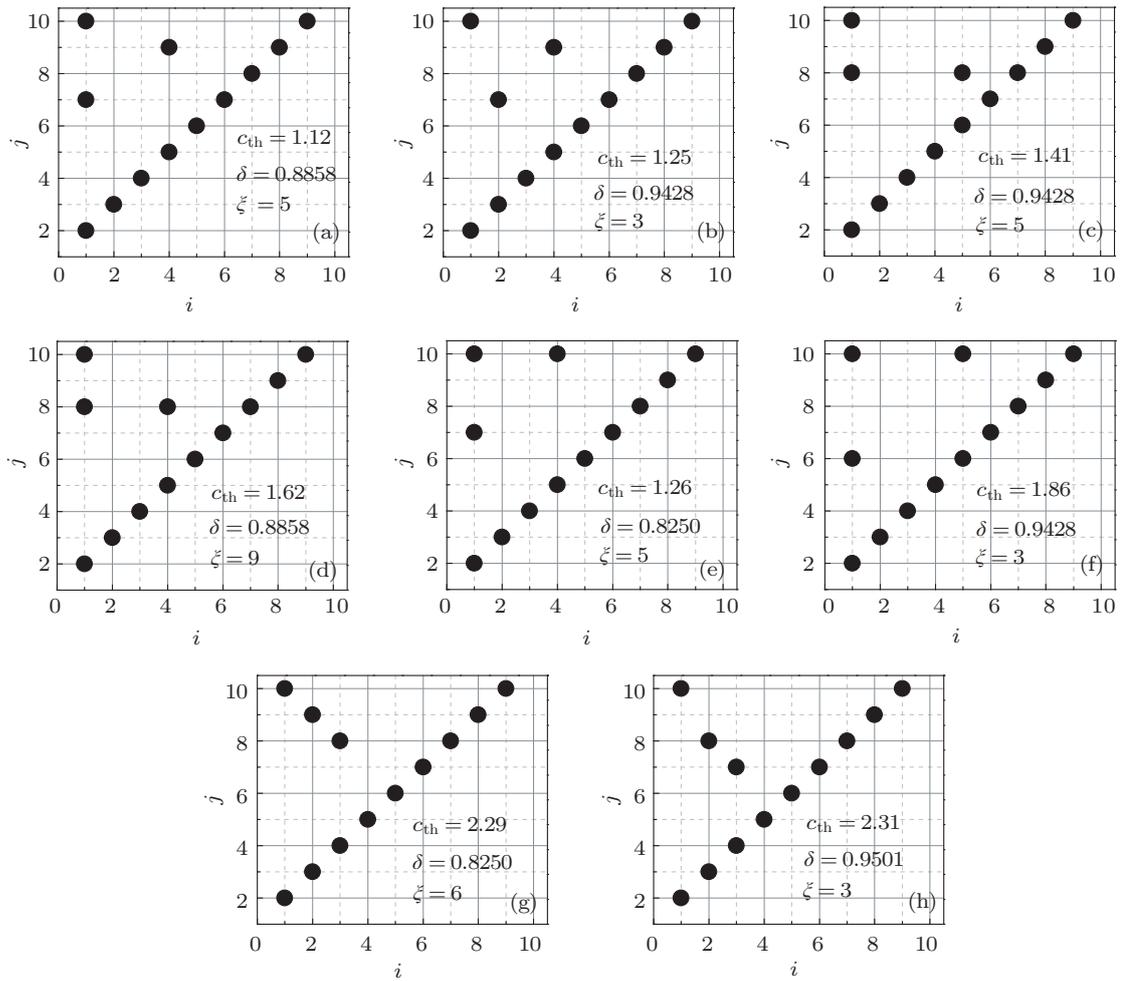


图2 对应图1中各网络在耦合空间中耦合点的分布,图中标出了相应网络的临界耦合强度  $c_{th}$ , 耦合距离  $\delta$  和对称度  $\zeta$

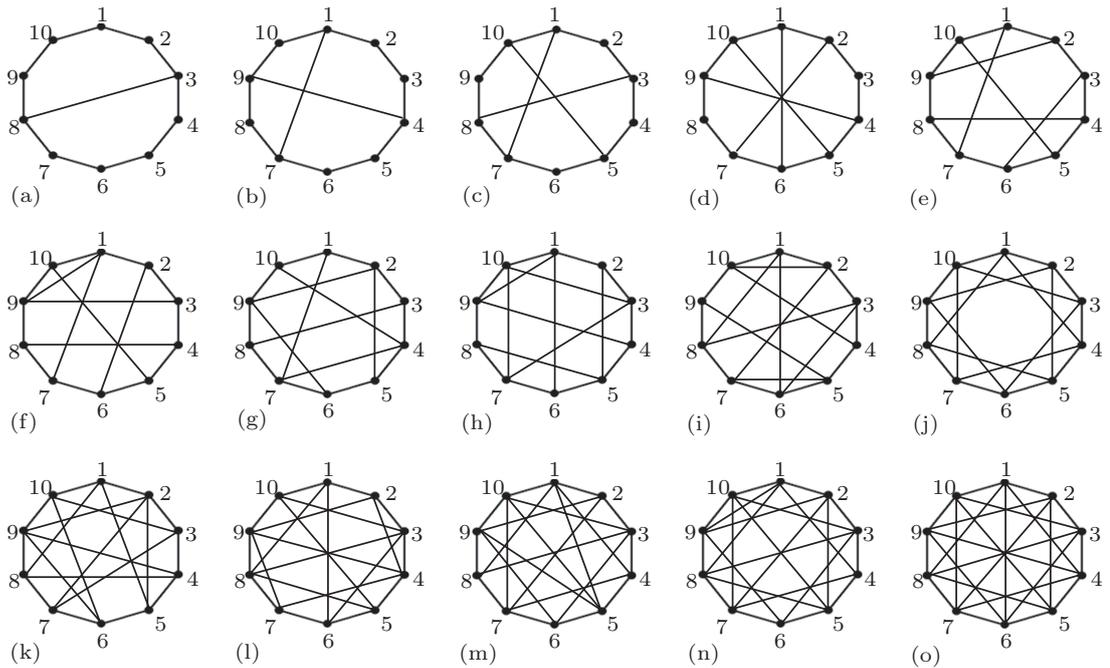


图3 具有10个神经元和不同  $M_L$  值的最优同步网络,从(a)到(o)  $M_L$  依次增加1,分别对应1到15条新增连边

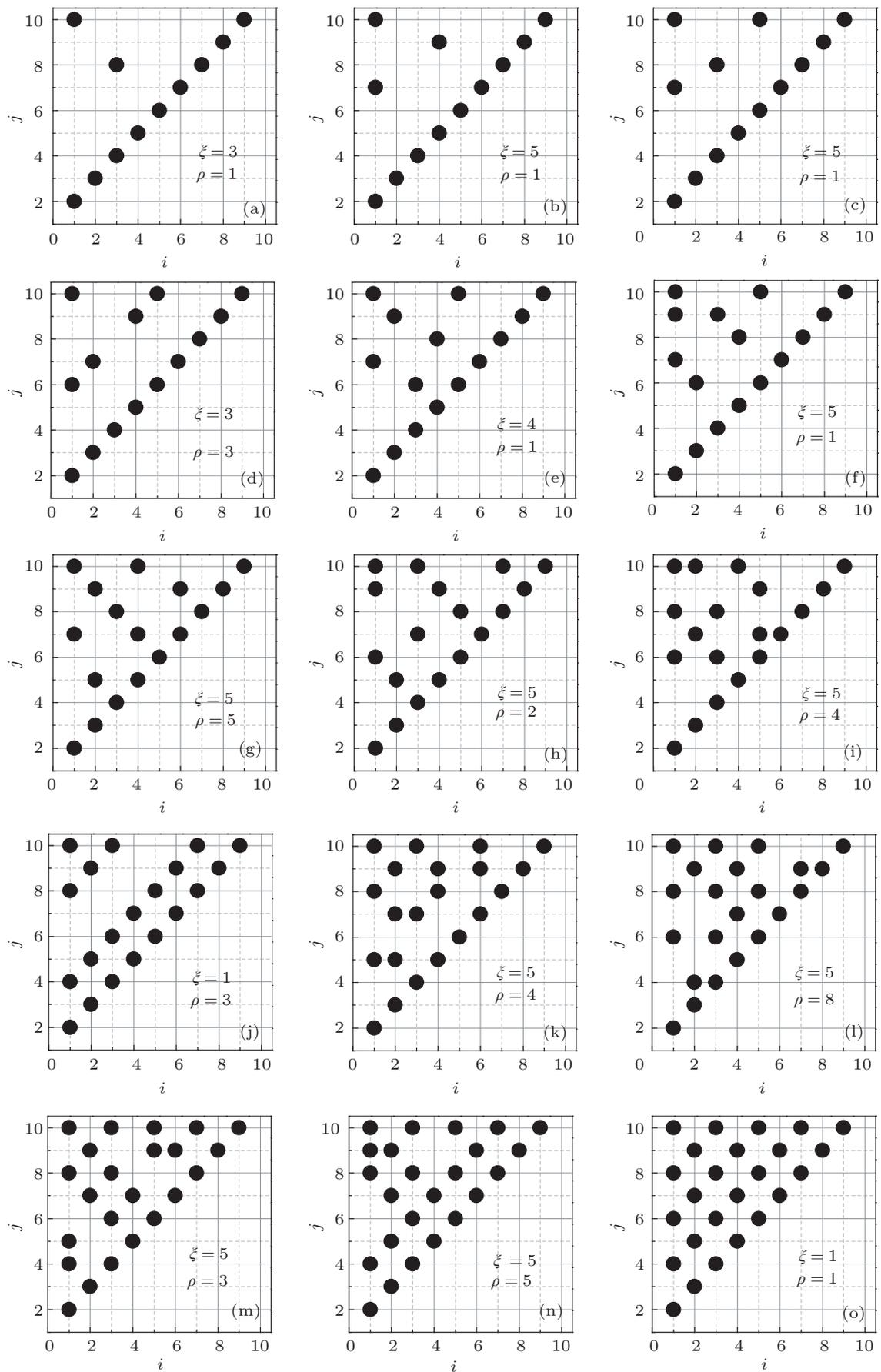


图4 对应图3中各最优同步网络的耦合点在耦合空间中的分布,在图中标出了网络的对称度 $\xi$ 和在 $N_L$ 相同的情况下最优同步网络的个数 $\rho$

为了解具有 10 个神经元的最优同步网络的拓扑结构特点, 首先我们通过计算机找出所有不同拓扑结构的网络 (由于  $N_L > 9$  时不同拓扑结构的网络数量巨大, 因此这里只研究了  $N_L$  从 1 增至 15 的情况), 然后逐个求这些网络的临界耦合强度  $c_{th}$ . 在求网络的临界耦合强度时, 我们对  $N_L > 9$  的网络做如下处理: 先按度分布由均匀到不均匀和对称度由小到大选择网络来求其临界耦合强度. 通过计算发现: 度不均匀和对称度大于 6 的网络不是最优网络, 因此对这部分网络的耦合强度无须计算. 我们总共计算了 223830 个不同拓扑结构网络的临界耦合强度, 考虑到耦合强度与网络的初态有关, 最后选择临界耦合强度小的网络, 用 6 个不同的初值确认网络的同步能力, 最终得到了不同  $N_L$  值的最优同步网络.

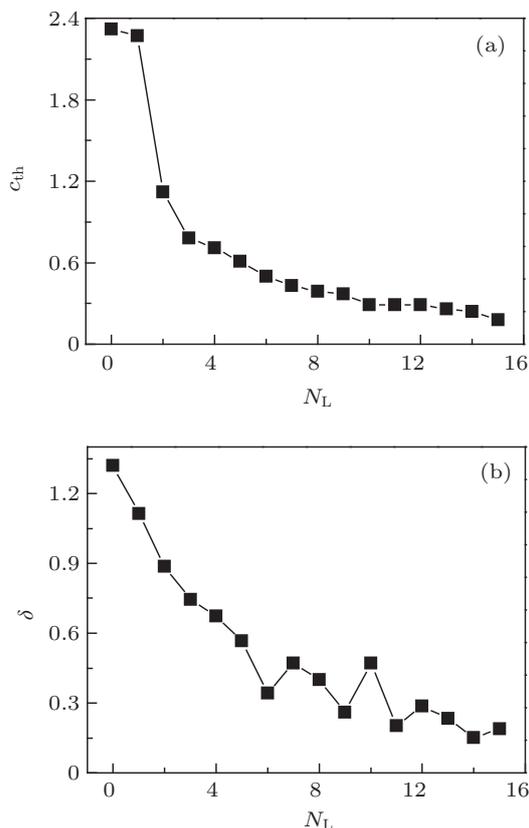


图 5 对应图 3 中最优同步网络的临界耦合强度  $c_{th}$  和耦合距离  $\delta$  随  $N_L$  的变化

图 3 给出了具有 10 个神经元和不同  $N_L$  值的最优同步 NW 网络, 相应的耦合点分布如图 4 所示. 从图 3 和图 4 可以看出: 1) 最优同步网络基本都包含长程连边, 因此长程连边有利于网络的同步; 2)  $N_L$  值不同, 最优同步网络的拓扑结构及耦合点分布是不同的; 3) 当网络各节点的度相同时 (参见

图 3(j) 和 (o)), 网络具有最高的对称性, 其对称度为 1, 而一般最优网络的对称度在 1—6 之间; 4) 最优同步网络的临界耦合强度  $c_{th}$  和耦合距离  $\delta$  并不随  $N_L$  增加而单调减少 (参见图 5(a) 和图 5(b)), 存在增加  $N_L$ ,  $c_{th}$  保持不变和  $\delta$  出现涨落的情况; 给定  $N_L$  值, 最优同步网络的耦合距离  $\delta$  一般与各种网络的平均耦合距离接近, 也存在个别偏离比较大的情况, 这时预示了最优同步网络的耦合点分布不是最均匀分布 (参见图 4(f) 和图 4(j)), 但总体有随着新增连边  $N_L$  的增加, 耦合点分布越来越均匀, 网络同步能力也越来越强; 5) 最优同步网络的结构一般不止一种, 可以有多种网络结构, 而且各最优同步网络的对称度  $\xi$  也不一定相同, 例如当新增连边数  $N_L = 4$  时, 就有三种最优同步网络, 对应新增连边分别为  $(l_{1,6}, l_{2,7}, l_{4,9}, l_{5,10})$ ,  $(l_{1,8}, l_{3,6}, l_{4,9}, l_{5,10})$  和  $(l_{1,4}, l_{2,7}, l_{3,8}, l_{5,10})$ , 三者具有相同的  $c_{th} = 0.71$ , 其中前两者的对称度为  $\xi = 3$ , 后者对称度为  $\xi = 6$ ; 6) 规则网络也可能是最优同步网络, 参见图 3(j) 和图 3(o).

### 4 遍历网络的同步

Newman 和 Watts 提出的 NW 网络是在近邻连接的基础上通过随机加边获得的, 这种随机加边的方式很难捕捉到最优的网络, 下面根据最优同步网络具有度分布均匀、耦合点分布均匀及对称度值较小的特点, 构造一个同步能力比 NW 网更强的网络.

假设  $N$  个神经元分布在闭合环上, 通过最近邻耦合形成网络, 网络节点编号顺序从 1 到  $N$ . 在最近邻耦合基础上增加连边, 网络构造示意图如图 6 所示 (以  $N_L = 10$  为例), 构造规则如下.

第一步: 从节点 1 开始向其对称点连边, 得到第一条连边  $l_{1,n_1} = 1$ , 这里  $n_1 = \max \text{int}((N+1)/2)$  为大于或等于  $(N+1)/2$  的最大整数, 在图 6 中  $n_1 = 6$ .

第二步: 第二条连边从节点  $n_1$  向节点  $n_2$  连边, 得到第二条连边  $l_{n_1,n_2} = 1$ ,  $n_2$  是节点 1 和节点  $n_1$  之间的两个中间点之一, 如果中间点在节点上, 则选择使网络的  $\delta$  最小的连边为新增连边, 如果中间点不在节点上 (如图 6 中一个中间点在节点 8 和 9 之间, 另一个中间点在节点 3 和 4 之间), 可做如下处理:  $n_2$  是与两个中间点相邻的 4 个节点中的一个, 分别记为  $p_1, p_2, p_3$  和  $p_4$ , 其中  $p_1, p_2$  和  $p_3$ ,

$p_4$  分别与中间点 1 和 2 相邻, 这时有四种连接方式  $l_{n_1,p_1} = 1, l_{n_1,p_2} = 1, l_{n_1,p_3} = 1$  或  $l_{n_1,p_4} = 1$ . 假设  $l_{n_1,p_1} = 1$  连边使网络的  $\delta$  最小, 那么  $n_2$  就是  $p_1$  这个节点 (在图 6 中,  $l_{6,9} = 1$  使网络的  $\delta$  最小, 所以  $n_2 = 9$ ), 即完成了对第二条连边的选择. 接着从节点  $n_2$  向节点  $n_3$  连边,  $n_3$  就是与第二个中间点相邻的节点  $p_3, p_4$  中的一个, 用选择节点  $n_2$  的方式选择  $n_3$ , 假设  $p_3$  符合条件, 这时新增连边为  $l_{n_2,p_3} = 1$ .

第三步: 之后的连边方式与第二步类似, 每次从前一连边的终点向节点  $n_i$  和  $n_j$  的中间点  $n_k$  连边, 如果有多种可能的连边方式, 应尽可能做长程连边; 中间点  $n_k$  的选取如下: 在度值大的节点  $n_i$  和  $n_j$  之间只存在度值小的节点, 这样的节点数量越多, 表示度值大的两个相邻节点  $n_i$  和  $n_j$  在环上的距离越长,  $n_k$  就是具有距离较长的两个节点  $n_i$  和  $n_j$  的中间点; 如果中间点有多个, 选择长程连边且连边后网络的  $\delta$  最小的中间点为  $n_k$ , 如果满足选择条件的中间点有多个, 则以等概率方式选择其中一个.

从图论角度来说, 这样构造的网络是连通的, 可以在不重复情况下一笔能经过所有的边, 我们把这样的网络称为遍历网络. 在构造遍历网络的过程中尽可能选取长程连边且兼顾到节点度的均匀性和网络的对称性, 这样不仅减小了整个网络的平均距离, 同时又降低了最大介数, 使耦合点分布趋向均匀, 保证网络具有较高的对称性和均匀的度分布, 因此遍历网络应该有很强的同步能力, 并接近最优同步网络的同步能力.

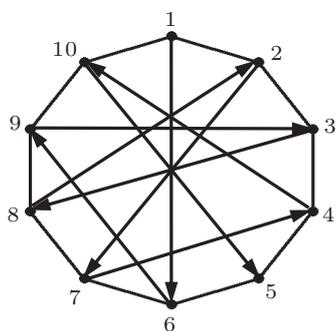


图 6 遍历网络的构造示意图, 图中箭头方向指向下一步将要连接的节点

为了解遍历网络的同步能力, 下面我们将它与随机加边产生的 NW 网络的同步能力做对比. 取网络的神经元个数都为  $N = 100$ , NW 网的临界耦合强度  $c_{th}$  与耦合距离  $\delta$  均是取 100 个样本的平均.

图 7(a) 给出了在  $N = 100$  的情况下临界耦合强度  $c_{th}$  随  $N_L$  的变化曲线, 图 7(b) 给出与图 7(a) 对应的耦合距离  $\delta$  随  $N_L$  变化曲线. 通过对比可以看出: 随着  $N_L$  的增加, 两种网络临界耦合强度  $c_{th}$  和耦合距离  $\delta$  均呈下降趋势, 但是遍历网对应的参数下降幅度更大. 这表明, 在同等  $N_L$  的情况下, 遍历网的同步能力更强; 随着  $N_L$  的增加, 两种网络的同步能力逐渐趋向一致. 遍历网的同步能力比 NW 网络强的原因是: 构造遍历网络的过程中增加了连边的规则性, 降低了随机性, 同时网络又具有最优同步网络的特点, 其同步能力当然更好.

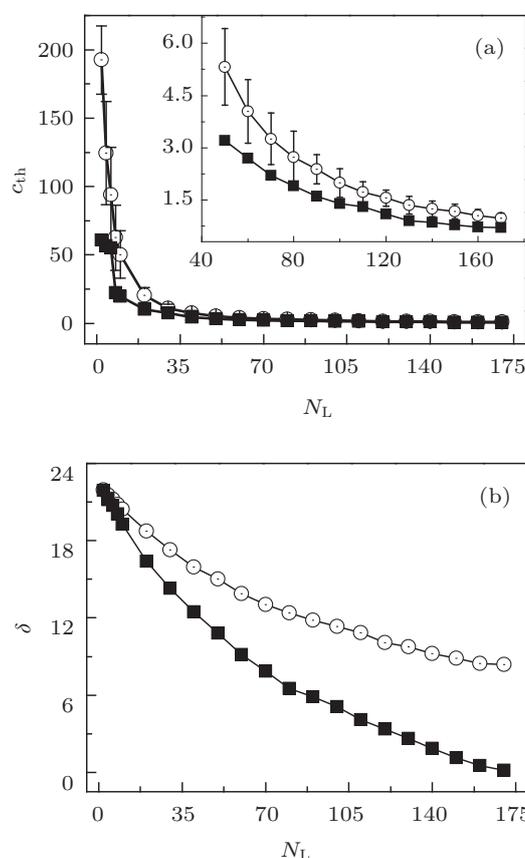


图 7 在  $N = 100$  的情况下临界耦合强度  $c_{th}$ (a) 和耦合距离  $\delta$ (b) 随  $N_L$  变化. 图中实心方块对应遍历网络, 空心圆对应随机加边产生的 NW 网络, 其对应的  $c_{th}-N_L$  曲线给出了  $c_{th}$  的变化范围

### 5 结论

本文研究了 NW 网络的同步问题, 给出了最优同步网络的具体拓扑结构, 发现: NW 网络的同步能力主要由节点度分布和网络的对称性决定, 表现为与耦合点均匀分布有密切关系. 节点度分布越均匀, 网络的同步能力就越强, 耦合点分布均匀的网络一般同步能力都强, 存在最优同步网络耦合

点分布不是最均匀的情况. 最优同步网络具有均匀的度分布和具有一定的对称性, 其对称度一般在  $1-N/2$  范围内变化. 由于存在多种网络拓扑结构满足网络度均匀分布和具有较好的对称性, 所以在相同的新增连边下, 最优同步网络一般不是惟一的. 此外还发现: 最优同步网络一般是非规则网络, 在

少数情况下出现规则网络是最优同步网络的情形. 增加新连边  $N_L$  不一定能提高网络的同步能力, 也可能使网络的同步能力降低. 遍历网络具有最优同步网络的特点, 因此有较强的同步能力, 我们希望这种网络构造方法能在实际生活中得到应用.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Hossein G N, Asad A, Morteza K 2013 *Chin. Phys. B* **22** 070502
- [3] Belousov B P 1958 *Ref. Radiats. Med.* 145
- [4] Li X L, He J B, Lu D R, Wang H L 2002 *Chin. J. Chin. Phys.* **15** 97 (in Chinese) [李学良, 何建波, 鲁道荣, 王华林 2002 化学物理学报 **15** 97]
- [5] Zhang Z Z, Zeng S Y, Tang W Y, Hu J L, Zeng S W, Ning W L, Qiu Y, Wu H S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 108701
- [6] Li J B, Lu Q C, Gong X W, Gong H Q, Zhang B M, Liang P J 2012 *Acta Biophys. Sin.* **28** 119 (in Chinese) [李静波, 陆钦池, 宫新伟, 龚海庆, 张博明, 梁培基 2012 生物物理学报 **28** 119]
- [7] Chen X J, Qiao C G, Wang L L, Zhou Z W, Tian T T, Tang G N 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 128201 (in Chinese) [陈醒基, 乔成功, 王利利, 周振玮, 田海涛, 唐国宁 2013 物理学报 **62** 128201]
- [8] Wu W S, Tang G N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 070505 (in Chinese) [吴望生, 唐国宁 2012 物理学报 **61** 070505]
- [9] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [10] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [11] Jost J, Joy M P 2001 *Phys. Rev. E* **65** 016201
- [12] Wang X F, Chen G 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 187
- [13] Barahona M, Pecora L M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101
- [14] Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C, Hoppensteadt F C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 014101
- [15] Hong H, Kim B J, Choi M Y, Park H 2004 *Phys. Rev. E* **69** 067105
- [16] Cohen R, Havlin S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 058701
- [17] Motter A E, Zhou C, Kurths J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **71** 016116
- [18] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200
- [19] Zhao M, Zhou T, Wang B H, Yan G, Yang H J, Bai W J 2006 *Physica A* **371** 773
- [20] McGraw P N, Menzinger M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 015101
- [21] Pecora L M, Carroll T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2109
- [22] Donetti L, Hurtado P I, Munoz M A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 188701
- [23] Nishikawa T, Motter A E 2006 *Phys. Rev. E* **73** 065106
- [24] Wang B, Tang H W, Xiu Z L, Guo C H 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 3123
- [25] Estrada E, Gago S, Caporossi G 2010 *Automatica* **46** 1835
- [26] Newman M E J, Watts D J 1999 *Phys. Lett. A* **263** 341
- [27] Hindmarsh J L, Rose R M 1984 *Proc. R. Soc. Lond. B* **221** 87

# Optimal Newman-Watts networks and synchronization of Ergodic network<sup>\*</sup>

Wang Li-Li Qiao Cheng-Gong Tang Guo-Ning<sup>†</sup>

( College of Physical Science and Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China )

( Received 6 June 2013; revised manuscript received 27 September 2013 )

## Abstract

Synchronization in Newman-Watts (NW) networks is studied in a Hindmarsh-Rose neuron dynamical system. The topological structures of some optimal synchronization networks are given. Numerical simulation results show that the synchronizability of the NW network is mainly determined by the distribution of coupling points in coupling space. The network with even distribution of coupling points generally has the strongest synchronizability. For a given number of edges there may exist some optimal synchronization networks with different topological structures. Optimal synchronization network has the strongest synchronizability, homogeneous degree distribution and better symmetry. However, its symmetry is not necessarily best. In general, optimal synchronization network is an irregular network. However, in the minor cases, the regular network may be an optimal synchronization network. A new type of network, the ergodic network, is introduced in this paper, and it has strong synchronizability as well as the characteristics of the optimal synchronization network.

**Keywords:** Newman-Watts network, the degree of symmetry, coupling space, synchronization

**PACS:** 05.45.Xt, 87.19.lj, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.240510

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11165004).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: tangguoning@sohu.com