

Majorana 表象下的纠缠动力学*

曹辉†

(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

(2012年9月26日收到; 2012年10月25日收到修改稿)

借助在 Majorana 表象下提出的纠缠度定义, 研究了对称双阱中两个玻色原子组成的系统的纠缠动力学. 得到了系统的任意态在 Majorana 表象下的表示, 并考察了原子间相互作用及系统初始状态对纠缠度动力学的影响. 发现原子间相互作用会决定纠缠度振荡的频率, 而纠缠度振荡的幅度对系统的初态很敏感.

关键词: Majorana 表象, 量子纠缠

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Aa

DOI: 10.7498/aps.62.030303

1 引言

量子纠缠是量子力学中最重要的概念之一. 所谓量子纠缠态, 指的是系统内态的线性叠加态, 这种叠加态有一个特性, 即它们不能完全分解成单个粒子的乘积态. 此性质可看作是量子力学特有的效应, 由此, 量子纠缠产生了许多新奇的物理现象, 且这些现象常常不能被经典力学所解释^[1]. 正是这种不存在经典对应的量子特性, 使量子纠缠的系统具有广泛且独特的应用^[2]. 处于纠缠态的一对系统可作为量子信息的手段, 以完成量子计算^[3]、量子加密^[4,5]、量子远程传态^[6,7]等经典系统不可能完成的任务. 另外, 量子纠缠在量子测量问题的研究中也起着重要作用^[8].

鉴于量子纠缠在量子信息及相关领域的重要意义, 人们对量子纠缠的测量开展了大量的研究工作, 提出了许多有效的纠缠度测量方法^[9-14], 包括形成纠缠度、可提纯纠缠度、负性纠缠度、共生纠缠度、几何纠缠度、纠缠熵等等. 最近, 借助于 Majorana 表象^[15], 一种新的纠缠定义方式^[16]被用于研究量子比特系统的纠缠度. 在 Majorana 表象下, 一个自旋为 $N/2$ 的粒子或一个希尔伯特空间维度为 $N+1$ 维的系统可表示成单位球面上的

N 个点, 这些点被称作 Majorana 星. 通过这 N 个 Majorana 星的位置, 可计算系统的能量, Berry 曲率^[17]等物理量. 文献^[16]中即是利用这些星的重心与球心的距离来衡量纠缠的大小.

由于利用超冷原子体系可很便利地制备量子纠缠态^[18,19], 超冷原子体系中的量子纠缠受到了广泛的关注^[20,21]. 研究表明, 冷原子体系中, 原子间相互作用产生的非经典纠缠可大大地增加量子相位测量的精度^[22,23]; 而且, 冷原子体系可用于有效地制备并输运量子纠缠. 这些都对量子信息处理和量子通信等技术的发展至关重要. 反过来, 量子纠缠也为研究冷原子体系提供了新的方法, 例如: 借助纠缠熵可判断系统的动力学相变点^[12-14]. 基于这两者之间的相互影响, 我们希望把上述在量子信息研究中新提出的纠缠定义, 应用到冷原子玻色系统以研究其纠缠动力学.

本文借助文献^[16]中的纠缠度定义研究了两模玻色冷原子系统的纠缠动力学. 先简单介绍 Majorana 表象下这种重心相关的纠缠度定义, 然后以两格点 Bose-Hubbard 模型为例, 研究了处于对称双势阱中两个玻色原子的纠缠动力学, 讨论了原子相互作用强度及系统的初始状态对纠缠动力学的影响.

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB921503) 和国家自然科学基金 (批准号: 11075020, 91021021) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: stanley_1012@163.com

2 Majorana 表象下的纠缠度定义

考虑一个两模的 N 粒子玻色系统, 它的 Hilbert 空间可取 Fock 态 $|i, N-i\rangle$ ($i=0, 1, \dots, N$) 为基矢, 此空间共 $N+1$ 维. 系统的任意量子态可表述为

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^N C_i |i, N-i\rangle, \quad (1)$$

其中, $\{C_i\}$ 满足归一化条件 $\sum_{i=0}^N |C_i|^2 = 1$. 相应地, 相干态可写作

$$\begin{aligned} |\Psi_{CS}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\cos \frac{\theta}{2} a^\dagger + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} b^\dagger \right)^N |0\rangle \\ &= \sum_{m=0}^N \sqrt{C_N^m} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^m \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \right)^{N-m} |m, N-m\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ 是二项式系数. 由 Husimi 函数 $|\langle \Psi_{CS} | \Psi \rangle|^2$, 可得到任意态 $|\Psi\rangle$ 在相干态空间的密度分布. Husimi 函数的零点即是要求的 Majorana 星的位置. 由于

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{CS} | \Psi \rangle &= \sum_{m=0}^N \sqrt{C_N^m} C_m \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^m \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right)^{N-m} \\ &= \left(\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right)^N \\ &\quad \times \sum_{m=0}^N \sqrt{C_N^m} C_m \left(\cot \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \right)^m \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^N \sum_{m=0}^N \sqrt{C_N^m} C_{N-m} \\ &\quad \times \left(\tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right)^m, \end{aligned} \quad (3)$$

$\langle \Psi_{CS} | \Psi \rangle = 0$ 可看作 $\cot \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$ (或 $\tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$) 的 N 次复数方程, 因而总可求得 N 个复数解, 每个解中的有序实数对 (θ, ϕ) 对应单位球面上的一个点. 在 Majorana 表象下, 此系统的任意波函数则可由球面上的这 N 个点来表示, 这些点就是 Majorana 星.

有了上面得到的 Majorana 星的位置, 我们便可以用它们来计算所关心的物理量. 文献 [16] 中利用 Majorana 星的重心位置给出了一种新的纠缠定义. 假设 N 个星的位置在球坐标下分别为 $(1, \theta_i, \phi_i)$

($i=1, \dots, N$), 则

$$d = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i, \cos \theta_i) \right| \quad (4)$$

为这些星的重心离球心的距离, 纠缠度定义为 $E_B = 1 - d^2$, 它可被理解成 Majorana 星位置的方差 [16]. 为了得到更直观的印象, 在此举两个简单的例子. 比如对于量子态 $|\Psi\rangle = |N, 0\rangle$, 易求得 N 个 Majorana 星重合在南极点 ($\theta_i = \pi$), 则 $d = 1, E_B = 0$. 特别地, $N = 1$ 时, Majorana 星与 Bloch 球上表示自旋 1/2 粒子的点正好关于球心对称. 又如 $|\Psi\rangle = |N, 0\rangle + |0, N\rangle$, 可求得 $\theta_i = \pi/2, \phi_i = (2n+1)\pi/N$ ($n=0, 1, \dots, N-1$), 即所有的 Majorana 星均分布在赤道上, 且等距排列, 经度相差 $2\pi/N$. 显然, 这些星的重心在球心上, 因而, $d = 0$, 纠缠度 $E_B = 1$.

3 纠缠度动力学

3.1 两格点 Bose-Hubbard 模型

下面我们以两格点 Bose-Hubbard 模型为例, 来研究 Majorana 表象下的纠缠动力学. 对于处在对称双势阱中的 N 个冷原子构成的系统, 在紧束缚近似下, 可以用如下的哈密顿量来描述:

$$\begin{aligned} H &= -J(a_L^\dagger a_R + a_R^\dagger a_L) \\ &\quad + \frac{U}{2}(n_L(n_L-1) + n_R(n_R-1)), \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} J &= -\int \phi_L^* \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}} \right) \phi_R \, d\mathbf{r}, \\ U &= g \int |\phi_L|^4 \, d\mathbf{r} = g \int |\phi_R|^4 \, d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (6)$$

J 是左右阱间单原子隧穿耦合强度, U 是处在同一阱中的两原子相互作用能, ϕ_L, ϕ_R 分别为左右阱中单原子基态波函数, $a_{L,R}^\dagger, a_{L,R}$ 和 $n_{L,R}$ 分别为左右阱中原子的产生、湮灭和粒子数算符. 总粒子数 $N = n_L + n_R$ 是守恒量. V_{ext} 为对称的双阱形外势, m 为原子质量, $g = 4\pi a_s \hbar^2/m$, a_s 为原子散射长度. 为方便后续的讨论, 我们用单原子隧穿耦合强度 J 作为系统的能量尺度, 即取 $J = 1$.

3.2 两原子纠缠动力学

考虑最简单的情况, 即系统仅由两个玻色

原子构成. 此时, 系统任意时刻的波函数可写作 $|\Psi(t)\rangle = C_0(t)|0,2\rangle + C_1(t)|1,1\rangle + C_2(t)|2,0\rangle$, 相应的相干态可写作 $|\Psi_{CS}\rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2} |2,0\rangle + \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1,1\rangle + \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{2i\phi} |0,2\rangle$. 通过求解 Husimi 函数的零点可得 Majorana 星的位置为

$$\begin{cases} \theta(t) = 2 \operatorname{arccot} \left| \frac{-C_1(t) \pm \sqrt{C_1(t)^2 - 2C_0(t)C_2(t)}}{\sqrt{2}C_2(t)} \right|, \\ \phi(t) = \arg \left(\frac{-C_1(t) \pm \sqrt{C_1(t)^2 - 2C_0(t)C_2(t)}}{\sqrt{2}C_2(t)} \right), \end{cases} \quad (7)$$

其中, $|x|$ 表示对 x 取绝对值, $\arg(x)$ 表示复数 x 的相角.

3.2.1 原子相互作用对纠缠动力学的影响

在上面给出的三态描述中, 两原子系统的动力学 (即 $\{C_i(t)\} (i=0,1,2)$) 可解析求解. 为表示左右阱中粒子数的变化, 我们定义平均位置 $\langle x \rangle = (n_R - n_L)/(n_L + n_R)$, 即 $\langle x \rangle = \sum_{i=0}^2 |C_i(t)|^2 \frac{N-2i}{N} = |C_0(t)|^2 - |C_2(t)|^2$. 假定初始时刻两原子均处在左阱中, 即 $|\Psi(0)\rangle = |2,0\rangle$, 平均位置随时间的演化为

$$\begin{aligned} \langle x \rangle = & -\frac{\sqrt{U^2 + 16J^2} + U}{2\sqrt{U^2 + 16J^2}} \\ & \times \cos\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 16J^2}}{2}t\right) \\ & -\frac{\sqrt{U^2 + 16J^2} - U}{2\sqrt{U^2 + 16J^2}} \\ & \times \cos\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 16J^2}}{2}t\right), \end{aligned} \quad (8)$$

或

$$\begin{aligned} \langle x \rangle = & -\cos\left(\frac{U}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{U^2 + 16J^2}}{2}t\right) \\ & -\frac{U}{\sqrt{U^2 + 16J^2}} \sin\left(\frac{U}{2}t\right) \\ & \times \sin\left(\frac{\sqrt{U^2 + 16J^2}}{2}t\right). \end{aligned} \quad (9)$$

显然, $U=0$ 时, 平均位置将做周期性振荡, 且振荡周期 $T = 2\pi/(2J) = \pi$. 若 $U \neq 0$, 则平均位置的动力学表现为两种不同振幅不同频率的振荡的叠加.

当 U/J 极小时, (9) 式右侧的最后一项可以忽略, 则系统平均位置的动力学表现为一个周期为 $2\pi/(\sqrt{U^2 + 16J^2}/2) \approx \pi$ 的小周期振荡被周期为 $2\pi/(U/2) = 4\pi/U$ 的大周期振荡包络. 图 1 是数值

求解薛定谔方程得到的平均位置和纠缠度的时间演化. 相互作用强度分别为 $U=0.1$ 和 0.2 . 从图中易看出, $\langle x \rangle$ 的大周期分别约为 40π 和 20π , 小周期约为 π , 与解析结果相符. 对比 $\langle x \rangle$ 与 E_B , 易得 E_B 的频率是 $\langle x \rangle$ 的两倍. 随着原子间相互作用增强, 平均位置的大周期振荡的频率逐渐增大, 纠缠度的振荡频率也随之增大. 而小周期振荡的频率受相互作用的影响不很明显, 因而在一个大周期内的小周期振荡次数逐渐减少.

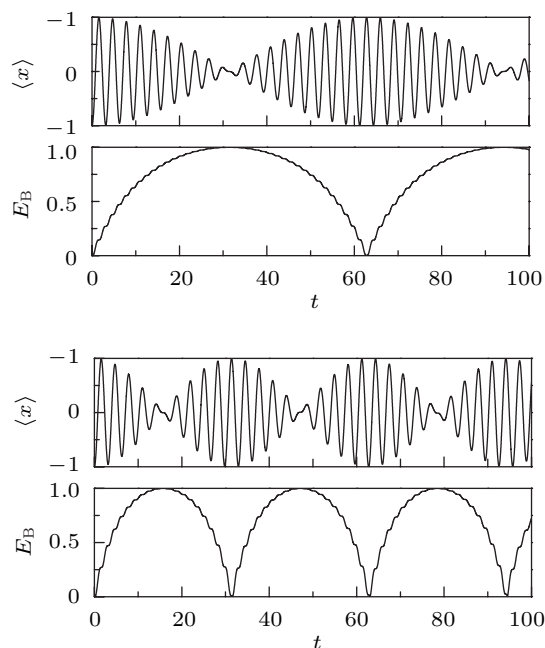


图 1 极弱的原子相互作用下平均位置随时间的演化及纠缠动力学 上图 $U=0.1$; 下图 $U=0.2$

图 2 为中等强度的原子相互作用情况下系统的平均位置及纠缠度随时间演化的数值结果. U 的取值分别为 1 和 2. 此时, (8) 式中两种频率对系统的动力学都有明显的贡献, 均不可被忽略. 平均位置 $\langle x \rangle$ 在相对大的时间尺度内仍存在 $4\pi/U$ 的准周期, 纠缠的动力学行为也存在一个类似的准周期, 大小为其一半. 两种频率行为的竞争使得系统在单原子隧穿时间尺度内的动力学相对杂乱, 几乎看不到清晰的单个原子隧穿行为信号. 随着原子相互作用的增强, $\langle x \rangle$ 和 E_B 的周期仍保持减小的趋势.

当原子间相互作用极强时, (8) 式右侧的最后一项只有极小的幅度, 第一项对系统的动力学起决定作用, 平均位置随时间演化极类似余弦振荡. 实际上, 这种情况下, 系统的动力学主要表现为两原

子共同隧穿^[24,25],角频率约为

$$\frac{\sqrt{U^2 + 16J^2} - U}{2} \approx \frac{4J^2}{U},$$

与图3中给出的结果相符.此时,纠缠度 E_B 也表现出较规则的周期振荡,周期为平均位置振荡周期的一半.在较规则的振荡行为上,有一些高频的小幅振荡,其角频率约为

$$\frac{\sqrt{U^2 + 16J^2} + U}{2}.$$

与上述两种情况不同的是,此时随着原子相互作用的增强,平均位置和纠缠度的振荡频率会逐渐减小.

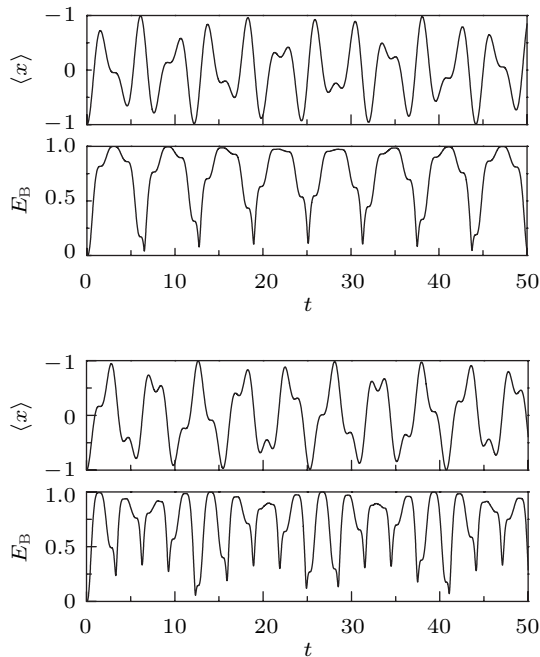


图2 中等强度的原子相互作用下平均位置随时间的演化及纠缠动力学 上图 $U=1$; 下图 $U=2$

3.2.2 初态对纠缠动力学的影响

在这部分,我们讨论系统初态对原子平均位置及纠缠度动力学的影响.考虑如下的初态形式: $|\Psi(0)\rangle = \sqrt{1-\alpha^2}|0,2\rangle + \alpha|2,0\rangle$,其中 α 为0到1之间的实数.图4给出了几种不同 α 值在不同强度的原子相互作用下的纠缠动力学.图4(a),(b),(c)中原子相互作用强度分别为 $U=0.1, 1$ 和 10 .对每种相互作用强度,给出了三种初值, α 分别取 $1, 0.9$ 和 0.708 .由图易知,一方面,各种相互作用强度下,纠缠动力学都对初始状态极为敏感.初始状态略微偏离 $|2,0\rangle$ 态,则纠缠度的振荡幅度迅速减小.随着初态的 α 取值趋近于 $1/\sqrt{2}$,初态的纠缠度逐渐趋近于1,且在后续的演化中,纠缠度限制在1附近做极

小幅度的振荡.另一方面,初始状态并不影响纠缠度振荡的周期或准周期.同一相互作用强度下,不同的初始态具有相同的振荡周期,与上一小节中给出的 $|2,0\rangle$ 初态时的周期相同.

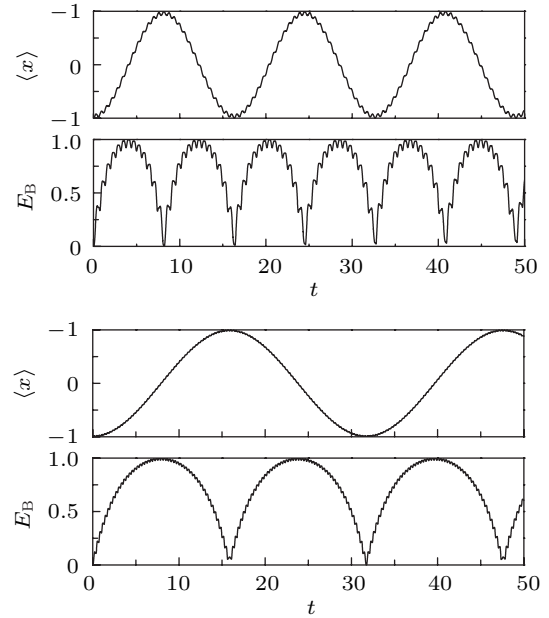


图3 极强的原子相互作用下平均位置随时间的演化及纠缠动力学 上图 $U=10$; 下图 $U=20$

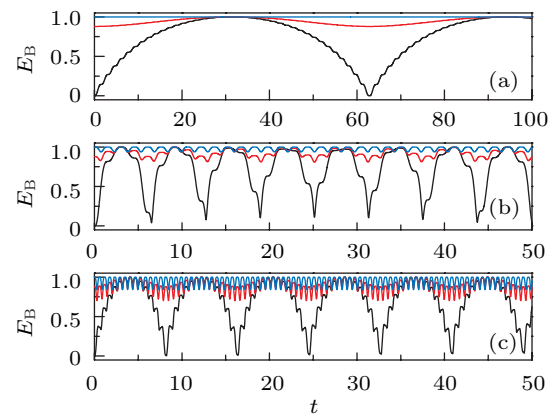


图4 不同初态情况下,平均位置随时间的演化及纠缠动力学.原子相互作用分别取(a)0.1,(b)1,和(c)10.每个小图中,从下到上的三条线分别对应初态 $\alpha=1, 0.9$ 及 0.708

4 结论

在本文中,我们借助由Majorana星的重心定义的纠缠度,研究了双势阱两个玻色原子的纠缠动力学.我们发现,纠缠度与原子平均位置的振荡周期或准周期存在着两倍关系.纠缠度的行为受到初始状态及原子相互作用强度的影响.纠缠度的振荡频

率主要依赖于原子间相互作用的大小,而初始状态会决定纠缠度的振幅.本文虽以最简单的两原子系统为例,但实际上从这种纠缠度的定义即可看出,

它能很方便地运用到多原子系统,这也是该定义的优势所在.

-
- [1] Nielsen M, Chuang I 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- [2] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [3] Masanes L, Pironio S, Acin A 2011 *Nature Commun.* **2** 238
- [4] Bennett C H 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 3121
- [5] Jennewein T, Simon C, Weihs G, Weinfurter H, Zeilinger A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4729
- [6] Opatrný T, Kurizki G 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3180
- [7] Li Y L, Feng J, Yu Y F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6797 (in Chinese) [李艳玲, 冯健, 於亚飞 2007 物理学报 **56** 6797]
- [8] Sun C P 2000 *Physics* **29** 457 (in Chinese) [孙昌璞 2000 物理 **29** 457]
- [9] Gühne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
- [10] Lastra F, López C E, Roa L, Retamal J C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022320
- [11] Li M, Fei S M 2012 *Phys. Rev. A* **85** 014304
- [12] Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 063614
- [13] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
- [14] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [15] Majorana E 1932 *Nuovo Cimento* **9** 43
- [16] Ganczarek W, Kuś M, Życzkowski K 2012 *Phys. Rev. A* **85** 032314
- [17] Bruno P 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 240402
- [18] Hald J, Sørensen J L, Schori C, Polzik E S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1319
- [19] Josse V, Dantan A, Bramati A, Pinard M, Giacobino E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 123601
- [20] Jaksch D, Briegel H-J, Gardiner C W, Zoller P 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1975
- [21] Jaksch D, Zoller P 2005 *Ann. Phys.* **315** 52
- [22] Lee C, Huang J, Deng H, Dai H, Xu J 2012 *Front. Phys.* **7** 109
- [23] Lee C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 150402
- [24] Fölling S, Trotzky S, Cheinet P, Feld M, Saers R, Widera A, Müller T, Bloch I 2007 *Nature* **448** 1029
- [25] Cao H, Zhao Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2187 (in Chinese) [曹辉, 赵清 2010 物理学报 **59** 2187]

Entanglement dynamics in Majorana representation*

Cao Hui[†]

(School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 26 September 2012; revised manuscript received 25 October 2012)

Abstract

With the help of the newly proposed definition of entanglement, the entanglement dynamics of a system composed of two bosonic atoms trapped in a symmetric double-well potential is investigated. For any state of this system, the description of Majorana representation can be analytically derived. It is found that the entanglement dynamics depends on both the atomic interaction and the initial state of the system. Specifically, the atomic interaction determines the oscillation frequency of the entanglement degree, whereas the initial state controls the oscillation amplitude.

Keywords: Majorana representation, quantum entanglement

PACS: 03.67.Mn, 03.65.Aa

DOI: 10.7498/aps.62.030303

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB921503) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11075020, 91021021).

[†] Corresponding author. E-mail: stanley_1012@163.com