

# 色噪声参激和周期调制噪声外激联合驱动的分线性振子的共振行为\*

屠浙<sup>1)2)</sup> 彭皓<sup>1)</sup> 王飞<sup>1)</sup> 马洪<sup>1)†</sup>

1) (四川大学数学学院, 成都 610065)

2) (电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

(2012年7月6日收到; 2012年9月13日收到修改稿)

研究了色噪声参激和周期调制噪声外激联合驱动的分线性振子及其共振行为, 利用 Laplace 变换和 Shapiro-Loginov 公式, 推导出了系统响应的一阶矩及稳态响应振幅的解析表达式. 讨论了系统阶数、摩擦系数、周期驱动力频率、色噪声强度和相关率等参数对系统稳态响应的影响, 发现系统稳态响应振幅具有非单调变化的特点, 即出现了广义随机共振现象. 并且在适当参数下, 稳态响应振幅还存在具有双峰的广义随机共振现象.

**关键词:** 分线性振子, 周期调制噪声, 随机共振, 双峰广义随机共振

**PACS:** 05.10.Gg, 05.40.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.030502

## 1 引言

随机共振最初是由 Benzi 及其合作者在 1981 年的一篇重要论文中首次提出的<sup>[1]</sup>. 在这篇论文中他们对周期性出现的古气象冰川问题做了研究, 利用地球本身的非线性条件, 以及在这时期内地球所受的随机力作用, 建立了一个随机共振模型, 用来解释上述气候现象. 此后, 不同领域的许多学者对随机共振的理论和实验研究产生了极大的兴趣<sup>[2-5]</sup>, 并陆续在物理、生物、电子等系统中发现了随机共振现象.

很长一段时间内, 人们普遍认为非线性是产生随机共振的一个必要条件<sup>[6,7]</sup>, 并且早期的研究也主要集中在受周期信号和加性噪声激励的非线性模型<sup>[6,8,9]</sup>. 然而, 随着研究的进一步深入, 已有学者发现线性系统中也会出现随机共振现象. 如 Bercichevsky 和 Gitterman<sup>[8]</sup> 在 1996 年讨论了受乘性色噪声驱动的非线性系统, 发现系统稳态响应的幅值增益关于噪声强度和相关时间均存在随机共振现象. 随后, Bercichevsky 和 Gitterman<sup>[10]</sup> 又对受乘

性噪声、加性噪声和周期信号联合驱动的线性系统进行了研究, 发现系统响应的信噪比是乘性噪声的相关时间和非对称性的非单调函数, 也是外激励信号频率的非单调函数, 但对于高斯白噪声却没有发生随机共振现象. 需要说明的是, 这些随机共振实际上是广义随机共振, 即指系统响应的某些函数 (如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等) 随系统的某些特征参数 (如激励振幅、频率或噪声的强度、相关率等) 非单调变化的现象<sup>[8,10-12]</sup>.

目前关于随机共振的研究多局限于整数阶系统, 而越来越多的研究表明, 许多物理、生化过程及材料、介质等具有记忆性, 这是整数阶系统所不能刻画和解释的. 分数阶微积分具有时间记忆性和长程空间相关性, 能更好地描述具有记忆、路径依赖性的物理过程和生化反应过程<sup>[13]</sup>, 因此被广泛应用于反常扩散、混沌以及黏弹性材料<sup>[14,15]</sup> 等的研究中. 其中, 基于分数阶系统来研究随机共振现象又是一个具有重要意义的课题.

本文引入分数阶微积分来刻画系统的幂律记忆性, 建立了由色噪声参激和周期调制噪声外激联合驱动的分线性振子的数学模型, 即分线性

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mahong@scu.edu.cn

Langevin 方程, 并研究其共振行为. 利用 Laplace 变换和 Shapiro-Loginov 公式, 推导出了系统响应的一阶矩及稳态响应振幅的解析表达式, 在此基础上进一步讨论了系统阶数、摩擦系数、周期驱动力频率、色噪声强度和相率等参数对系统稳态响应的影响, 发现系统稳态响应振幅具有非单调变化的特点, 也即出现广义随机共振现象. 并且在适当参数下, 稳态响应振幅还存在具有双峰的广义随机多共振现象.

## 2 系统模型

色噪声参激和周期调制噪声外激联合激励下的分数阶线性振子可由如下分数阶 Langevin 方程描述:

$$\ddot{x} + \gamma_0 D_t^\alpha x + [\omega^2 + Z(t)]x(t) = Z(t)A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t),$$

也即

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^\alpha} \dot{x}(t') dt' + [\omega^2 + Z(t)]x(t) = Z(t)A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t), \quad (1)$$

其中,  $x(t)$  为振子位移,  $\gamma$  为摩擦系数,  $\alpha \in (0, 1)$  为系统分数阶阶数, 它刻画了系统阻尼记忆性的强弱,  $Z(t)$  为零均值二值噪声, 等概率取  $a$  或  $-a$ , 属于系统外噪声, 其统计性质如下:

$$\langle Z(t) \rangle = 0, \langle Z(t+\tau)Z(t) \rangle = a^2 e^{-v|\tau|},$$

$\xi(t)$  为系统内噪声, 与阻尼核函数之间满足涨落耗散定理<sup>[16]</sup>, 且与  $Z(t)$  相互独立:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t+\tau)\xi(t) \rangle &= k_B T \gamma \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} |\tau|^{-\alpha}, \\ \langle \xi(t)Z(s) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

这里,  $k_B$  是 Boltzman 常数,  $T$  是介质温度.

### 2.1 系统响应一阶矩 $\langle x \rangle$

记  $K(t) = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$ , 并在 (1) 式两边同时取平均, 结合内外噪声的统计性质  $\langle Z(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ , 有

$$\langle \dot{x} \rangle + \int_0^t K(t-t') \langle \dot{x}(t') \rangle dt' + \omega^2 \langle x \rangle + \langle Zx \rangle = 0.$$

由 (1) 式可知  $x(t)$  是均方可微的随机过程, 故有<sup>[17]</sup>  $\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \langle \dot{x} \rangle$ , 于是上式可化为

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{x} \rangle + \int_0^t K(t-t') \langle \dot{x}(t') \rangle dt' + \omega^2 \langle x \rangle + \langle Zx \rangle = 0. \quad (2)$$

由于 (2) 式中出现了耦合项  $\langle Zx \rangle$ , 可利用 Shapiro-Loginov 公式<sup>[18]</sup> 对其进行解耦:

$$\frac{d}{dt} \langle Zx \rangle = \langle Z\dot{x} \rangle - v \langle Zx \rangle \quad (3)$$

在 (3) 式中又出现了新的耦合项  $\langle Z\dot{x} \rangle$ , 需要建立新的方程对其解耦. 在 (1) 式两边同乘以  $Z(t)$ , 再取平均, 得

$$\begin{aligned} \langle Z\dot{x} \rangle + e^{-vt} \int_0^t K(t-t') \langle Z\dot{x} \rangle e^{vt'} dt' + \omega^2 \langle Zx \rangle + \langle Z^2 x \rangle &= \langle Z^2 \rangle A_0 \cos(\Omega t), \end{aligned}$$

由于  $Z(t)$  是方差为  $a^2$  的二值噪声, 故上式可化为

$$\begin{aligned} \langle Z\dot{x} \rangle + e^{-vt} \int_0^t K(t-t') \langle Z\dot{x} \rangle e^{vt'} dt' + \omega^2 \langle Zx \rangle + a^2 \langle x \rangle &= a^2 A_0 \cos(\Omega t), \end{aligned}$$

再次利用 Shapiro-Loginov 公式得到  $\langle Z\dot{x} \rangle$  所满足的微分方程:

$$\frac{d}{dt} \langle Z\dot{x} \rangle = \langle Z\ddot{x} \rangle - v \langle Z\dot{x} \rangle.$$

令  $x_1 \equiv \langle x \rangle$ ,  $x_2 \equiv \langle \dot{x} \rangle$ ,  $x_3 \equiv \langle Zx \rangle$ ,  $x_4 \equiv \langle Z\dot{x} \rangle$ , 整理上述结果, 则有如下关于  $x_1, x_2, x_3, x_4$  的微分-积分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - x_3 - \int_0^t K(t-t') x_2(t') dt', \\ \dot{x}_3 = -v x_3 + x_4, \\ \dot{x}_4 = -a^2 x_1 - \omega^2 x_3 - v x_4 - e^{-vt} \int_0^t K(t-t') x_4(t') e^{vt'} dt' + a^2 A_0 \cos(\Omega t). \end{cases} \quad (4)$$

对 (4) 式进行 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases} sX_1 - x_1(0) = X_2, \\ sX_2 - x_2(0) = -\omega^2 X_1 - X_3 - \tilde{K}(s)X_2, \\ sX_3 - x_3(0) = -vX_3 + X_4, \\ sX_4 - x_4(0) = -a^2 X_1 - \omega^2 X_3 - vX_4 - \tilde{K}(s+v)X_4 + a^2 A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \end{cases} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} X_i &= L[x_i], \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \tilde{K}(s) &= L[K(t)] = \gamma s^{\alpha-1}, \\ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} &= L[\cos(\Omega t)]. \end{aligned}$$

上述方程组 (5) 是关于  $X_1, X_2, X_3, X_4$  的一阶线性方程组, 可解得

$$\begin{aligned} X_i(s) &= \sum_{k=0}^4 \hat{H}_{ik}(s)x_k(0) \\ &\quad + \hat{H}_{i0}(s)a^2A_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} D(s) &= [\omega^2 + s^2 + s\tilde{K}(s)][\omega^2 + (s + \nu)^2 \\ &\quad + (s + \nu)\tilde{K}(s + \nu)] - a^2, \\ \hat{H}_{11}(s) &= \frac{1}{D(s)}(s + \tilde{K}(s))[\omega^2 + (s + \nu)^2 \\ &\quad + (s + \nu)\tilde{K}(s + \nu)], \\ \hat{H}_{12}(s) &= \frac{1}{D(s)}[\omega^2 + (s + \nu)^2 + (s + \nu)\tilde{K}(s + \nu)], \\ \hat{H}_{13}(s) &= -\frac{1}{D(s)}[s + \nu + \tilde{K}(s + \nu)], \\ \hat{H}_{14}(s) &= -\frac{1}{D(s)}, \\ \hat{H}_{10}(s) &= -\frac{1}{D(s)}, \\ \hat{H}_{21}(s) &= \frac{1}{D(s)}\{a^2 - \omega^2[\omega^2 + (s + \nu)^2 \\ &\quad + (s + \nu)\tilde{K}(s + \nu)]\}, \\ \hat{H}_{22}(s) &= \frac{s}{D(s)}[\omega^2 + (s + \nu)^2 \\ &\quad + (s + \nu)\tilde{K}(s + \nu)], \\ \hat{H}_{23}(s) &= -\frac{s}{D(s)}[s + \nu + \tilde{K}(s + \nu)], \\ \hat{H}_{24}(s) &= -\frac{s}{D(s)}, \\ \hat{H}_{20}(s) &= -\frac{s}{D(s)}, \\ \hat{H}_{31}(s) &= -\frac{a^2}{D(s)}(s + \tilde{K}(s)), \\ \hat{H}_{32}(s) &= -\frac{a^2}{D(s)}, \\ \hat{H}_{33}(s) &= \frac{1}{D(s)}[s + \nu + \tilde{K}(s + \nu)] \\ &\quad \times [\omega^2 + s^2 + s\tilde{K}(s)], \\ \hat{H}_{34}(s) &= \frac{1}{D(s)}[\omega^2 + s^2 + s\tilde{K}(s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{30}(s) &= \frac{1}{D(s)}[\omega^2 + s^2 + s\tilde{K}(s)], \\ \hat{H}_{41}(s) &= -\frac{a^2}{D(s)}(s + \nu)(s + \tilde{K}(s)), \\ \hat{H}_{42}(s) &= -\frac{a^2}{D(s)}(s + \nu), \\ \hat{H}_{43}(s) &= \frac{1}{D(s)}\{a^2 - \omega^2[\omega^2 + s^2 + s\tilde{K}(s)]\}, \\ \hat{H}_{44}(s) &= \frac{1}{D(s)}(s + \nu)[\omega^2 + s^2 + s\tilde{K}(s)], \\ \hat{H}_{40}(s) &= \frac{1}{D(s)}(s + \nu)[\omega^2 + s^2 + s\tilde{K}(s)], \end{aligned}$$

再对 (6) 式进行逆 Laplace 变换, 得到系统响应一阶矩的解析表达式:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{k=0}^4 H_{ik}(t)x_k(0) \\ &\quad + a^2A_0 \int_0^t H_{i0}(t-t') \cos(\Omega t') dt', \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $H_{ik}(t) = L^{-1}[\hat{H}_{ik}(s)]$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

## 2.2 系统稳态响应振幅 $A$ 和相移 $\phi$

为使 (7) 式确定的系统响应一阶矩是稳定的, 系统参数需满足如下条件 [19]:

$$a^2 < a_{cr}^2 = \omega^2(\omega^2 + \gamma\nu^\alpha + \nu^2). \quad (8)$$

本文假设条件 (8) 式成立, 经长时间演化,  $t \rightarrow \infty$ , 系统响应的稳态均值对初值的依赖性将逐渐消失 [20,21], 即

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^4 H_{1k}(t)x_k(0) \\ &\approx \frac{\gamma(\omega^2 + \gamma\nu^\alpha + \nu^2)x_1(0)}{\Gamma(1-\alpha)[\omega^2(\omega^2 + \gamma\nu^\alpha + \nu^2) - a^2]t^\alpha} \\ &\quad + O(t^{-(1+\alpha)}), \end{aligned}$$

于是, 系统响应的稳态均值为

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{as} &\equiv \langle x \rangle|_{t \rightarrow \infty} \\ &= a^2A_0 \int_0^t H_{10}(t-t') \cos(\Omega t') dt. \end{aligned} \quad (9)$$

由上式可看出, 系统 (1) 可以看作一个线性时不变的滤波器, 其传递函数为

$$\chi(\Omega) = \chi'(\Omega) + i\chi''(\Omega) = \hat{H}_{10}(-i\Omega), \quad (10)$$

其中  $\chi'(\Omega), \chi''(\Omega)$  分别为传递函数的实部和虚部, 且

$$\hat{H}_{10}(-i\Omega) = \int_0^t e^{i\Omega t} H_{10}(t) dt.$$

在输入信号  $Z(t)A_0 \cos(\Omega t)$  的激励下, 系统输出稳态响应  $\langle x \rangle_{as}$  有如下形式<sup>[21-23]</sup>:

$$\langle x \rangle_{as} = A \cos(\Omega t + \phi) \quad (11)$$

其中,  $A$  和  $\phi$  分别为系统输出稳态响应振幅和相移,

表达式分别为

$$A = a^2 A_0 |\chi|, \quad \phi = \arctan\left(-\frac{\chi''}{\chi'}\right).$$

利用 (6) 式和 (10) 式, 可以解得系统稳态响应振幅  $A$  和相移  $\phi$ :

$$A^2 = a^4 A_0^2 |\chi|^2 = \frac{a^4 A_0^2}{\left[f_1 f_2 - f_3 \gamma \Omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) - a^2\right]^2 + \left[f_2 f_3 + f_1 \gamma \Omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right)\right]^2}, \quad (12)$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\chi''}{\chi'}\right) = \arctan\left[\frac{f_2 f_3 + f_1 \gamma \Omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right)}{a^2 - f_1 f_2 + f_3 \gamma \Omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right)}\right], \quad (13)$$

其中,

$$\begin{cases} f_1 = \omega^2 + \nu^2 - \Omega^2 + \gamma(\nu^2 + \Omega^2)^{\alpha/2} \cos\left(\alpha \arctan \frac{\Omega}{\nu}\right), \\ f_2 = \omega^2 - \Omega^2 + \gamma \Omega^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha\right), \\ f_3 = 2\nu \Omega + \gamma(\nu^2 + \Omega^2)^{\alpha/2} \sin\left(\alpha \arctan \frac{\Omega}{\nu}\right), \end{cases} \quad (14)$$

### 3 讨论

在上一节中利用 Laplace 变换和 Shapiro-Logvinov 公式得到了色噪声参激和周期调制噪声外激联合驱动的分数量线性振子的稳态响应振幅  $A$  和相移  $\phi$  的解析表达式, 即 (12) 和 (13) 式. 下面讨论系统阶数  $\alpha$ , 摩擦系数  $\gamma$ , 周期驱动力频率  $\Omega$ , 色噪声强度  $a^2$  和相关率  $\nu$  等参数对系统稳态响应振幅  $A$  的影响.

#### 3.1 系统自身参数对系统输出的影响

##### 3.1.1 $A^2$ 随摩擦系数 $\gamma$ 的共振

图 1(a) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  在不同周期驱动力频率  $\Omega$  下随摩擦系数  $\gamma$  变化的曲线. 从图中可以看到, 对于不同的周期驱动力频率  $\Omega$ , 稳态响应振幅平方  $A^2$  作为摩擦系数  $\gamma$  的函数  $A^2(\gamma)$  所表现出来的特征也有较大差异: 当  $\Omega = 0.5$  时,  $A^2$  随  $\gamma$  的增大而不断衰减, 此时没有共振; 当  $\Omega = 0.9$  时, 稳态响应振幅平方  $A^2$  出现了关于摩擦系数  $\gamma$  的随机共振现象; 而当  $\Omega = 1.3$  时,  $A^2(\gamma)$  则出现了具有两个共振峰的多峰广义随机共振现象.

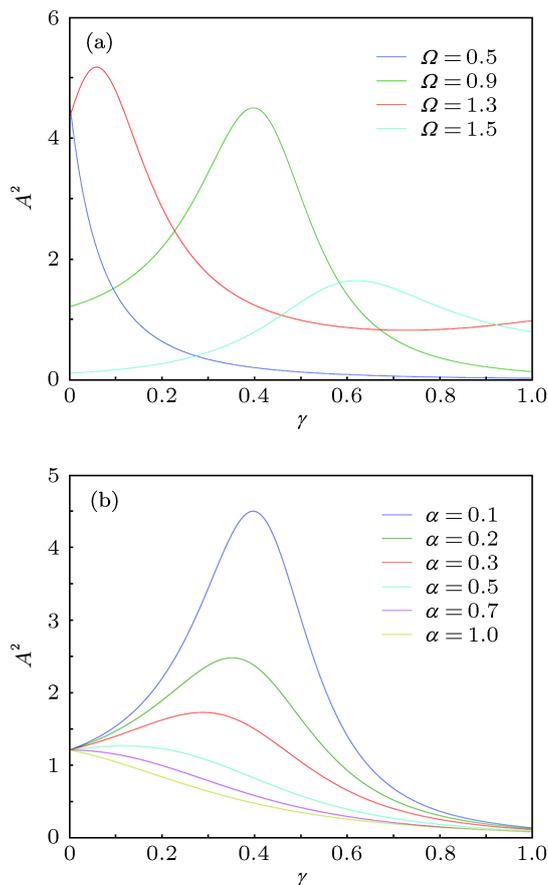


图 1  $A^2$  随摩擦系数  $\gamma$  变化的曲线 (a) 各曲线对应不同的周期驱动力频率  $\Omega$  ( $A_0 = \omega = 1, \alpha = 0.1, a^2 = 0.4, \nu = 0.1$ ); (b) 各曲线对应不同的分数阶数  $\alpha$  ( $A_0 = \omega = 1, \Omega = 0.9, a^2 = 0.4, \nu = 0.1$ )

图 1(b) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  作为摩擦系数  $\gamma$  的函数在不同分数阶阶数  $\alpha$  下的曲线图. 从图中可以看到, 当阶数  $\alpha$  较小时 (如  $\alpha = 0.1$ ), 意味着系统的记忆性较强, 此时稳态响应振幅平方  $A^2$  随着摩擦系数  $\gamma$  的增大存在一个峰值, 也即出现了广义随机共振现象. 随着阶数  $\alpha$  的逐渐增大, 一方面, 共振点往左偏移; 另一方面, 共振峰逐渐降低. 也就是说, 随机共振现象趋于减弱, 而当系统退化到整数阶时 (即  $\alpha = 1$ ), 共振峰已经消失, 即稳态响应振幅平方  $A^2$  随着摩擦系数  $\gamma$  的增大而衰减. 于是可以推断关于摩擦系数的共振主要是由系统记忆效应引起的.

### 3.1.2 $A^2$ 随分数阶阶数 $\alpha$ 的共振

图 2(a) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  在不同周期驱动力频率  $\Omega$  下随分数阶阶数  $\alpha$  变化的曲线. 从图中可以看到, 稳态响应振幅平方  $A^2$  具有关于分数阶阶数  $\alpha$  的共振曲线. 并且随着驱动频率  $\Omega$  的增大, 共振峰在逐渐向左移动的同时, 峰值呈现出增大的趋势, 当然由于系统稳态响应振幅受到多个参数的复杂影响, 周期驱动力频率也并不是越大越好. 图 2(a) 也说明了对于系统稳态响应振幅而言, 当周期驱动力频率  $\Omega$  取定时 (如  $\Omega = 0.5$ ), 强记忆性系统要优于弱记忆性系统.

图 2(b) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  在不同摩擦系数  $\gamma$  下随分数阶阶数  $\alpha$  变化的曲线. 从图中可以看到: 一方面, 适当的系统记忆性有利于系统稳态响应振幅的提高, 即稳态响应振幅平方  $A^2$  关于分数阶阶数  $\alpha$  出现广义随机共振现象; 另一方面, 摩擦耗散将抵消一部分记忆性所产生的正面效应, 即随着摩擦系数  $\gamma$  的增大, 随机共振效应将逐渐减弱, 同时共振峰向右移动.

## 3.2 周期驱动力频率 $\Omega$ 对系统输出的影响

图 3(a) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  在不同摩擦系数  $\gamma$  下随周期驱动力频率  $\Omega$  变化的曲线. 从图中可以看到, 稳态响应振幅平方  $A^2$  关于周期驱动力频率  $\Omega$  存在双峰的广义随机多共振现象. 并且, 共振双峰中左峰明显高于右峰, 即虽然在这两个共振频率下, 系统稳态响应振幅均能有大幅度提高, 但是它们对系统产生随机共振现象的作用大小是有区别的, 事实上相对较小的共振频率能够诱导产生更强的随机共振现象. 另外, 随着摩擦系数  $\gamma$  的增大, 右峰逐渐消失, 于是双峰共振逐渐演化为单峰共振, 而当摩擦系数  $\gamma$  过大时 (如  $\gamma = 0.8$ ), 系统

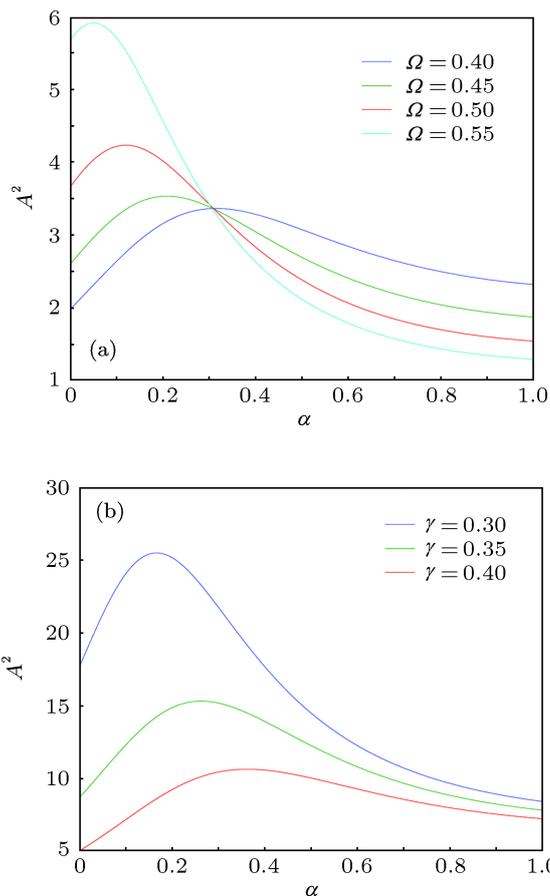


图 2  $A^2$  随分数阶阶数  $\alpha$  变化的曲线 (a) 各曲线对应不同的周期驱动力频率  $\Omega$ ; ( $A_0 = \omega = 1, a^2 = 1.4, \nu = 0.1, \gamma = 0.7$ ) (b) 各曲线对应不同的摩擦系数  $\gamma$  ( $A_0 = \omega = 1, \Omega = 0.3, \nu = 0.1, a^2 = 1.2$ )

稳态行为主要表现为耗散, 故随机共振现象将会消失.

图 3(b) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  在不同系统阶数  $\alpha$  和色噪声  $Z(t)$  相关率  $\nu$  下随周期驱动力频率  $\Omega$  变化的曲线. 不同于加性噪声驱动的整数阶线性振子, 本文所考虑的分数阶线性振子, 其稳态响应振幅  $A$  作为周期驱动力频率  $\Omega$  的函数表现出三种可能的不同行为特征: 双峰的广义随机多共振, 单峰的随机共振, 以及无共振. 如图 4 所示, 选取不同的阶数  $\alpha$  和噪声相关率  $\nu$  的组合  $(\alpha, \nu), A^2(\Omega)$  可以形成以下三种曲线: 1) 当  $\alpha = 0.1, \nu = 0.1$  时,  $A^2(\Omega)$  为一个具有双峰的函数, 即在该参数下, 系统稳态响应振幅  $A$  关于周期驱动力频率  $\Omega$  表现出双峰的广义随机多共振现象; 2) 当  $\alpha = 0.1, \nu = 0.7$  时,  $A^2(\Omega)$  则为一个单峰函数, 即系统稳态响应振幅  $A$  关于周期驱动力频率  $\Omega$  表现出单峰的随机共振现象; 3) 当  $\alpha = 0.9, \nu = 0.1$  时,  $A^2(\Omega)$  为一个单调递减函数, 即系统不存在关于周期驱动力频率  $\Omega$  的共

共振现象.

从图 3(b) 还可以看到稳态响应振幅平方  $A^2$  作为周期驱动力频率  $\Omega$  的函数  $A^2(\Omega)$  随分数阶阶数  $\alpha$  或噪声相关率  $\nu$  的变化趋势. 如当  $\alpha, \nu$  均较小时, 可以看到较强的随机共振现象, 并且此时稳态响应振幅具有双共振峰; 而随着阶数  $\alpha$  或噪声相关率  $\nu$  的增大, 随机共振现象趋于减弱, 并且共振峰由双峰逐渐演化为单峰, 并最终消失.

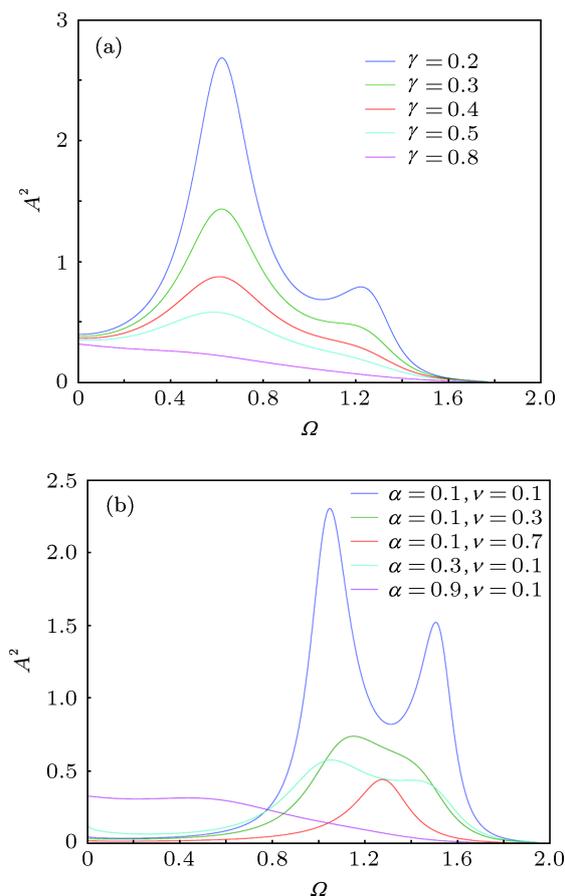


图 3  $A^2$  随周期驱动力频率  $\Omega$  变化的曲线 (a)  $A_0 = \omega = 1, a^2 = 0.4, \nu = 0.1, \alpha = 0.9$ ; (b)  $A_0 = \omega = 1, \gamma = 0.7, a^2 = 0.4$

图 4(a), (b) 分别给出了分数阶系统 ( $\alpha = 0.1$ ) 和整数阶系统 ( $\alpha = 1$ ) 的稳态响应振幅平方  $A^2$  在色噪声  $Z(t)$  不同相关率  $\nu$  下随周期驱动力频率  $\Omega$  变化的曲线. 通过观察分析图 5, 可以得到如下结果:

1) 共同点 不论是分数阶系统还是整数阶系统, 一方面它们都存在着稳态响应振幅平方  $A^2$  关于周期驱动力频率  $\Omega$  的随机共振现象; 另一方面, 随着噪声相关率  $\nu$  的增大, 二者的随机共振现象都呈现出减弱的趋势 (也即峰值逐渐减小);

2) 不同点 相对于整数阶系统而言, 分数阶系

统的稳态响应振幅平方  $A^2$  关于周期驱动力频率  $\Omega$  的随机共振较强 (即共振峰较高); 此外, 不同于整数阶系统中  $A^2(\Omega)$  只有一个共振峰, 分数阶系统在适当噪声相关率  $\nu$  下 (如  $\nu = 0.1$ ) 出现的则是一种双峰共振, 并且随着相关率  $\nu$  的增大, 共振双峰将逐渐演变为共振单峰.

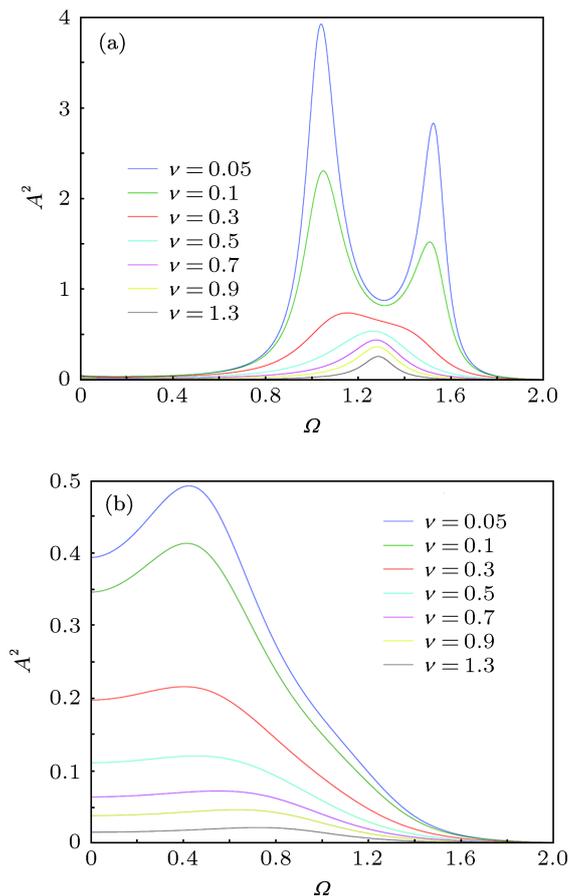


图 4  $A^2$  在不同噪声相关率  $\nu$  下随周期驱动力频率  $\Omega$  变化的曲线 ( $A_0 = \omega = 1, \gamma = 0.7, a^2 = 0.4$ ) (a)  $\alpha = 0.1$ ; (b)  $\alpha = 1$

### 3.3 外部噪声强度 $a^2$ 及相关率 $\nu$ 对系统输出的影响

图 5(a) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  在不同分数阶阶数  $\alpha$  下随噪声强度  $a^2$  变化的曲线. 从图中可观察到, 稳态响应振幅平方  $A^2$  具有关于噪声强度  $a^2$  的传统意义上的随机共振现象, 即输出信号幅度随噪声强度的增大而先增后减. 此外, 还可看到随着阶数  $\alpha$  的减小, 系统记忆性相应增强, 从而使得随机共振现象逐渐增强, 这就表明系统的记忆性有利于系统稳态响应振幅的提高.

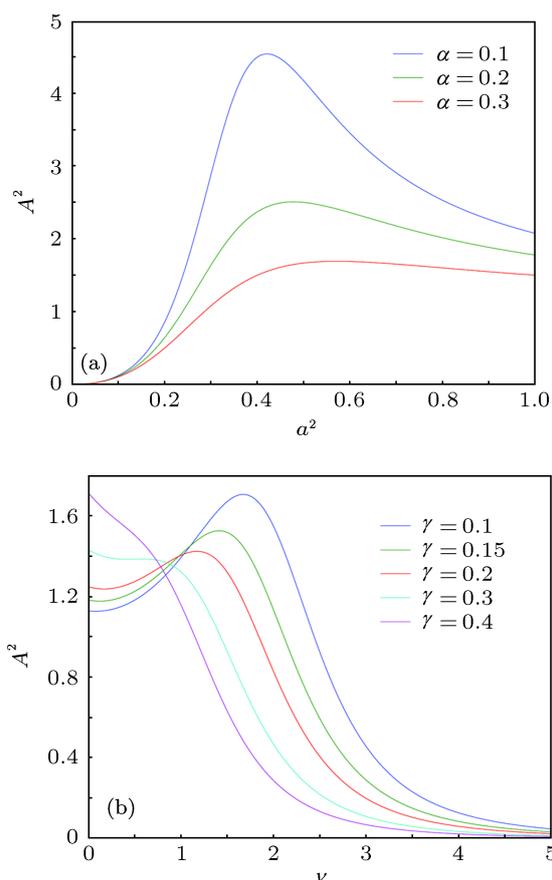


图5  $A^2$  随噪声强度  $a^2$  和相关率  $\nu$  变化的曲线 (a) 随噪声强度  $a^2$  变化 ( $A_0 = \omega = 1, \Omega = 0.9, \gamma = 0.4, \nu = 0.1$ ); (b) 随噪声相关率  $\nu$  变化 ( $A_0 = \omega = 1, \Omega = 0.9, \alpha = 0.1, a^2 = 1.4$ )

图 5(b) 给出了稳态响应振幅平方  $A^2$  在不同摩擦系数  $\gamma$  下随噪声相关率  $\nu$  变化的曲线. 从图中可

以看到, 当  $\gamma = 0.1$  时, 系统的稳态响应振幅平方  $A^2$  具有关于噪声相关率  $\nu$  较为明显的共振峰, 而随着摩擦系数  $\gamma$  的增大, 共振峰逐渐降低并向  $\nu$  减小的方向移动, 当  $\gamma = 0.4$  时, 共振峰最终消失. 这说明摩擦系数  $\gamma$  的增大, 意味着系统耗散增强, 要求色噪声的相关时间增长, 即相关率减小, 并且过大的摩擦系数使得系统耗散成为主导, 而此时噪声能量的补充将不足以克服系统能量损耗.

## 4 结论

本文研究了在噪声参激和周期调制噪声外激联合作用下的分数阶线性振子的共振行为. 利用 Laplace 变换和 Shapiro-Loginov 公式, 推导出了系统响应的一阶矩及稳态响应振幅的解析表达式, 讨论了系统阶数  $\alpha$ , 摩擦系数  $\gamma$ , 周期驱动力频率  $\Omega$ , 色噪声强度  $a^2$  和相关率  $\nu$  等参数对系统稳态响应的影响.

通过理论分析与讨论, 得到如下结论: 1) 系统稳态响应振幅会随着噪声强度的增大而呈现出先增后减的趋势, 即稳态响应振幅能够产生关于噪声强度的随机共振现象; 2) 类似于噪声强度, 周期驱动力频率、摩擦系数、分数阶阶数和色噪声相关率等参数同样能够诱导系统产生广义随机共振现象; 3) 在适当参数下, 稳态响应振幅还出现了关于周期驱动力频率或摩擦系数的具有双共振峰的广义随机多共振现象.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
- [4] Gang H, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
- [5] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [6] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
- [7] Jia Y, Yu S N, Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
- [8] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
- [9] Luo X, Zhu S 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
- [10] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [11] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [12] Ning L J, Xu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2889 (in Chinese) [宁丽娟, 徐伟 2009 物理学报 **58** 2889]
- [13] Qian M, Wang Y, Zhang X J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 810
- [14] Liu F, Anh V, Turner I, Zhuang P 2003 *J. Appl. Math. Comput.* **13** 233
- [15] Huang F, Liu F 2005 *Anziam J.* **46** 317
- [16] Bao J D 2009 *Stochastic Simulation Method of Classic and Quantum Dissipative System* (Beijing: Science Press) p160 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 84 页]
- [17] Zhou Y Q 2006 *Stochastic Process Theory* (2 Edn.) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) p94 (in Chinese) [周荫清 2006 随机过程理论 (第 2 版) (北京: 电子工业出版社) 第 94 页]
- [18] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563
- [19] Kempfle S, Schäfer I, Beyer H 2002 *Nonlinear Dynam.* **29** 99
- [20] Laas K, Mankin R, Reiter E 2011 *Int. J. Math. Mod. Meth. Appl.* **5** 280
- [21] Soika E, Mankin R, Ainsaar A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011141
- [22] Kubo R, Toda M, Hashitsume N 1985 *Statistical Physics II* (Berlin: Springer)
- [23] Sauga A, Mankin R, Ainsaar A 2010 *WSEAS Transactions on Systems* **18** 21

# Resonant behavior of a fractional linear oscillator with fluctuating frequency and periodically modulated noise\*

Tu Zhe<sup>1)2)</sup> Peng Hao<sup>1)</sup> Wang Fei<sup>1)</sup> Ma Hong<sup>1)†</sup>

1) (*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

2) (*Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China*)

(Received 6 July 2012; revised manuscript received 13 September 2012)

## Abstract

The resonant behavior of a fractional linear oscillator subjected to both parametric excitation of colored noise and external excitation of periodically modulated noise is considered. Using Laplace transformation technique and Shapiro-Loginov formula, exact expressions of the first moment for the system response and its long-time amplitude are presented. The influence of the system parameters on the long-time behavior of the system response is discussed, such as fractional order, friction coefficient, driving frequency, noise intensity and relevant rate. It is found that the long-time amplitude of the fractional oscillator behaves non-monotonical, that is, there exist stochastic resonances in a wide sense. Moreover, generalized stochastic resonance with two peaks can be found subject to some appropriate parameters.

**Keywords:** fractional linear oscillator, periodically modulated noise, stochastic resonance, multi-peak generalized stochastic resonance

**PACS:** 05.10.Gg, 05.40.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.030502

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

† Corresponding author. E-mail: mahong@scu.edu.cn