基于表面阻抗边界条件的等离子体薄涂层电磁散射的时域有限差分分析*

杨利霞[1)†] 马辉[1)] 施卫东[2)] 施丽娟[3)] 于萍萍[1)]

1) (江苏大学计算机科学与通信工程学院通信工程系, 镇江 212013)

2) (江苏大学流体机械工程技术研究中心, 镇江 212013)

3) (江苏大学理学院物理系, 镇江 212013)

(2012 年 6 月 14 日收到; 2012 年 7 月 11 日收到修改稿)

基于表面阻抗边界条件时域有限差分 (FDTD) 方法研究了一维斜入射情况下非磁化等离子体薄涂层涂敷金属材料的电磁散射特性, 该方法忽略对薄层背景材料进行网格剖分, 大大减少了计算量. 首先推导了理想导体涂敷等离子体薄涂层的表面阻抗频域表达式, 然后代入边界条件并变换到时域, 再用分段线性递推卷积方法将时域表达式离散得到 FDTD 迭代式. 编程计算了垂直及斜入射情形下的平行极化和垂直极化反射系数, 通过验证算例与解析解对比, 结果表明该方法的准确性和有效性. 最后利用该方法分析了不同入射角对反射系数的影响.

关键词: 时域有限差分方法, 表面阻抗边界条件, 非磁化等离子体薄涂层

PACS: 41.20.Jb, 42.68.Mj **DOI:** 10.7498/aps.62.034102

1 引 言

飞行器以超音速再入大气层的过程中与大气强烈作用, 表面的气体被电离形成等离子体鞘层, 等离子体鞘层对电磁波的散射作用, 导致飞行器再入过程中出现一段时间的通信中断, 这对飞行器的回收安全造成了很大危胁 [1,2]. 一般情况下, 目标飞行器表面分布的等离子体鞘层厚度相对于飞行体电尺寸而言比较薄, 所以研究等离子体薄涂层电磁特性, 对于理解再入过程中通信中断现象及提出解决方案具有很重要的理论及现实意义.

对于常规介质情况下的基于时域有限差分 (FDTD) 方法薄涂层电磁散射的研究, 目前主要有粗细网格剖分法 [3]、节点修正等效参数方法 [4] 及表面阻抗边界条件 (SIBC) 方法 [5−7] 等. 对于色散有耗介质, 文献 [8] 利用节点修正等效参数方法拓展处理了色散介质薄涂层电磁散射研究, 但这种方法处理复杂等离子体介质时, 将耗费大量的内存资源, 而且编程复杂度较高. 本文运用文献 [5] 提出的表面阻抗边界条件方法成功地研究了等离子体薄涂层的电磁散射特性. 该方法忽略对薄层背景材料进行网格剖分, 大大减少了计算量.

以平行极化为例, 基于表面阻抗边界条件, 先推导了理想导体涂敷等离子体薄层的表面阻抗频域表达式, 将它代入到边界条件中并变换到时域, 再用分段线性递推卷积 (PLRC) 方法 [9] 将时域表达式离散化得到 FDTD 迭代式. 垂直极化处理过程同理. 通过验证算例中数值解与解析解对比, 验证了该方法的准确性, 表明了基于表面阻抗边界条件处理非磁化等离子体薄涂层电磁散射的 FDTD 方

* 国家自然科学基金 (批准号: 61072002)、教育部高等学校博士点科研基金 (批准号: 20093227120018)、江苏省第八届 “六大人才高峰计划”(批准号: 2011-DZXX-031) 和江苏省博士后基金 (批准号: 1201001A) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lixiayang@yeah.net

法是有效的.

2 金属表面等离子体薄层的表面阻抗边界条件及表达式推导

2.1 非磁化等离子体表面阻抗边界条件简述

等离子体介电常数为 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_{\rm r}(\omega)$, 非磁化等离子体的相对介电常数 [10] 为标量

$$\varepsilon_{\rm r}=1-\frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2+\nu_e^2}-{\rm j}\left(\frac{\nu_e}{\omega}\frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2+\nu_e^2}\right), \tag{1}$$

表面阻抗边界条件 [11] 为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{n}\times(Z_sJ_s), \tag{2}$$

在频域, $\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$ 随即得到:

$$\boldsymbol{E}_{\tan}(\omega)=\boldsymbol{Z}_s(\omega)\left[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_{\tan}(\omega)\right], \tag{3}$$

得到时域的卷积形式

$$\boldsymbol{E}_{\tan}(t)=Z_s(t)*\left[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_{\tan}(t)\right]. \tag{4}$$

2.2 等离子体薄层表面阻抗及边界条件表达式分析

平行极化和垂直极化波斜入射到理想导体背景的等离子体薄层如图 1(a) 和图 1(b) 所示:

以平行极化电磁波斜入射为例, 由电磁波传播理论, 离基导体板距离为 d 处的输入阻抗, 即表面阻抗为

$$Z(\omega)=Z_1(\omega)\cos\theta_i\frac{Z_2(\omega)\cos\theta_t+{\rm j}Z_1(\omega)\cos\theta_i\tan(k_1z\cos\theta_i)}{Z_1(\omega)\cos\theta_i+{\rm j}Z_2(\omega)\cos\theta_t\tan(k_1z\cos\theta_i)}, \tag{5}$$

式中, $Z_1(\omega)=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 是等离子体特性波阻抗; $Z_2(\omega)$ 是底层物质特性波阻抗; $k_1=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 是等离子体波数; 与以上图形对应, $\theta_i=\phi$, 空气入射角是 θ; d 是等离子体薄层厚度, 数值取 cm 或 mm 级.

等离子体薄层与理想导体模型如图 2 所示.

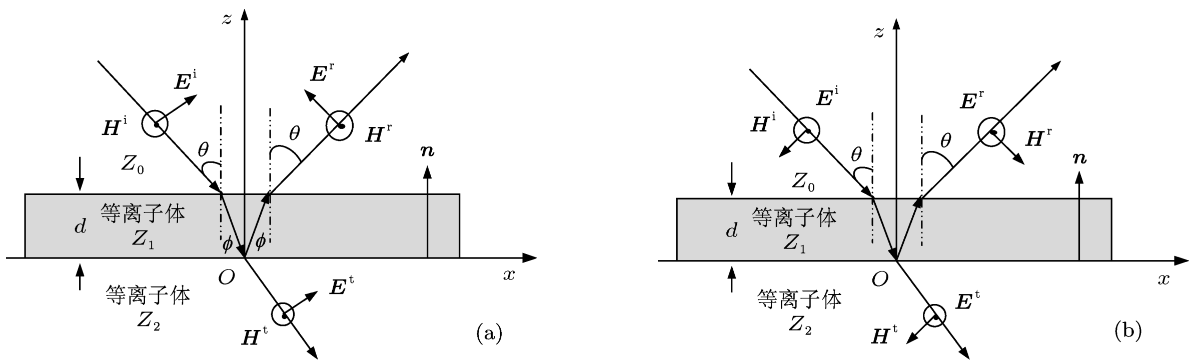

图 1 (a) 平行极化 TMz 波; (b) 垂直极化 TEz 波

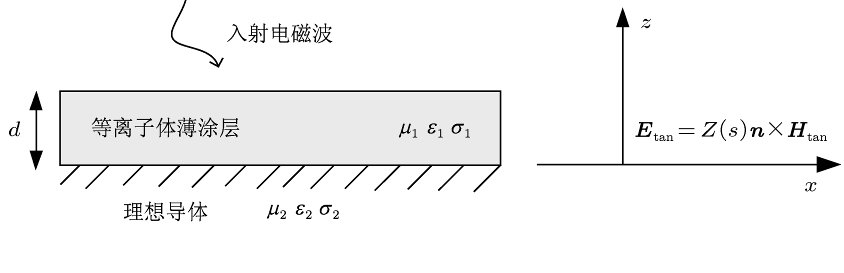

图 2 等离子体薄层与理想导体材料模型

图 2 中 $\boldsymbol{E}_{\tan}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\tan}$ 代表边界的切向电场和磁场. 由于背景材料是理想导体, 介质波阻抗满足 $Z_2=0$, 所以等离子体表面输入阻抗变为

$$Z=\mathrm{j}Z_1\cos\theta_1\tan(k_1 d\cos\theta_i). \tag{6}$$

在图 2 中取边界法向分量为轴正向, 即 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_z$, 则 (3) 式变为

$$E_x=-Z(\omega)H_y, \tag{7}$$
$$E_y=Z(\omega)H_x. \tag{8}$$

为方便数值计算, 在 (6) 式中, 运用正切连续的有理近似 [6]

$$\tan(x)\approx f(x)=\sum_{s=1}^{M}\frac{a_s x}{1-q_s x^2}, \tag{9}$$

此处 $q_s=\dfrac{4}{(2s-1)^2\pi^2}$ 是为了正确地得到正切函数的极点. 同时, a_s 的取值用来保证有理近似的零点与正切函数 $\tan(x)$ 的零点相等. 通过取定 M 的值, 得到 M 个奇点 q_s, $s=1,\cdots,M$. 和正切函数的 M 个零点 $z_s=(s-1)\pi$, $s=1,\cdots,M$. 注意到正切的第一个零点 $z_s=0$ 已经包含在有理式 (8) 中, 故而有 $f(z_s)=0$, $s=2,\cdots,M$. 这种方法的下一步工作是求得一组线性方程组的解, 此解为系数 a_s. 辅助方程取为 $f(x_0)=\tan(x_0)$, 本论文得到的有理近似 $(M=20, x_0=\pi/4)$ 图形如图 3 所示.

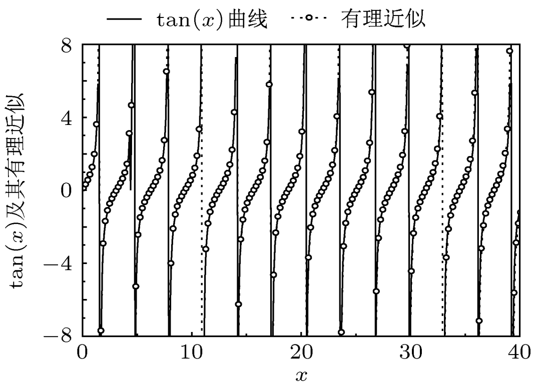

图 3 正切函数有理近似 $(M=20, x_0=\pi/4)$

这样 (6) 式变为

$$Z=\mathrm{j}Z_1\cos\theta_i\tan(k_1 d\cos\theta_i)$$
$$\approx\mathrm{j}Z_1\cos\theta_i\sum_{s=1}^{M}\frac{a_s x}{1-q_s x^2}. \tag{10}$$

根据折射定律有

$$\cos\theta_i=\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta}{n}\right)^2},$$
$$n=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}, \tag{11}$$

θ 为空气中的入射角. 将 (10), (11) 式代入 (6) 式并整理得

$$E_x=\sum_{s=1}^{M}\frac{-\mathrm{j}Z_1\cos^2\theta_i k_1 d a_s}{1-q_s\cos^2\theta_i k_1^2 d^2}H_y, \tag{12}$$

定义

$$E_s=\frac{-\mathrm{j}Z_1\left(1-\dfrac{\sin^2\theta}{n^2}\right)k_1 d a_s}{1-q_s\left(1-\dfrac{\sin^2\theta}{n^2}\right)k_1^2 d^2}H_y, \tag{13}$$

则有

$$E_x=\sum_{s=1}^{M}E_s. \tag{14}$$

由于等离子体是非磁性材料, 相对磁导率为 1, 即有

$$\begin{cases}Z_1=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}=Z_0\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}},\\ k_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}=k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}},\end{cases} \tag{15}$$

所以 (10) 式变为

$$Z=\sum_{s=1}^{M}\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0 d a_s\left(1-\dfrac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)}{1-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega^2(\varepsilon_{\mathrm{r}}-\sin^2\theta)}, \tag{16}$$

将 (11), (15) 式代入 (13) 式得

$$E_s=\frac{-\mathrm{j}\omega\mu_0 d a_s\left(1-\dfrac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)}{1-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega^2(\varepsilon_{\mathrm{r}}-\sin^2\theta)}H_y, \tag{17}$$

式中 $s=1,\cdots,20$, 下文相同.

下面对 (17) 式进行处理, 将 ε_{r} 代入并整理得

$$E_s-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\left[\omega^2-\omega_{Pe}^2\frac{\mathrm{j}\omega}{\nu_e+\mathrm{j}\omega}\right]E_s$$
$$+q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\sin^2\theta\cdot\omega^2 E_s=-\mathrm{j}\omega\mu_0 d a_s H_y$$
$$+\mu_0 d a_s\sin^2\theta\cdot j\omega\frac{\mathrm{j}\omega\nu_e-\omega^2}{\omega_{Pe}^2+\mathrm{j}\omega\nu_e-\omega^2}H_y, \tag{18}$$

反变换到时域:

$$E_s(t)-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\left[-\frac{\partial^2 E_s(t)}{\partial t^2}\right.$$
$$\left.+\nu_e\omega_{Pe}^2\mathrm{e}^{-\nu_e t}*E_s(t)-\omega_{Pe}^2 E_s(t)\right]$$
$$+q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\sin^2\theta\left[-\frac{\partial^2 E_s(t)}{\partial t^2}\right]$$

$$
\begin{aligned}
=&-\mu_0 da_s\frac{\partial H_y}{\partial t}+\mu_0 da_s\sin^2\theta\left\{\frac{\partial H_y(t)}{\partial t}\right.\\
&+\frac{\omega_{Pe}^2}{2}\left[\left(-\frac{\mathrm{j}b}{a}-1\right)\mathrm{e}^{(\mathrm{j}a-b)t}*H_y(t)\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{\mathrm{j}b}{a}-1\right)\mathrm{e}^{(-\mathrm{j}a-b)t}*H_y(t)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

整理得到

$$
\begin{aligned}
&(1+q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega_{Pe}^2)E_s(t)-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega_{Pe}^2\nu_e\mathrm{e}^{-\nu_e t}*E_s(t)\\
&+(q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\sin^2\theta)\frac{\partial^2 E_s(t)}{\partial t^2}\\
=&\mu_0 da_s\sin^2\theta\cdot\left[hcf1\cdot\mathrm{e}^{(\mathrm{j}a-b)t}*H_y(t)\right.\\
&\left.+hcf2\cdot\mathrm{e}^{(-\mathrm{j}a-b)t}*H_y(t)\right]\\
&+(\mu_0 da_s\sin^2\theta-\mu_0 da_s)\frac{\partial H_y(t)}{\partial t},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

式中系数为

$$
\begin{aligned}
a=&\sqrt{\omega_{Pe}^2-\left(\frac{\nu_e}{2}\right)^2},\\
b=&\frac{\nu_e}{2},\\
hcf1=&\frac{\omega_{Pe}^2}{2}\left(-\mathrm{j}\frac{b}{a}-1\right),\\
hcf2=&\frac{\omega_{Pe}^2}{2}\left(\mathrm{j}\frac{b}{a}-1\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

处理 (20) 式卷积时, 令

$$
\begin{aligned}
\varphi_s^n=&\mathrm{e}^{-\nu_e t}*E(t)\\
=&\int_0^t\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}E_s(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\\
\varphi_{s4}^n=&\mathrm{e}^{(\mathrm{j}a-b)t}*H_y(t)\\
=&\int_0^t\mathrm{e}^{(-\nu_{eh4})\tau}H_y(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\\
\varphi_{s5}^n=&\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}a+b)t}*H_y(t)\\
=&\int_0^t\mathrm{e}^{(-\nu_{eh5})\tau}H_y(t-\tau)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

上式中

$$
\begin{aligned}
\nu_{eh4}=&-(\mathrm{j}a-b),\\
\nu_{eh5}=&(\mathrm{j}a+b),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

以上 φ_s^n, φ_{s4}^n, φ_{s5}^n 的处理过程见附录 A, 最后 (20) 式写为如下形式:

$$
\begin{aligned}
&(1+q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega_{Pe}^2)E_s(t)-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega_{Pe}^2\nu_e\varphi_s^n\\
&+(q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\sin^2\theta)\frac{\partial^2 E_s(t)}{\partial t^2}\\
=&\mu_0 d{a_s}^2\theta\cdot[hcf1\cdot\varphi_{s4}+hcf2\cdot\varphi_{s5}]\\
&+(\mu_0 da_s\sin^2\theta-\mu_0 da_s)\frac{\partial H_y(t)}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

3 离散时域的 FDTD 迭代式推导

将 (24) 式在 $t=n\Delta t$ 时刻离散

$$
\begin{aligned}
&(1+q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega_{Pe}^2)E_s^n-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega_{Pe}^2\nu_e\varphi_s^n\\
&+(q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\sin^2\theta)\frac{E_s^{n+1}-2E_s^n+E_s^{n-1}}{(\Delta t)^2}\\
=&\mu_0 da_s\sin^2\theta[hcf1\cdot\varphi_{s4}+hcf2\cdot\varphi_{s5}]\\
&+(\mu_0 da_s\sin^2\theta-\mu_0 da_s)\frac{H_y^{n+1/2}-H_y^{n-1/2}}{\Delta t},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

由此得到 E_s^{n+1} 的迭代式

$$
\begin{aligned}
E_s^{n+1}=&\frac{1}{A_s}\left[B1_sE_s^n+B2_sE_s^{n-1}+B3_s\varphi_s^n+B4_s\varphi_{s4}^n\right.\\
&\left.+B5_s\varphi_{s5}^n+B6_s(H_y^{n+1/2}-H_y^{n-1/2})\right],
\end{aligned}
\tag{26}
$$

式中系数

$$
\begin{aligned}
A_s=&-\frac{q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\cos^2\theta}{(\Delta t)^2},\\
B1_s=&1+q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\omega_{Pe}^2\left(1-\frac{2}{(\Delta t)^2\omega_{Pe}^2}\cos^2\theta\right),\\
B2_s=&\frac{q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2}{(\Delta t)^2}\cos^2\theta,\\
B3_s=&-q_s\mu_0\varepsilon_0 d^2\nu_e\omega_{Pe}^2,\\
B4_s=&-\mu_0 da_s\sin^2\theta\cdot hcf1,\\
B5_s=&-\mu_0 da_s\sin^2\theta\cdot hcf2,\\
B6_s=&\frac{\mu_0 da_s\cos^2\theta}{\Delta t},
\end{aligned}
\tag{27}
$$

(26) 式中

$$
\begin{aligned}
\varphi_s^n=&\mathrm{e}^{(-\nu_e\Delta t)}\varphi_s^{n-1}+E_s^n\chi^0+\left(E_s^{n-1}-E_s^n\right)\xi^0,\\
\varphi_{s4}^n=&J_{41}^n+J_{42}^n+J_{43}^n,\\
\varphi_{s5}^n=&J_{51}^n+J_{52}^n+J_{53}^n,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

其中 J_{41}^n, J_{42}^n, J_{43}^n, J_{51}^n, J_{52}^n, J_{53}^n, 见附录 A.

4 数值验证及分析

4.1 垂直入射情形

非磁化等离子体参数取 $\nu=300$ GHz, $\omega_p=2\pi\times26\times10^9$ rad/s, 入射波为高斯脉冲

$$
E_i(t)=\exp\left(-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right),
\tag{29}
$$

式中, $\tau = 2.5 \times 10^{-12}$ s, $t_0 = 2 \times 10^{-12}$ s, 时间步长为 $\Delta t = 3.125 \times 10^{-13}$ s, $\tau = 80\Delta t$, 空间步长为 $\Delta z = 1.875 \times 10^{-4}$ m, 计算时, 计算空间分为 1000 个计算网格, 等离子体薄层涂敷在金属表面, 薄层厚度取为 0.002, 0.006, 0.01, 0.02 m, 为了防止边界所产生的电磁波反射, 两端采用修正的 Mur 吸收边界, 其余为真空. 模拟的时间步为 32000 步. 计算结果如图 4 和图 5 示, 其中图 4 为垂直极化入射情况下的反射系数与解析解对比图, 图 5 为平行极化波垂直入射情况下的反射系数与解析解对比图. 从两图结果可以看出, 计算结果与解析解相符, 表明本文方法的可行性和准确性.

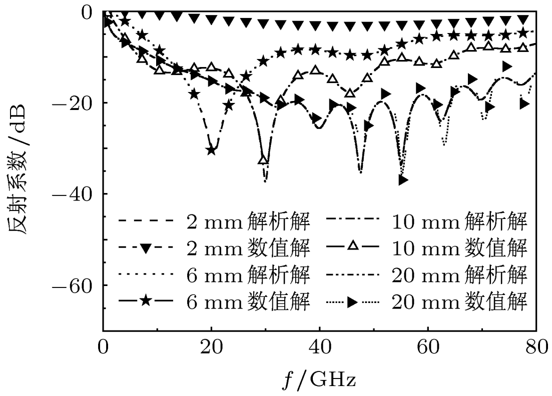

图 4 垂直极化波垂直入射时不同厚度反射系数

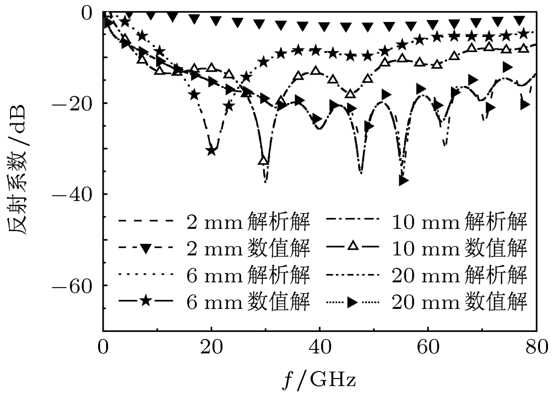

图 5 斜入射情形 平行极化时不同厚度反射系数

4.2 斜入射情形: 平行极化

图 6—9 分别为等离子体厚度为 0.002, 0.006, 0.01, 0.02 m 时平行极化波以不同入射角斜入射到非磁化等离子体薄层的反射系数与解析解对比. 从图中可见在不同斜入射角情况下计算结果和解析解完全相符, 表明本文算法在斜入射情况下的准确性. 计算中的等离子体参数与前面一致.

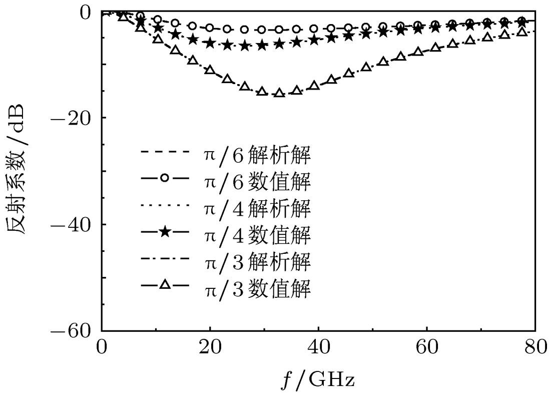

图 6 $d = 0.002$ m 斜入射反射系数与解析解

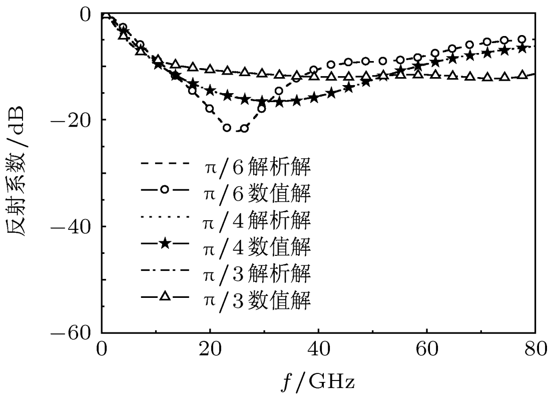

图 7 $d = 0.006$ m 斜入射反射系数与解析解

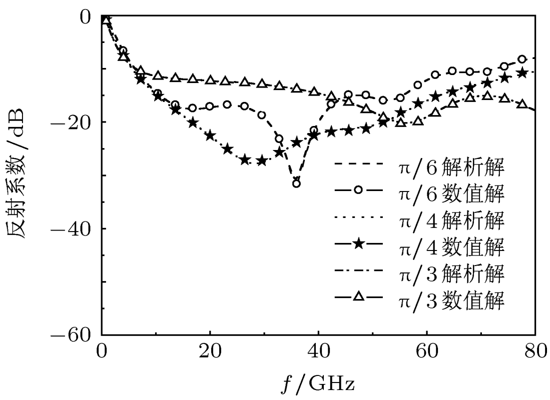

图 8 $d = 0.01$ m 斜入射反射系数与解析解

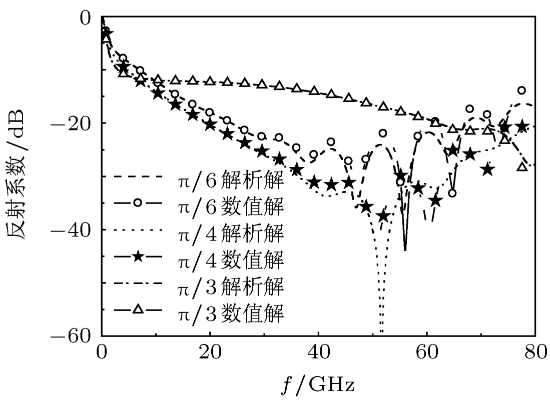

图 9 $d = 0.02$ m 斜入射反射系数与解析解

4.3 斜入射情形: 垂直极化

图 10—13 分别为等离子体厚度为 0.002, 0.006, 0.01, 0.02 m 时垂直极化波以 θ 角斜入射到非磁化等离子体薄层的反射系数与解析解对比, 由图中计算结果可以看出垂直极化斜入射情况下两者相符. 计算中的等离子体参数与前面一致.

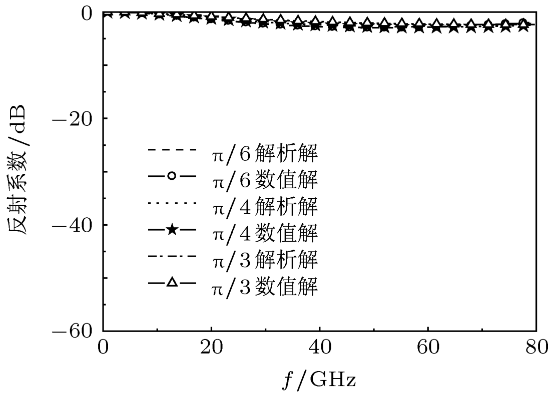

图 10　$d=0.002$ m 斜入射反射系数与解析解

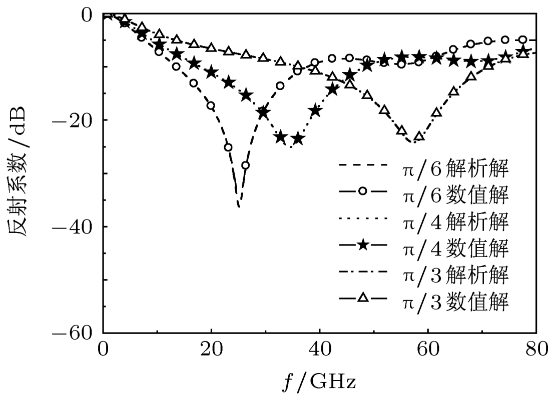

图 11　$d=0.006$ m 斜入射反射系数与解析解

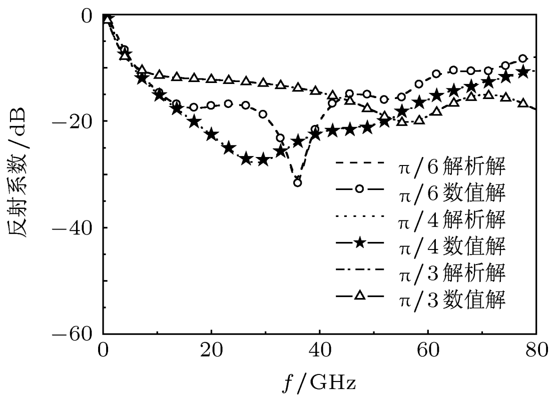

图 12　$d=0.01$ m 斜入射反射系数与解析解

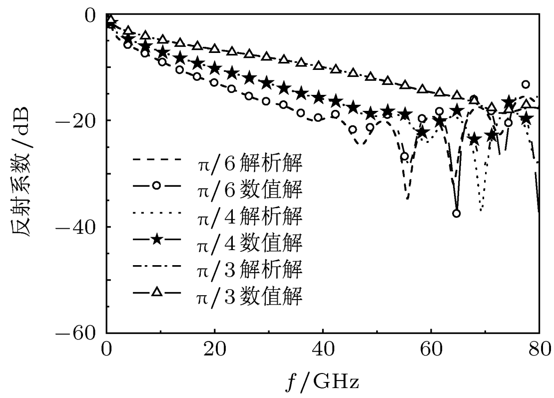

图 13　$d=0.02$ m 斜入射反射系数与解析解

5 结 论

运用表面阻抗边界条件 FDTD 方法处理了理想导体表面涂敷非磁化等离子体薄层的反射, 与解析解相符, 表明本文方法的正确性和有效性. 本文结果为将来解决三维实际等离子体薄涂层目标的电磁散射问题奠定了理论基础.

6 附录 A (23) 式中卷积的处理

对于卷积

$$\varphi_x^n=\int_0^t \mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}E_x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{A1}$$

用分段线性递推卷积 (PLRC) 方法 [9] 得到

$$\begin{aligned}E_x(n\Delta t-\tau)&=E_x^{n-n'}\\&+\frac{E_x^{n-n'-1}-E_x^{n-n'}}{\Delta t}(\tau-n'\Delta t),\end{aligned} \tag{A2}$$

因此,

$$\begin{aligned}\varphi_x^n=\sum_{n'=0}^{n-1}\Big[&E_x^{n-n'}\chi^{n'}\\&+\left(E_x^{n-n'-1}-E_x^{n-n'}\right)\xi^{n'}\Big],\end{aligned} \tag{A3}$$

式中

$$\begin{cases} \chi^{n'} = \int_{n'\Delta t}^{(n'+1)\Delta t} \mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{\nu_e}\left[1-e^{(-\nu_e\Delta t)}\right]\mathrm{e}^{(-\nu_e n'\Delta t)}, \\ \xi^{n'} = \frac{1}{\Delta t}\int_{n'\Delta t}^{(n'+1)\Delta t} \mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}(\tau-n'\Delta t)\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{\nu_e}\left[\dfrac{1}{\nu_e\Delta t}-\left(1+\dfrac{1}{\nu_e\Delta t}\right)\mathrm{e}^{-\nu_e n\Delta t}\right]\mathrm{e}^{-\nu_e n'\Delta t}, \end{cases} \tag{A4}$$

所以,

$$\begin{aligned} \chi^{n'+1} &= \mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}\chi^{n'} \\ \xi^{n'+1} &= e-\nu_e\Delta t\xi^{n'}. \end{aligned} \tag{A5}$$

下一时间步的 φ_x 可写为

$$\begin{aligned} \varphi_x^{n+1} = & \sum_{n'=0}^{n}\Big[E_x^{n+1-n'}\chi^{n'} \\ & + \left(E_x^{n-n'}-E_x^{n+1-n'}\right)\xi^{n'}\Big] \\ = & E_x^{n+1}\chi^0+\left(E_x^n-E_x^{n+1}\right)\xi^{n'} \\ & + \sum_{n'=1}^{n}\Big[E_x^{n+1-n'}\chi^{n'} \\ & + \left(E_x^{n-n'}-E_x^{n+1-n'}\right)\xi^{n'}\Big] \\ = & E_x^{n+1}\chi^0+\left(E_x^n-E_x^{n+1}\right)\xi^{n'}+\mathrm{e}^{-\nu_e\Delta t}\varphi_x^n. \end{aligned} \tag{A6}$$

对 $\varphi_{s4}^n, \varphi_{s5}^n$, 用 $H_y^{n-1/2}$ 代替界面处切向 H_y^n

$$\begin{aligned} \varphi_{s4}^n &= \int_0^t \mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}H_y(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= J_{41}^n+J_{42}^n+J_{43}^n, \end{aligned} \tag{A7}$$

式中

$$\begin{cases} J_{41}^n = \int_0^{\Delta t/2}\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}H_y(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \\ J_{42}^n = \int_{\Delta t/2}^{(n-1/2)\Delta t}\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}H_y(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \\ J_{43}^n = \int_{(n-1/2)\Delta t}^{n\Delta t}\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}H_y(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{cases} \tag{A8}$$

用 PLRC 方法

$$\begin{aligned} & H_y\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta t-\tau\right] \\ = & H_y^{n-1/2-n'}+\frac{H_y^{n-1/2-n'-1}-H_y^{n-1/2-n'}}{\Delta t} \\ & \times\left[\tau-\left(n'-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right], \end{aligned} \tag{A9}$$

将上式代入 $J_{41}^n, J_{42}^n, J_{43}^n$ 得

$$\begin{aligned} J_{41}^n = & \int_0^{\Delta t/2}\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}\Bigg[H_y^{n-1/2}+\frac{H_y^{n-3/2}-H_y^{n-1/2}}{\Delta t} \\ & \left(\tau+\frac{\Delta t}{2}\right)\Bigg]\mathrm{d}\tau = J_{411}^n+J_{412}^n, \\ J_{42}^n = & \int_{\Delta t/2}^{(n-1/2)\Delta t}\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}\Bigg[H_y^{n-1/2-n'} \\ & + \frac{H_y^{n-1/2-n'-1}-H_y^{n-1/2-n'}}{\Delta t} \\ & \times\left[\tau-\left(n'-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right]\Bigg]\mathrm{d}\tau, \\ J_{43}^n = & \int_{(n-1/2)\Delta t}^{n\Delta t}\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}H_y^{n-1/2-n}\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{A10}$$

计算得到

$$\begin{cases} J_{411}^n = -\dfrac{1}{\nu_e}\left(\mathrm{e}^{(-\nu_e\frac{\Delta t}{2})}-1\right) \\ J_{412}^n = \dfrac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t/2}\mathrm{e}^{(-\nu_e\tau)}\left(\tau+\dfrac{\Delta t}{2}\right)\mathrm{d}\tau = -\dfrac{1}{\nu_e\Delta t}\left[\dfrac{\Delta t}{2}\mathrm{e}^{(-\nu_e\frac{\Delta t}{2})}+\dfrac{1}{\nu_e}\left(\mathrm{e}^{(-\nu_e\frac{\Delta t}{2})}-1\right)\right]+\dfrac{1}{2}J_{11}^n \\ J_{42}^n = H_y^{n-3/2}\chi_{h4}^1+\left(H_y^{n-5/2}-H_y^{n-3/2}\right)\xi_{h4}^1+\mathrm{e}^{-\nu_e\Delta t}J_{42}^{n-1} \end{cases} \tag{A11}$$

J_{42}^n 前两个初始值为

$$\begin{aligned} J_{42}^2 = & H_y^{1/2}\chi_{h4}^1+\left(H_{y取0}^{-1/2}-H_y^{1/2}\right)\xi_{h4}^1, \\ & n\geqslant 2_{取}n=2;\ n'=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{42}^3 = & H_y^{3/2}\chi_{h4}^1+\left(H_{y取0}^{1/2}-H_y^{3/2}\right)\xi_{h4}^1 \\ & +H_y^{1/2}\chi_{h4}^2+\left(H_{y取0}^{-1/2}-H_y^{1/2}\right)\xi_{h4}^2 \end{aligned}$$

$$=H_y^{3/2}\chi_{h4}^1+\left(H_y^{1/2}-H_y^{3/2}\right)\xi_{h4}^1+\mathrm{e}^{-\nu_e\Delta t}J_{42}^2,$$

$$\geqslant 2_{取}n=2;\ n'=1. \tag{A12}$$

上式中

$$\chi_h^{n'}=\int_{(n'-1/2)\Delta t}^{(n'+1/2)\Delta t}\mathrm{e}^{(-\nu_{eh4}\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$
$$=-\frac{1}{\nu_{eh4}}\mathrm{e}^{-\nu_{eh4}(n'-1/2)\Delta t}(\mathrm{e}^{-\nu_{eh4}\Delta t}-1)$$
$$\xi_h^{n'}=\int_{(n'-1/2)\Delta t}^{(n'+1/2)\Delta t}\frac{\mathrm{e}^{(-\nu_{eh4}\tau)}}{\Delta t}\left[\tau-\left(n'-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right]\mathrm{d}\tau$$
$$=-\frac{1}{\nu_{eh4}\Delta t}\mathrm{e}^{-\nu_{eh4}(n'-1/2)\Delta t}$$
$$\left[\Delta t\,\mathrm{e}^{-\nu_{eh4}\Delta t}+\frac{1}{\nu_{eh4}}(\mathrm{e}^{-\nu_{eh4}\Delta t}-1)\right] \tag{A13}$$

它们的迭代式为

$$\chi_h^{n'+1}=\mathrm{e}^{-\nu_{eh4}\Delta t}\chi_h^{n'},$$
$$\xi_h^{n'+1}=\mathrm{e}^{-\nu_{eh4}\Delta t}\xi_h^{n'}, \tag{A14}$$

其中 $\nu_{eh4}=-(\mathrm{j}a-b)$. 最后得到 φ_{s4}^n 迭代式为

$$\varphi_{s4}^n=J_{41}^n+J_{42}^{n-1}+J_{43}^{n-1}, \tag{A15}$$

同理得到 φ_{s5}^n 迭代式为

$$\varphi_{s5}^n=J_{51}^n+J_{52}^{n-1}+J_{53}^{n-1}, \tag{A16}$$

并且 $\nu_{eh5}=(\mathrm{j}a+b)$.

[1] Minkwan K, Gulhan A 2011 *Proceedings of 5th International Conference on Recent Advances In Space Technologies* Istanbul, Turkiye, June 9–11, 2011 p412

[2] Gillman E D, Foster J E, Blankson I M 2010 2010 *IEEE International Conference on Plasma Science* Norfolk, Virginia, USA, June 20–24, 2010 (abstracts)

[3] Zivanovic S S, Yee K S, Mei K K 1991 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **39** 471

[4] Kärkkäinen M K 2003 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **51** 1774

[5] Maloney J G, Smith G S 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 38

[6] Kärkkäinen M K 2005 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **53** 1174

[7] Kärkkäinen M K 2004 *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility* **46** 222

[8] Wei B, Dong Y H, Wang F, Li C Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2443 (in Chinese) [魏兵, 董宇航, 王飞, 李存志 2010 物理学报 **59** 2443]

[9] Kelley D F, Luebbers R J 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **44** 792

[10] Luebbers R J, Hunsberger F, Kunz K S 1991 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **39** 29

[11] Ge D B, Yan Y B 2011 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (3rd Edn.) (Xi'an: Xidian University Press) p305 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2011 电磁波时域有限差分方法 (第三版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 305 页]

Finite difference time domain analysis on electromagnetic scattering characteristic of plasma thin layer based on surface impedance boundary condition method*

Yang Li-Xia1) Ma Hui1) Shi Wei-Dong2) Shi Li-Juan3) Yu Ping-Ping1)

1) (*Department of Communication Enginerring, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *China*)

2) (*Research Center of Fluid Machinery Engineering and Technology, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *China*)

3) (*Department of Physics, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *China*)

(Received 14 June 2012; revised manuscript received 11 July 2012)

Abstract

Using the surface impedance boundary condition (SIBC)-finite difference time domain (FDTD) method, the electromagnetic scattering characteristic of non-magnetized plasma coating on metal material is obtained, under the one-dimensional (1D) oblique incident wave condition. The SIBC method can greatly reduce computational memory by ignoring the mesh division of the background material. Firstly, the expression of frequency domain surface impedance is derived, and substituted into boundary condition equation. Then the equation is transformed to time domain via Fourier inverse transformation method, and the formula is quantized to obtain the update equation by piecewise linear recursive convolution (PLRC) method. The algorithm is used to calculate the reflection coefficients of parallel and vertical polarization waves at oblique incident angels. The comparison of the SIBC-FDTD results with analytic solutions shows the validation and effectiveness of proposed method. Finally, the effect of incident angle on reflection coefficient is analyzed by this method.

Keywords: finite-difference time-domain method, surface impedance boundary condition, non-magnetized plasma thin coating

PACS: 41.20.Jb, 42.68.Mj **DOI:** 10.7498/aps.62.034102

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61072002), the Ph.D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 20093227120018), Elitist of Liu-Da Summit Project in Jiangsu Province at 2011 (Grant No. 2011-DZXX-031), and Postdoctoral Science Foundation in Jiangsu (Grant No. 1201001A).

† Corresponding author. E-mail: lixiayang@yeah.net