

## 一维晶格中费曼棘齿-棘爪热机\*

程海涛 何济洲†

(南昌大学物理系, 南昌 330031)

(2012年5月24日收到; 2012年9月10日收到修改稿)

研究了一维晶格中费曼棘齿-棘爪热机模型. 用粒子的概率主方程来描述粒子在晶格中的动力学特性, 推导出热流、功率和效率的表达式. 通过数值计算分析势垒高度、外力和温比对热流以及热机功率和效率的影响. 研究表明: 在粒子稳态概率流为零时, 存在非零的热流从高温库流入低温库, 类似于经典不可逆卡诺模型中的热漏; 热漏的存在使得热机的效率远远小于卡诺效率, 功率与效率之间为闭合的关系曲线, 热机为不可逆热机; 对热机性能参数进行优化, 可以使热机工作在最优性能状态下.

**关键词:** 费曼棘齿-棘爪, 热漏, 热力学性能, 不可逆热机

**PACS:** 05.40.-a, 05.70.Ln, 87.10.-e

**DOI:** 10.7498/aps.62.030503

## 1 引言

近年来, 随着生物技术和微纳米器件的小型化, 人们对各种费曼棘齿-棘爪模型和布朗马达的研究产生了新的兴趣<sup>[1-15]</sup>. Feynman等<sup>[16]</sup>最早在其费曼讲义中构造一种棘齿-棘爪模型, 他在研究其热机性能特征时假设系统是在可逆条件下进行的, 其效率可以达到卡诺效率. 然而, Sekimoto和Parrondo等<sup>[17-19]</sup>指出实际费曼热机是不可能工作在可逆条件下, 它的实际效率是远低于卡诺效率的. 因为费曼热机不同于传统的工作在两个孤立热库间的热机, 在费曼热机模型中, 两个温度不同的热库通过轴轮连接着, 由于这种机械的连接, 整个装置不再处于热平衡状态, 由此会引起两个温度不同的热库之间一种不可逆的热漏损失. Tu<sup>[20]</sup>进一步研究了费曼棘齿-棘爪热机最大功率下的效率, 发现此效率比CA效率略高.

另一方面, 与连续型费曼模型相对应的另外一种分立型模型就是晶格中微观布朗热机. 早在1999年, Jarzynski和Mayonka<sup>[21]</sup>引入晶格势能函数模式随热过程扰动的热棘爪, 构建可解的费曼棘齿-棘爪模型, 该模型即可作为热机又可作为制冷机进行

工作. 随后, Asfaw和He<sup>[22,23]</sup>等研究了在一维晶格周期锯齿势场中的布朗粒子受到热涨落驱动的微观热机, 由于布朗粒子在高低温库间动能变化引起的热流使得布朗热机为不可逆热机, 分析了该热机的功率效率特性.

本文基于可解的费曼棘齿-棘爪模型<sup>[21]</sup>, 研究处在周期非对称锯齿势中一维晶格微观费曼棘齿-棘爪模型. 通过理论推导计算系统稳态时的粒子流、热机的功率和效率, 探究系统中存在的不可逆因素, 分析系统性能参数对热机功率、效率的影响.

## 2 模型与理论分析

考虑一个粒子在一维周期晶格中相邻位置之间的跳跃, 晶格间距为 $d$ . 晶格势能函数 $U_i^{(m)}$ 有两种可能的模式( $m=1, 2$ ), 其表达式为

$$U_i^{(m)} \begin{cases} U_i^{(1)} = 0, & m = 1 \\ U_i^{(2)} = E[i(\text{mod})3 - 1], & m = 2 \end{cases} \quad (1)$$

势能函数在这两种模式之间随机切换, 并假设两种模式随机切换过程是由低温热库 $T_c$ 驱动的一个热过程. 因此, 从模式1变化成模式2的概率为 $\exp[-(U_i^{(2)} - U_i^{(1)})/k_B T_c]$ . 粒子与高温热库

\* 国家自然科学基金(批准号: 11065008)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn

$T_h$  耦合, 在热库的热扰动作用及外力  $f$  的作用下, 粒子从晶格位置  $i$  跳跃到晶格位置  $i+1$  的概率为  $\exp[-(U_{i+1}^{(m)} - U_i^{(m)}) + fd/k_B T_h]$ .

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Gamma \mathfrak{R} \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_6)^T,$$

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sigma}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sigma}{2} & \mu & 0 & 0 \\ \frac{\sigma}{2} & -\frac{3}{2} - \frac{\sigma}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sigma}{2} & -\frac{1}{2} - \mu - \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\mu - \frac{v^2}{2\sigma} - \frac{v\sigma}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{v\sigma}{2} & -\frac{3}{2} - \frac{v\sigma}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mu & \frac{v^2}{2\sigma} & \frac{v\sigma}{2} & -2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中  $\mu = \exp(-E/k_B T_c)$ ,  $v = \exp(-E/k_B T_h)$ ,  $\sigma = \exp(-fd/k_B T_h)$ .  $\Gamma$  为粒子在单位时间内试图跳跃的可能性,  $\mathfrak{R}_{m'n'}(n, n' = 1, \dots, 6)$  为粒子从  $n'$  态跳跃到  $n$  态的可能性,  $p_n(n = 1, \dots, 6)$  为  $t$  时刻发现粒子处在  $n$  态的概率. 令  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$  (即  $\mathfrak{R}\mathbf{p} = 0$ ), 得到系统处于稳态下的概率分布  $\bar{p}_n(n = 1, \dots, 6)$ . 稳态下粒子的平均净概率流为

$$J = \Gamma(\bar{p}_1 \mathfrak{R}_{21} + \bar{p}_4 \mathfrak{R}_{54} - \bar{p}_2 \mathfrak{R}_{12} - \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{45}), \quad (3)$$

粒子稳态的平均漂移速度与稳态流的关系为  $v = 3dJ$ . 当粒子从态 4 跳跃到态 5, 或从态 4 跳跃到态 6, 或从态 5 跳跃到态 6, 系统从热库中吸收热量; 反之, 系统释放热量到热库中. 因此, 单位时间内系统从高温库  $T_h$  中吸收的热量为

$$\dot{Q}_h = E\Gamma(\bar{p}_4 \mathfrak{R}_{54} + 2\bar{p}_4 \mathfrak{R}_{64} + \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{65} - \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{45} - \bar{p}_6 \mathfrak{R}_{56} - 2\bar{p}_6 \mathfrak{R}_{46}) + 3fd\Gamma J, \quad (4)$$

低温库  $T_c$  从系统中吸收的热量为

$$\dot{Q}_c = E\Gamma(\bar{p}_1 \mathfrak{R}_{41} + \bar{p}_6 \mathfrak{R}_{36} - \bar{p}_4 \mathfrak{R}_{14} - \bar{p}_3 \mathfrak{R}_{63}), \quad (5)$$

根据晶格势能和位置的不同, 一个周期内系统有 6 个可能的态. 粒子在晶格内的动力学特性由主方程描述<sup>[15]</sup>:

稳态时可得关系:

$$\begin{aligned} & \bar{p}_4 \mathfrak{R}_{54} + 2\bar{p}_4 \mathfrak{R}_{64} + \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{65} - \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{45} - \bar{p}_6 \mathfrak{R}_{56} - 2\bar{p}_6 \mathfrak{R}_{46} \\ & = \bar{p}_1 \mathfrak{R}_{41} + \bar{p}_6 \mathfrak{R}_{36} - \bar{p}_4 \mathfrak{R}_{14} - \bar{p}_3 \mathfrak{R}_{63}, \end{aligned} \quad (6)$$

于是热机驱使粒子克服外力  $f$  向右运动的输出功率为

$$P = f v = \dot{Q}_h - \dot{Q}_c = 3fd\Gamma J. \quad (7)$$

为了便于分析, 对热流以及功率进行无量纲处理, 令  $a = E/T_c$ ,  $\tau = T_h/T_c$ ,  $\lambda = fd/T_c$ , 可得到:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_h^* = \frac{\dot{Q}_h}{T_c} & = a\Gamma(\bar{p}_4 \mathfrak{R}_{54} + 2\bar{p}_4 \mathfrak{R}_{64} + \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{65} \\ & - \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{45} - \bar{p}_6 \mathfrak{R}_{56} - 2\bar{p}_6 \mathfrak{R}_{46}) + 3\lambda\Gamma J, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_c^* = \frac{\dot{Q}_c}{T_c} & = a\Gamma(\bar{p}_1 \mathfrak{R}_{41} \\ & + \bar{p}_6 \mathfrak{R}_{36} - \bar{p}_4 \mathfrak{R}_{14} - \bar{p}_3 \mathfrak{R}_{63}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$P^* = P/T_c = 3\lambda\Gamma J. \quad (10)$$

热机的效率为

$$\eta = \frac{P}{\dot{Q}_h} = \frac{3\lambda\Gamma J}{a\Gamma(\bar{p}_4 \mathfrak{R}_{54} + 2\bar{p}_4 \mathfrak{R}_{64} + \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{65} - \bar{p}_5 \mathfrak{R}_{45} - \bar{p}_6 \mathfrak{R}_{56} - 2\bar{p}_6 \mathfrak{R}_{46}) + 3\lambda\Gamma J}, \quad (11)$$

(8)–(11) 式是一维晶格微观费曼棘齿–棘爪热机性能的基本关系式. 为方便起见, 在下面的分析中令  $\Gamma = k_B = d = 1$ .

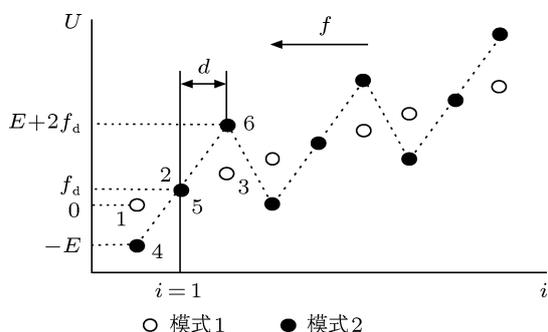


图1 两种模式下一维晶格的势能图

### 3 热机性能特征

图2 为高温库热流  $\dot{Q}_h^*$ , 粒子速度  $v$  与外力  $\lambda$  的关系曲线. 从图中可以看出, 热流  $\dot{Q}_h^*$  和速度  $v$  都随着外力  $\lambda$  单调减小. 当  $0 < \lambda < \lambda_0$  时,  $v > 0$ , 系统可作为热机进行工作; 当  $\lambda > \lambda_0$  时,  $v < 0$ , 热机不工作; 当  $\lambda = \lambda_0$  时,  $v = 0$  (即系统处在准静态条件下), 此时热流  $\dot{Q}_h^*$  的大小为  $\dot{Q}_k^* > 0$ . 又根据 (6), (8) 和 (9) 式分析可知: 当  $v = 0$  时,  $J = 0$ ,  $\dot{Q}_h^* = \dot{Q}_c^*$ . 也就是说, 当速度  $v = 0$  时, 依然有非零的热流  $\dot{Q}_k^*$  从高温库流出并完全流入低温库, 这类似于经典热机中的热漏, 我们把这部分非零热流  $\dot{Q}_k^*$  定义成系统的热漏.

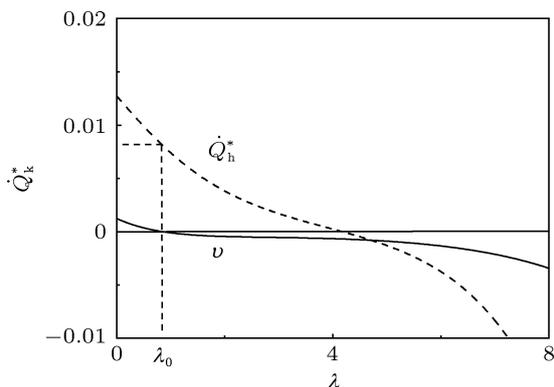


图2 高温库热流  $\dot{Q}_h^*$ , 速度  $v$  与外力  $\lambda$  的关系曲线,  $a = 10, \tau = 2$

图3 为不同势垒取值下, 系统热漏  $\dot{Q}_k^*$  与温库温比  $\tau$  的关系曲线. 从图中可以看出: 当  $\tau = 1$  时,  $\dot{Q}_k^* = 0$ ; 当  $\tau > 1$  时, 随着  $\tau$  的增大, 热漏单调增大.

当  $\tau$  比较小时, 热漏随  $\tau$  的影响较大; 此时在相同  $\tau$  的取值下, 势垒越大, 热漏越小, 当  $\tau$  很大时, 热漏趋于平稳; 此时在相同  $\tau$  的取值下, 势垒越大, 热漏越大. 综上, 只要两个温库间有温差, 系统就存在热漏, 温库的温差和锯齿势的势垒决定着系统热漏的大小.

给定  $\tau = 2$ , 根据 (10) 和 (11) 式可以画出不同势垒取值下功率  $P^*$ , 效率  $\eta$  关于  $\lambda$  的关系曲线如图4, 5 所示. 图4 为功率  $P^*$  与  $\lambda$  的关系曲线, 从图中可以看出, 功率  $P^*$  与  $\lambda$  呈抛物线型曲线关系, 外力的最大取值为  $\lambda_{\max} = \lambda_0$ , 当  $0 < \lambda < \lambda_{\max}$  时, 系统对外输出功,  $P^* > 0$ ; 当  $\lambda_{\max} = \lambda_0$  时,  $P^* = 0$ ; 在  $\lambda = \lambda_{P^*}$  处  $P^*$  达到最大值  $P_{\max}^*$ ; 随着势垒  $a$  增大,  $P_{\max}^*$  减小. 图5 为效率  $\eta$  与  $\lambda$  的关系曲线, 从图中可以看出, 效率  $\eta$  与  $\lambda$  也呈抛物线型曲线关系. 当  $0 < \lambda < \lambda_0$  时,  $\eta > 0$ , 系统为热机模型; 在  $\lambda = \lambda_\eta$  处  $\eta$  达到最大值  $\eta_{\max}$ ; 随着势垒  $a$  增大,  $\eta_{\max}$  减小. 图6 为功率  $P^*$  与效率  $\eta$  的关系曲线, 从图中可以看出热机的功率效率特性为一闭合的关系曲线.

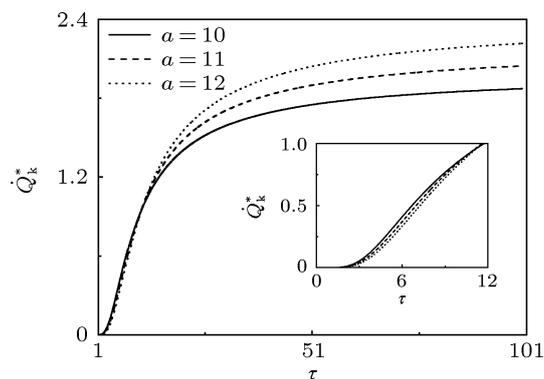


图3 系统热漏  $\dot{Q}_k^*$  与温比  $\tau$  的关系曲线

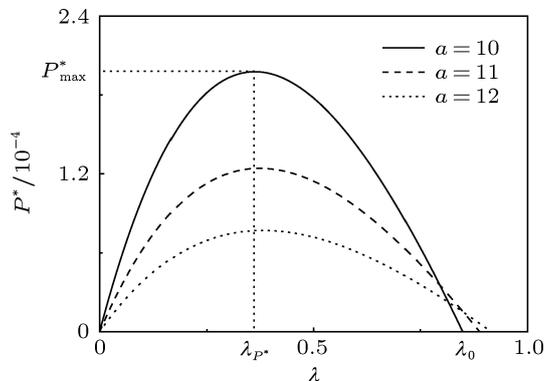


图4 功率  $P^*$  与  $\lambda$  的关系曲线

综上, 外力  $\lambda$  的取值存在上限值  $\lambda_0$ , 当外力取

值在区间  $(0, \lambda_0)$  时, 系统作为热机进行工作; 从图 2 中可知: 当  $\lambda = \lambda_0$  时,  $v = 0$ , 即  $J = 0$ , 系统处在准静态条件下, 根据 (10) 和 (11) 式, 热机输出功率  $P^* = 0$  和效率  $\eta = 0$ . 另外, 由于热机中存在非零的不可逆热漏  $\dot{Q}_h^* = \dot{Q}_k > 0$ , 使得我们所研究热机为不可逆热机, 热机功率与效率之间的关系曲线为闭合线, 这符合经典的不可逆热机性质 [24,25].

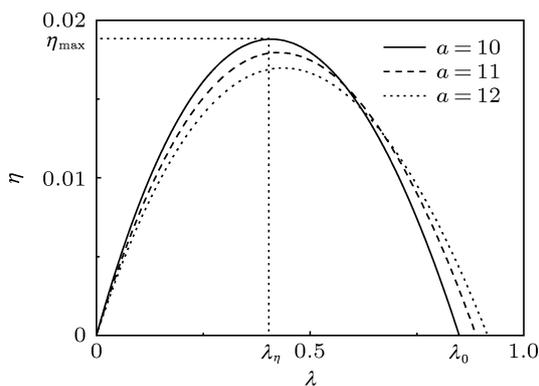


图 5 效率  $\eta$  与  $\lambda$  的关系曲线

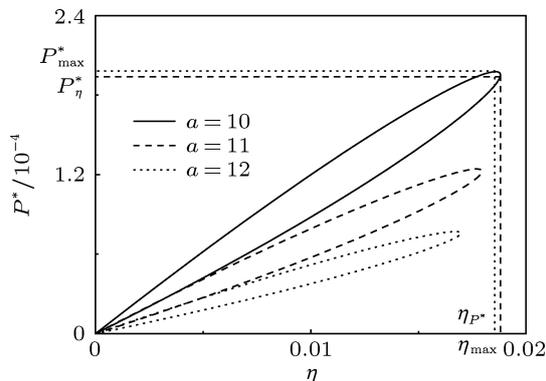


图 6 功率  $P^*$  与效率  $\eta$  的关系曲线

#### 4 最大功率和最大效率的优化分析

将 (10) 和 (11) 式对外力  $\lambda$  求偏导, 并令  $\partial P^*/\partial \lambda = 0, \partial \eta/\partial \lambda = 0$ , 分别得到不同势垒取值下最大功率  $P_{\max}^*$ , 最大效率  $\eta_{\max}$  与温比  $\tau$  的关系曲线, 如图 7, 8 所示. 从图中可以看出, 随着  $\tau$  的增大, 最大功率  $P_{\max}^*$  和最大效率  $\eta_{\max}$  都先增大后减小; 在  $\tau$  值比较小的区间, 随着势垒  $a$  增大, 最大功率  $P_{\max}^*$  减小, 最大效率也减少; 但是, 在  $\tau$  值比较大的区间, 随着势垒  $a$  增大, 最大功率  $P_{\max}^*$  增加, 最大效率也增加. 在  $\tau = \tau_{P^*_{\max}}$  处, 最大功率取得最优

值  $P_{\max}^*$ ,  $\tau = \tau_{\eta_{\max}}$  处, 最大效率取得最优值  $\eta_{\max}$ ; 当  $\tau = 1$  时,  $P_{\max}^* = 0, \eta_{\max} = 0$ , 热机不工作. 综上, 我们对势垒  $a$ , 外力  $\lambda$  和温比  $\tau$  进行优化选取, 可以得到热机的最优功率  $P_{\text{opt}}^*$  或是最优效率  $\eta_{\text{opt}}$ , 从而使热机工作在最优性能下.

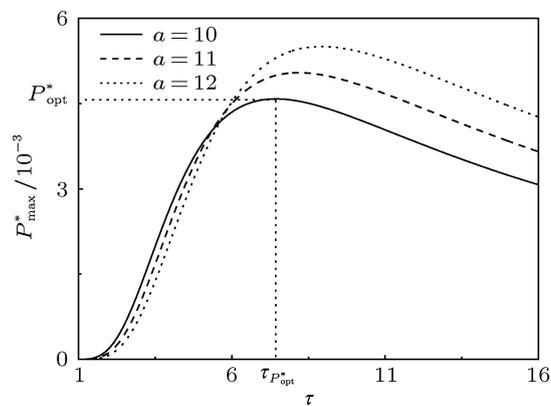


图 7 最大功率  $P_{\max}^*$  与  $\tau$  的关系曲线

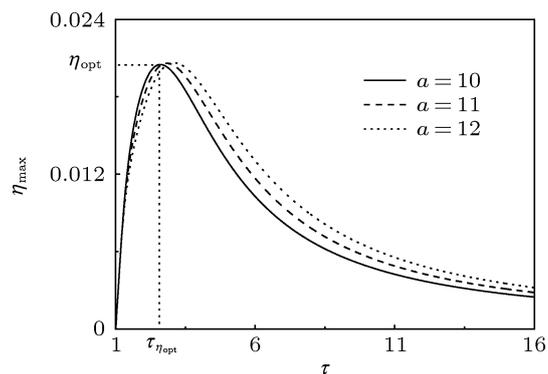


图 8 最大效率  $\eta_{\max}$  与  $\tau$  的关系曲线

#### 5 结论

本文建立了处在周期非对称锯齿势中一维晶格费曼棘齿-棘爪热机模型, 禁锢在晶格里的粒子受到温库的热扰动作用在相邻晶格态之间跳跃. 我们通过解稳态时粒子的概率主方程, 推导出温库的热流、热机的功率和效率的表达式. 定义粒子稳态概率流为零时, 从高温库流入低温库的非零热流为系统的热漏. 通过数值计算分析系统性能参数对温库的热流以及热机功率和效率的影响. 研究表明: 该模型系统存在热漏, 并且是温比  $\tau$  的单调递增函数; 热机的功率  $P^*$ , 效率  $\eta$  与外力  $\lambda$  呈抛物线型曲线关系, 存在最大的外力取值  $\lambda_0$ , 当  $\lambda = \lambda_0$  时, 功率

$P^* = 0, \eta = 0$ , 系统处于准静态条件下, 热机不工作; 热漏的存在使得热机的效率远远小于卡诺效率, 功率与效率之间为闭合的关系曲线, 热机为不可逆热

机; 对热机性能参数进行优化, 热机可以工作在最优性能状态下.

- 
- [1] Büttiker M 1987 *J. Phys.* B **68** 161
- [2] van Kampen N G 1988 *IBM J. Res. Dev.* **32** 107
- [3] Landauer R 1988 *J. Stat. Phys.* **53** 233
- [4] Derényi I, Astumian R D 1999 *Phys. Rev. E* **59** R6219
- [5] Hondou T, Sekimoto K 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6021
- [6] Ai B Q, Xie H Z, Wen D H, Liu X M, Liu L G 2005 *Eur. Phys. J. B* **48** 101
- [7] Ai B Q, Wang L Q, Liu L G 2006 *Phys. Lett. A* **352** 286
- [8] Zhang Y, Lin B H, Chen J C 2006 *Eur. Phys. J. B* **53** 481
- [9] Lin B H, Chen J C 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 075006
- [10] Ding Z M, Chen L G, Sun F R 2010 *Braz. J. Phys.* **40** 141
- [11] Zhang Y P, He J Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 090502
- [12] Zhang Y P, He J Z, Xiao Y L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 100506
- [13] Ding Z M, Chen L G, Sun F R 2010 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **53** 876 [丁泽民, 陈林根, 孙丰瑞 2010 中国科学: 物理学力学天文
- 学 **40** 16]
- [14] Gao T F, Zhang Y, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3279
- [15] Sokolov I M, Blumen A 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 3021
- [16] Feynman R P, Leighton R B, Sands M 1966 *The Feynman Lectures on Physics I* (Reading MA: Addison-Wesley) 46.1–46.9
- [17] Parrondo J M R, Español P 1996 *Am. J. Phys.* **64** 1125
- [18] Sekimoto K 1997 *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 1234
- [19] Velasco S, Roco J M M, Medina A, Calvo Hernández A 2001 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **34** 1000
- [20] Tu Z C 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 312003
- [21] Jarzynski C, Mazonka O 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6448
- [22] Asfaw M, Bekele M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 056109
- [23] Zhang Y P, He J Z, He X, Xiao Y L 2010 *Commun. Theor. Phys.* **54** 857
- [24] Yan Z J, Chen J C 1990 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **23** 136
- [25] Chen J C 1997 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **30** 582

# Feynman's ratchet and pawl heat engine in a one-dimensional lattice\*

Cheng Hai-Tao He Ji-Zhou<sup>†</sup>

(Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

(Received 24 May 2012; revised manuscript received 10 September 2012)

## Abstract

In this paper, we study the Feynman's ratchet and pawl heat engine in a one-dimensional lattice. The dynamics of the particle is described by a master equation. The expressions of the current, efficiency and power output of the heat engine are derived analytically. The influences of the height of barrier, external load force and the temperature ratio of the heat reservoirs on the efficiency of heat engine are discussed. When the steady-state current is zero, there is a nonzero heat flux transferred from the hot bath to the cold bath, which is similar to the heat leak of the irreversible Carnot model. The curve of the power output versus the efficiency is a loop-shaped one. The heat engine is irreversible and the efficiency is less than the Carnot efficiency. The heat engine can work in optimal operation by optimizing the performance parameters of the heat engine.

**Keywords:** Feynman's ratchet and pawl, heat leak, thermodynamic performance, irreversible heat engine

**PACS:** 05.40.-a, 05.70.Ln, 87.10.-e

**DOI:** 10.7498/aps.62.030503

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11065008).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn