

## 准周期激励与应变超晶格的动力学稳定性

罗晓华<sup>1)2)</sup> 何为<sup>1)</sup> 吴木营<sup>3)</sup> 罗诗裕<sup>3)†</sup>

1) (重庆大学电气工程学院, 重庆 400044)

2) (重庆交通大学图书馆, 重庆 400074)

3) (东莞理工学院电子工程学院, 东莞 523808)

(2013年8月20日收到; 2013年9月22日收到修改稿)

假设超晶格锯齿形沟道对粒子的作用等效为形状相似的周期场作用. 在经典力学框架内, 引入正弦平方势, 把粒子运动方程化为具有阻尼项和双频激励项的摆方程. 用 Melnikov 方法对单频激励系统的分叉与混沌进行分析; 用 Lyapunov 方法对双频激励系统的稳定性进行讨论. 结果表明: 在弱非线性情况下, 双频激励系统存在局域不稳定, 且这种不稳定将向全局扩展, 直至混沌的出现; 导致混沌的双频激励强度远小于单频激励强度; 外加一个适当的超声场可望将这种敏感钝化, 使系统的稳定性得到改善.

关键词: 超晶格, 准周期激励, 混沌, 稳定性

PACS: 73.21.Cd, 78.20.Bh, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.247301

## 1 引言

带电粒子的沟道效应和沟道辐射是 20 世纪 70 年代人们发现的重要现象之一. 由此发展起来的沟道技术在固体物理和原子核物理中得到了广泛应用, 并成为活跃的研究领域<sup>[1-16]</sup>. 利用沟道效应可以研究应变超晶格形变大小、界面位错与超晶格分层和龟裂等<sup>[9-11]</sup>. 文献 [12] 对超晶格量子阱的沟道效应和沟道辐射进行过讨论, 由于超晶格阱深大都为 eV 量级, 对于阱深为 1 eV 左右的超晶格可辐射红外光和可见光范围的电磁能量. 人们研究更多的是超晶格 (平) 面沟道的沟道效应. 注意到沿 [100] 方向生长的薄层 (比如 GaAs/GaAlAs 薄层), 在界面处交替产生伸长和压缩形变, 导致 (110) 平面沟道偏折, 使直沟道变成了锯齿形的“折沟道”. 在 (110) 平面沟道中运动的带电粒子 (比如正电子) 除了横向受到粒子 - 晶体相互作用外, 还将在纵向受到锯齿形沟道的作用. 注意到带电粒子同物质相互作用, 归根到底是带电粒子同电磁场相互作用, 这就是说锯齿形沟道对带电粒子的作用可以等效为形状相似的锯齿形沟道势对它的作用. 再考虑到

电子多重散射和晶格热振动的影响, 沟道粒子的运动方程可化为带有阻尼项和锯齿波激励的摆方程. 注意到认识总是近似的, 如果将锯齿波做泰勒展开, 当系统只有一个谐波起主要作用时, 这个系统可近似为单频激励系统, 或周期激励系统, 相应的激励称为单频激励或周期激励; 当系统有两个或两个以上的谐波起主要作用时, 这个系统称为双频激励 (多频激励) 系统, 或准周期激励系统, 相应的激励称为双 (多) 频激励或准周期激励. 这两类系统的特点是: 前者在强非线性情况下, 可出现分叉与混沌; 而后者在弱激励情况下, 将出现混沌不稳定性. 本文对这两种情况进行了比较, 并发现即使初始位移很小, 双频激励系统也可能进入混沌状态. 在经典力学框架内和偶极近似下, 引入正弦平方势<sup>[9-11]</sup>, 把粒子运动方程化为具有阻尼项和双频激励项的摆方程. 用 Melnikov 方法讨论了单频激励系统的分叉与混沌<sup>[15,16]</sup>, 用 Lyapunov 方法讨论了双频激励系统的混沌不稳定性<sup>[17-20]</sup>. 结果表明, 当激励强度比较强时, 单频激励系统可通过奇阶次谱分叉进入混沌; 对于双频激励系统, 在弱激励情况下也存在局域不稳定, 而且将向全局扩展, 直至混沌出现. 值得注意的是, 导致混沌的双频激励强度远小于周

† 通讯作者. E-mail: luoshy@126.com

期激励, 这就是说, 双频激励系统的混沌不稳定性比单频激励更加敏感. 分析表明, 外加一个适当的超声场中可望将这种敏感钝化, 使系统的稳定性得到改善.

## 2 运动方程

由两种材料 (比如 GaAs/GaAlAs) 交替生长而成的应变超晶格如图 1 (上图) 所示. 由于两种材料的晶格常数失配, (110) 面沟道变成了锯齿形折沟道 (图 1 下图). 设  $(y, z)$  平面是沟道中心平面. 在直角坐标系中,  $x$  轴垂直中心平面向上,  $y$  轴和  $z$  轴位于中心平面内,  $z$  轴沿着束流方向. 严格说来, 沟道问题是一个三维问题. 考虑到晶体的平移对称性, 坐标  $y$  将不出现, 如果粒子在  $x$  方向的能量不是太大, 在  $z$  方向的运动可以看作是守恒的. 于是, 粒子的行为完全由  $x$  方向的运动决定, 从而将三维问题化为一维问题. 注意到超晶格的沟道是锯齿状, 对于薄层等厚的超晶格, 粒子运动方程可化为<sup>[13,14]</sup>

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \xi = -2\mu_0\omega_0 \frac{d\xi}{dt} - \sum_{p=1} c_p \sin(\Omega_p t), \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi &= 2\pi x/d, \quad \omega_0^2 = \frac{2\pi^2 V_0}{m_0 \gamma d^2}, \quad \Omega_p = p\omega v, \\ \omega &= \frac{2\pi v}{l} \sqrt{\frac{m}{V_0}}, \quad c_p = \frac{2\pi \chi b_p p \omega}{md}, \end{aligned} \quad (2)$$

$l$  是超晶格层厚,  $d = 2l$  是超晶格周期,  $V_0$  是势阱深度,  $\mu_0$  是阻尼系数,  $\chi$  是锯齿形沟道与锯齿形沟道势之间的比例因子,  $b_p$  是锯齿形沟道势  $p$  阶傅里叶展开系数,  $z = vt$  ( $v$  是粒子纵向运动速度),  $m = m_0 \gamma$ ,  $m_0$  是粒子静止质量,  $\gamma$  是相对论因子, 在超相对论情况下, 粒子速度  $v$  近似等于光速  $c$ . 其他参数的物理意义可参考文献 [13].

方程 (1) 是多频激励的摆方程, 原则上  $p$  的取值可以无穷. 如果保留其中任意两项 (比如强度最大的两项), (1) 式可化为

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\mu_0\omega_0 \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \sin \xi \\ = 2\omega_0^2 (B_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} B_1 &= c_p/2, \quad B_2 = c_{p+m}/2, \\ \omega_1 &= p\omega v, \quad \omega_2 = (p+m)\omega v, \end{aligned} \quad (4)$$

方程 (3) 是带有阻尼项的双频激励的摆方程, 系统的非线性表现在方程 (3) 左端第三项. 当非线性比

较强时, 可将方程 (3) 表示为

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \xi \\ = \varepsilon \left[ -2\mu_0\omega_0 \frac{d\xi}{dt} + 2\omega_0^2 (B_1 \sin(\omega_1 t) \right. \\ \left. + B_2 \sin(\omega_2 t)) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

当系统的非线性比较弱时, 方程 (3) 形式上可改写为

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi \\ = \varepsilon \left[ -2\mu_0\omega_0 \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 (\xi - \sin \xi) \right. \\ \left. + 2\omega_0^2 (B_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

其中小参数  $\varepsilon$  表示它的伴随项是小量. 方程 (5) 和 (6) 表现出了不同特征. 下面用 Melnikov 方法和 Lyapunov 方法对方程 (5) 和 (6) 进行讨论.

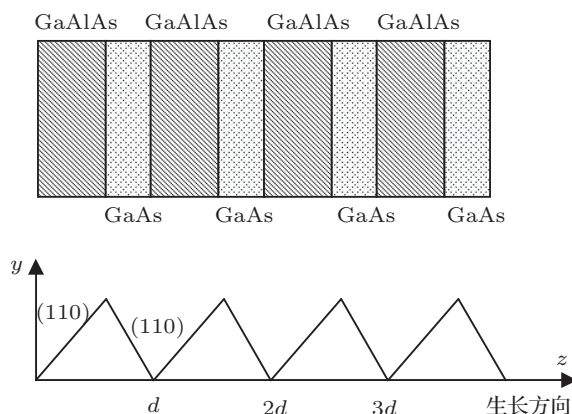


图 1 应变超晶格 (上) 与 (110) 锯齿形面沟道 (下) 示意图,  $d$  是超晶格周期

## 3 单频激励

令  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\mu = \mu_0/\omega_0$ ,  $\Omega = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ ,  $f = 2B_1$ , 当  $B_2 = 0$  时, 方程 (5) 可化为无量纲形式

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \sin \xi = \varepsilon \left( -2\mu \frac{d\xi}{d\tau} + f \sin(\Omega \tau) \right), \quad (7)$$

方程 (7) 是一个具有强非线性的单频激励摆方程. 人们利用 Melnikov 方法, 对这个系统的分叉与混沌进行过仔细研究<sup>[13,15,16]</sup>. 为了比较, 下面做一简单描述.

### 3.1 无扰动系统的三类轨道

$\varepsilon = 0$  的系统是无扰动系统. 当  $\varepsilon = 0$  时系统 Hamiltonian 量  $h$  可以表示为

$$h = \frac{\xi^2}{2} + (1 - \cos \xi). \quad (8)$$

根据  $h$  的大小, 相平面上的轨道可分为三类.

1) 异宿轨道  $h = 2$  的轨道是异宿轨道, 且可将这条轨道表示为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pm 2 \arcsin(th\tau) \\ \varsigma &= \pm 2 \operatorname{sech}(\tau) \end{aligned} \right\}; \quad (9)$$

2) 周期轨道  $0 < h < 2$  的轨道是周期轨道, 且可将它表示为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2 \arcsin(\kappa sn\tau) \\ \varsigma &= 2\kappa cn(\tau) \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

其中  $\kappa = h/2$  椭圆函数的模, 且  $\kappa \in (0, 1)$ ,  $sn\tau$  和  $cn\tau$  是 Jacobian 椭圆函数;

3) 旋转周期轨道  $h > 2$  的轨道是旋转周期轨道, 且可将这条轨道用公式

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pm 2 \arcsin\left(sn\frac{\tau}{\kappa'}\right), \\ \varsigma &= \pm \frac{2}{\kappa'} \frac{dn\tau}{\kappa'} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

表示, 其中  $\kappa' = \frac{2}{h} = \sqrt{1 - \kappa^2}$  是椭圆函数的补模,  $dn\tau$  为 Jacobian 椭圆函数. 注意到方程 (7) 描写的是强非线性系统, 它的稳定性可用 Melnikov 方法进行讨论.

### 3.2 系统的稳定性

#### 3.2.1 异宿轨道的稳定性

根据 Melnikov 方法, 异宿轨道的 Melnikov 函数可表示为

$$\begin{aligned} &M_{\pm}(\tau_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_{\pm}(\tau)[-2\mu\zeta_{\pm}(\tau) + f \sin[\Omega(\tau + \tau_0)]] d\tau \\ &= \pm \frac{2f\pi}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\Omega\right)} [2\mu/\delta + \sin(\Omega\tau_0)], \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\zeta_{\pm}$  由 (9) 式给出, 而  $\delta = \mp \frac{4\pi f}{\operatorname{ch}(\pi\Omega/2)}$ . 由 (12) 式可导出产生 Smale 马蹄变换意义下的混沌条件为

$$\frac{f}{2\mu} > \frac{4}{\pi} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\Omega\right), \quad (13)$$

上式表明, 只要激励强度足够强, 或阻尼足够小这个系统就存在 Smale 马蹄混沌.

#### 3.2.2 周期轨道的稳定性

对于任意的互质正整数  $m, n$ , 总是存在唯一的一个  $\kappa_{m/n} \in (0, 1)$ , 使得  $T(\kappa_{m/n}) = 4K(\kappa_{m/n}) = \frac{m}{n}T = \frac{2\pi m}{n\omega}$ , 构造这族轨道的 Melnikov 函数, 可得

$$\begin{aligned} &M^{m/n}(\tau_0) \\ &= \int_0^{mT} \zeta(\tau, \kappa)[-2\mu\zeta(\tau, \kappa) + f \sin[\Omega(\tau + \tau_0)]] d\tau \\ &= \begin{cases} \text{与 } \tau_0 \text{ 无关的常数} \\ (n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}) \\ -\frac{4f\pi}{\operatorname{ch}(\Omega K'(\kappa))} \left[ \frac{2\mu}{\delta_m} - \sin(\Omega\tau_0) \right] \\ (n = 1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}) \end{cases}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\zeta$  由 (10) 式给出, 而

$$\delta_m = \frac{f}{\operatorname{ch}[\Omega K'(\kappa)] \left\{ \frac{4}{\pi} (E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)) \right\}},$$

$\kappa = \kappa_m$ .  $K(\kappa)$  是第一类全椭圆积分,  $K'(\kappa) = K(\kappa')$ ,  $E(\kappa)$  是第二类全椭圆积分. 由 (14) 式, 可导出系统产生周期型次谐分叉的条件为

$$\frac{f}{2\mu} > \frac{4}{\pi} \operatorname{ch}\left(\frac{m\pi K'(\kappa)}{2K(\kappa)}\Omega\right) (E(\kappa) - \kappa^2 K(\kappa)) = R_m^o. \quad (15)$$

同异宿轨道的讨论类似, 只要激励强度足够强, 或阻尼足够小系统就存在奇阶次谐分叉.

#### 3.2.3 旋转型周期轨道的稳定性

对于任意一组互质正整数  $m, n$ , 总存在唯一的一个  $\kappa_{m/n} \in (0, 1)$ , 使得  $T(\kappa_{m/n}) = 2\kappa_{m/n}K(\kappa_{m/n}) = \frac{m}{n}T = \frac{2\pi m}{n\omega}$ , 这族轨道的 Melnikov 函数可表示为

$$\begin{aligned} &M_{m/n}(\tau_0) \\ &= \int_0^{mT} \zeta_+(\tau, \kappa)[-2\mu\zeta_+(\tau, \kappa) + f \sin[\Omega(\tau + \tau_0)]] d\tau \\ &= \begin{cases} \text{与 } \tau_0 \text{ 无关的常数} \\ (n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数}) \\ \frac{2f\pi}{\operatorname{ch}(\kappa\Omega K'(\kappa))} \left[ \frac{2\mu}{\delta_m^r} + \sin(\Omega\tau_0) \right] \\ (n = 1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}) \end{cases}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\zeta$  由 (11) 式给出, 而  $\delta_m^r = -\frac{\pi f}{4\operatorname{ch}(\kappa\Omega K')}$ ;  $\kappa = \kappa_m$ . 由 (16) 式可导出产生旋转型次谐分叉的条件为

$$\frac{f}{2\mu} > \frac{4E(\kappa)}{\pi\kappa} \operatorname{ch}(\kappa\Omega K'(\kappa)), \quad (17)$$

可见, 旋转周期轨道的稳定性条件同周期轨道类似.

上面的分析表明, 只要系统的激励强度足够强或阻尼足够小, 不管是周期轨道还是旋转周期轨道都存在奇阶次谐分叉, 并通过级联分叉进入混沌.

## 4 双频(准周期)激励

研究表明, 在共振线附近即使非线性比较弱, 系统的状态也表现出了明显的不稳定性. 为此, 假设扰动频率满足条件  $|\omega_{1,2} - \omega_0| \ll \omega_0$ . 下面用平均法和 Lyapunov 方法对系统的稳定性进行讨论.

### 4.1 平均法

假设系统 (6) 具有如下形式

$$\begin{aligned} \xi &= u(t) \cos(\omega't) + v(t) \sin(\omega't), \\ \zeta &= \frac{d\xi}{dt} = -\omega'u(t) \sin(\omega't) + \omega'v(t) \cos(\omega't) \end{aligned} \quad (18)$$

的解, 其中  $u(t)$  和  $v(t)$  是时间的慢变函数, 而  $\omega'$  是满足条件  $|\omega' - \omega_0| \ll \omega_0$  的任一频率. 令

$$\tau = \omega_0 t, \quad \Delta' = \omega_0 - \omega', \quad \Delta_{1,2} = (\omega_0 - \omega_{1,2})/\omega_0,$$

利用平均法 [17-19], 可导出  $u(t)$  和  $v(t)$  满足的方程

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -\mu u - \left( \Delta' + \frac{J_1(A)}{A} - \frac{1}{2} \right) v \\ &\quad - B_1 \cos[(\Delta' - \Delta_1)\tau] \\ &\quad - B_2 \cos[(\Delta' - \Delta_2)\tau], \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\mu v + \left( \Delta' + \frac{J_1(A)}{A} - \frac{1}{2} \right) u \\ &\quad - B_1 \sin[(\Delta' - \Delta_1)\tau] \\ &\quad - B_2 \sin[(\Delta' - \Delta_2)\tau], \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $J_1(A)$  是一阶 Bessel 函数, 而  $A = \sqrt{u^2 + v^2}$  是振幅. 可以看出, 当  $\Delta' = \Delta_1$  或  $\Delta' = \Delta_2$  时方程 (19) 退化为单频激励情形. 扰动周期  $T = 2\pi/|\Omega_d|$ , 而  $\Omega_d = \Delta_2 - \Delta_1 = (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$  是双频激励状态下的拍频.

将方程 (19) 和 (6) 比较可以发现, 在单频激励情况下, 方程 (19) 只有跳跃出现而无混沌存在. 事实上, 当  $B_1 \neq 0$  和  $B_2 = 0$  时, 系统 (6) 的振幅由方程

$$A^2 \left( (\Delta_1 + J(A)/A - 1/2)^2 + \mu^2 \right) = B_1^2 \quad (20)$$

给出, 这是周期激励下的频率响应方程, 揭示了系统的后弯现象和跳跃特征. 事实上, 在小振幅近似和单频激励下 (当  $B_1 \neq 0$  和  $B_2 = 0$  时), 方程 (3) 可

化为标准的 Duffing 方程, 而共振曲线的后弯和跳跃现象正是这个系统的动力学特征.

### 4.2 双频激励

在双频激励下, 系统 (3) 表现出了一系列新的特征, 即使是在小振幅 (位移) 和弱非线性性情况下也表现出了全局不稳定与混沌行为.

#### 4.2.1 Lyapunov 方法

注意到混沌的特点是它的状态同初值密切相关, 初值的微小变化将随时间 (或迭代次数) 指数增加而被无限放大. 只要 Lyapunov 指数谱中有一个指数为正系统就不稳定. 可见判断系统是否存在混沌只需算出它的最大 Lyapunov 指数 [20], 再根据这个指数大于零或小于零即可判断系统是否稳定. 下面引入 Lyapunov 指数讨论系统的稳定性. 为此, 我们假设系统存在小的偏差 (或扰动), 使得轨道  $u(\tau)$  和  $v(\tau)$  发生了微小变化:

$$\zeta(\tau) = u^*(\tau) - u(\tau), \quad \eta(\tau) = v^*(\tau) - v(\tau). \quad (21)$$

将 (21) 式代入方程 (19), 并将它线性化后可得 [18,19]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \frac{\rho}{2} \left[ -2\mu + \frac{AJ_0(A) - 2J_1(A)}{A} \sin(2\chi) \right], \\ \frac{d\Phi}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ 2\Delta' - \frac{AJ_0(A) - 2J_1(A)}{A} \cos(2\chi) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \sqrt{\zeta^2(\tau) + \eta^2(\tau)}, \quad \tan \Phi = \frac{\zeta}{\eta}, \\ \chi &= \Phi - \theta, \quad \theta = \tan^{-1}(v/u). \end{aligned} \quad (23)$$

注意到最大的 Lyapunov 指数定义为  $\mu_1 = \frac{d(\ln \rho)}{d\tau} =$

$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\tau}$ , 由 (22) 式第一式, 可得

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left[ -2\mu + \frac{AJ_0(A) - 2J_1(A)}{A} \sin(2\chi) \right], \quad (24)$$

而标准的 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  则由平均值

$$\lambda_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu_1(\tau) d\tau$$

给出, 混沌存在的必要条件是  $\mu_1(\tau) > 0$ , 根据 (24) 式可将这个条件用系统阻尼表示为

$$\max \left| \frac{AJ_0(\tau) - 2J_1(\tau)}{2A} \right| > \mu, \quad (25)$$

计算表明, 当  $A = A_{\max} = 3$  时, 上式右端等于 2.4. 可见系统 (19) 存在混沌的条件是无量纲阻尼系数  $\mu < 0.24$ . 这就是说, 系统阻尼太小就不足以阻止混沌的发生.

#### 4.2.2 小振幅

如果振幅  $A$  比较小, 精确到  $O(A^3)$ , 条件 (25) 式可改写为

$$\max |A(\tau)| > 4\sqrt{\mu}, \quad (26)$$

可以看出, 如果系统的耗散比较弱, 条件 (26) 是很容易满足的. 换句话说, 在小振幅情况下, 即使是弱阻尼和弱非线性, 系统也存在混沌现象. 令  $\max |A(\tau)| = 4\sqrt{\mu}$  可给出双频激励的振幅阈值. 值得注意的是, 在双频激励中, 如果其中一个激励振幅远大于另一个, 比如  $B_1 \gg B_2$  或者相反, 我们就有理由假设导致混沌存在的双频激励和单频激励阈值振幅近似相等. 由 (20) 式可算出  $\max |A(\tau)| = B_1/\mu$ , 结合 (26) 式双频激励阈值振幅可表示为

$$B_1 > B_{1cr} = 4\mu^{3/2}. \quad (27)$$

当条件 (26) 和 (27) 同时满足时, 系统 (19) 存在局域不稳定, 且这种不稳定将向全局扩展, 直至混沌的出现. 而导致混沌的双频激励强度  $I = (B_1^2 + B_2^2)/2$  远小于周期激励强度. 这就是说, 双频激励系统的混沌不稳定性比单频激励更加敏感. 分析表明, 外加一个超声场可望将这种敏感钝化, 使系统的稳定性得到改善.

#### 4.3 实验设想

上面分析表明, 要试图提高系统的稳定性, 可将双频激励改造为单频激励 (或基本上是单频激

励), 结果就可以得到改善. 比如将双频激励系统置于一个声场  $f = A \sin(\omega t \pm \pi)$  中, 则作用到方程 (6)(或方程 (5)) 右端的双频激励就可表示为三频激励  $F = B_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) + A \sin(\omega t \pm \pi)$ . 如果外加场  $A = B_1$ ,  $\omega = \omega_1$ (或  $A = B_2$ ,  $\omega = \omega_2$ ), 则由于共振叠加, 相位相反的两个振动彼此抵消, 在合振动中就只剩下一个单频振动  $B_2 \sin(\omega_2 t)$ (或  $B_1 \sin(\omega_1 t)$ ). 于是, 双频激励化为单频激励. 这就是说, 只需将应变超晶格放置在一个适当的声场中, 就可望改善和提高系统的稳定性.

## 5 结论

对于混沌系统来说, 耗散是一种稳定因素. 由于耗散作用, 系统一方面要收缩到相空间的有限区域 (即吸引子); 同时, 由于系统对初值的极度敏感, 运动轨道还将沿某些方向指数分离. 二者的竞争决定了系统的稳定性. 从局部来看, 奇怪吸引子的不稳定轨道总是指数分离的, Lyapunov 指数就描写了系统的这一特征, 而最大 Lyapunov 指数则可判断系统是否存在混沌. 本文在经典力学框架内, 引入正弦平方势把粒子运动方程化为具有阻尼项和双频激励项的摆方程. 计算了系统的最大 Lyapunov 指数, 揭示了弱非线性情况下, 当激励强度远小于单频激励强度时, 系统存在局域不稳定; 而且这种不稳定将向全局扩展, 并导致混沌的出现.

- 
- [1] Korol A V, Solovyov A V, Greiner W 2004 *Int. J. Mod. Phys. E* **13** 867
- [2] Korol A V, Solovyov A V, Greiner W 2008 *Nucl. Inst. Meth. Phys. Res. B* **266** 1173
- [3] Kubankin A S, Nasonov N N 2008 *J. Surf. Investig. X Ra.* **2** 317
- [4] Tabrizi M, Korol A V, Solovyov A V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 164801
- [5] Korol A V, Solovyov A V, Greiner W 2007 *Int. J. Mod. Phys. E* **13** 867
- [6] Sushko G B, Korol A V, Greiner W, Solov'yov A V 2013 *J. Phys.: Conf. Ser.* **438** 012018
- [7] Korol A V, Solov'yov A V, Greiner W 2013 *Channeling and Radiation in Periodically Bent Crystals, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics* (Berlin: Springer) p195
- [8] Gennady B S, Bezchastnov V G, Solovyov I A, Korol A V, Greiner W, Solovyov A V 2013 *J. Comput. Phys.* **252** 404
- [9] Luo S Y, Shao M Z, Luo X H 2010 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **40** 207 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 罗晓华 2010 中国科学: 物理学, 力学和天文学 **40** 207]
- [10] Luo S Y, Shao M Z, Luo X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2685 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 罗晓华 2010 物理学报 **59** 2685]
- [11] Luo X H, Wu M Y, Li H T, Shao M Z, Xiong J Z, Luo S Y, He W 2011 *Chin. J. Solid Mech.* **32** 440 (in Chinese) [罗晓华, 吴木营, 李洪涛, 邵明珠, 熊金志, 罗诗裕, 何为 2011 固体力学学报 **32** 440]
- [12] Luo X H, He W, Shao M Z 2008 *High Power Laser and Particle Beams* **20** 675 (in Chinese) [罗晓华, 何为, 邵明珠 2008 强激光与粒子束 **20** 675]
- [13] Luo S Y, Shao M Z 2005 *Chin. J. Seimcond.* **26** 294 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠 2005 半导体学报 **26** 294]
- [14] Li X P, Wang S J, Chen Q, Luo S Y 2013 *Seim. Optoelectron.* **34** 441 (in Chinese) [李秀平, 王善进, 陈琼, 罗诗裕 2013 半导体光电 **34** 441]
- [15] Luo X H, He W, Wu M Y, Shao M Z, Luo S Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 064210
- [16] Liu H Z, Luo S Y, Shao M Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 047807
- [17] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Peturbation Techniques* (London: John Wiley and Sons.) p226
- [18] Grishchenko A D, Vavriv D M 1997 *Zh. Tekh. Fiz.* **67** 1 (in Russia)
- [19] Vavriv D M, Vavriv D D 2008 *Proceedings of Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals* Sevastopol, Ukraine, September 15–19, 2008 p16
- [20] Wolf A, Swift J B, Vastano J A, Sminney H L 1985 *Physica D* **16** 285

# Quasi-periodic excitation and dynamic stability for strained superlattice

Luo Xiao-Hua<sup>1)2)</sup> He Wei<sup>1)</sup> Wu Mu-Ying<sup>3)</sup> Luo Shi-Yu<sup>3)</sup>†

1) ( College of Electric Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China )

2) ( Library of Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China )

3) ( College of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China )

( Received 20 August 2013; revised manuscript received 22 September 2013 )

## Abstract

In this paper, the action exerted by a superlattice sawtooth-shaped channel on the particle is assumed to be equivalent to that exerted by a periodic field with a similar shape. In the framework of classical mechanics, by introducing the sines-quared potential, the particle motion equation is reduced to pendulum equation with a damping term and dual-frequency excitation term. The bifurcation and chaos of single-frequency excitation system are analyzed with the Melnikov method. The stability of dual-frequency excitation system is discussed by using the Lyapunov exponent. The results show that in the case of weak nonlinearity, local instability can be found in the dual frequency excitation system, and it will be expanded globally until chaos appears. The dual excitation intensity leading to chaos is far less than that of single-frequency excitation. The application of an appropriate ultrasonic field is likely to make such a sensitivity passivated, and the stability of the system improved as well.

**Keywords:** superlattice, quasi-periodic excitation, chaos, stabilities

**PACS:** 73.21.Cd, 78.20.Bh, 05.45.—a

**DOI:** 10.7498/aps.62.247301

---

† Corresponding author. E-mail: luoshy@126.com