

弯曲振动薄圆盘的共振频率和等效电路参数研究*

张小丽 林书玉[†] 付志强 王勇

(陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062)

(2012年4月27日收到; 2012年9月6日收到修改稿)

机电等效电路是分析复合换能器常用的一种解析方法, 但对薄圆盘而言, 由于弯曲振动的复杂性, 其等效集中参数很难获得, 该方法很少被应用. 本文从分布参数系统与集中参数系统等效角度, 根据动能相等原则和势能相等原则, 给出了弯曲振动薄圆盘的集中参数: 等效质量和等效弹性系数, 得到了共振频率方程, 并用 ATILA 软件模拟了其振动分布情况, 可以看出解析结果与数值结果趋于一致. 最后给出了分析复合振动系统时薄圆盘集中参数模型的等效电路. 本文的结果对弯曲振动复合换能器的设计提供了理论参考.

关键词: 弯曲振动薄圆盘, 共振频率, 集中参数, 等效电路

PACS: 43.25.Ed, 43.40.+s, 43.20.Rz

DOI: 10.7498/aps.62.034301

1 引言

由弯曲振动圆盘构成的复合换能器具有面积大, 辐射阻抗低, 易于空气介质匹配等特点, 在超声空气探测及大功率气介超声领域中得到了广泛应用^[1-6]. 该类换能器通常用解析法和数值法研究, 机电等效电路法是一种解析的方法, 即以集中参数的形式代表分布参数元件, 广泛被用在分析复合振动系统的振动特性中^[7]. 文献 [8] 从机电类比角度, 根据基尔霍夫定律引入 S -参数, 已把等效集中参数应用于常用的压电装置中. 振动圆盘作为传声组件, 其设计的好坏对振动系统起着至关重要的作用^[9]. 然而, 由于弯曲振动的复杂性, 圆盘的等效集中参数很难获得, 因此, 分析振动系统时机电等效电路很少被应用^[10].

我们知道, 集中参数系统的各变量与空间位置无关, 例如活塞, 其辐射端面的振动位移及速度是均匀的; 而分布参数系统至少有一个变量与空间位置有关, 例如弯曲圆盘, 其辐射端面的振动位移及速度则分布不均匀. 对于稳态分析和动态分析, 前

者为代数方程和常微分方程, 而后者则是空间自变量的常微分方程和空间、时间变量的偏微分方程. 由此可以看出, 对于集中参数系统, 其处理方法有很多简便之处, 因此不少问题常常希望能将分布参数系统等效成集中参数系统来解决^[11].

本文根据分布参数系统的动能和势能与另一具有集中参数系统的相应动能和势能相等的原则, 给出了弯曲振动薄圆盘自由边界条件下的等效集中参数: 等效质量和等效弹性系数, 得到了频率方程, 并用 ATILA 软件模拟了其振动分布情况, 可以看出解析结果与数值结果趋于一致. 最后给出了分析振动系统时薄圆盘集中参数模型的等效电路.

2 弯曲薄圆盘的集中参数等效理论

设弯曲振动薄圆盘的半径和厚度分别为 a 和 h ($h \ll a$). 由于薄圆盘所受的力是对称于对称轴的, 圆盘的弯曲也是对称于对称轴的, 即为轴对称的弯曲振动, 根据线性弹性理论及薄板的小扰度弯曲振动理论^[12], 圆盘弯曲振动的位移可表示为

$$\zeta(r, t) = [AJ_0(kr) + BI_0(kr)] \exp(j\omega t). \quad (1)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11174192) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: sylin@snnu.edu.cn

弯矩和横向剪切力可表示为

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right), \quad (3)$$

式中 J_0 和 I_0 分别是第一类零阶贝塞尔函数和第一类零阶修正贝塞尔函数, $k^4 = \rho h \omega^2 / D$, $D = E h^3 / 12(1 - \sigma^2)$, E , ρ 和 σ 分别为薄圆盘的杨氏模量、密度和泊松比, D 为刚度常数, k 和 ω 分别是波数和振动角频率, A 和 B 是两个常数, 由圆盘的边界条件决定.

本文以自由边界条件为例, 在边界 $r = a$ 处, 弯曲振动薄圆盘的弯矩及横向剪切力皆为零. 根据 (2) 式和 (3) 式, 可得如下表达式:

$$A \left[k J_0(ka) - \frac{1 - \sigma}{a} J_1(ka) \right] = B \left[k I_0(ka) - \frac{1 - \sigma}{a} I_1(ka) \right] \quad (4)$$

$$-A J_1(ka) = B I_1(ka). \quad (5)$$

由 (4) 和 (5) 式, 可以得出边界自由圆盘弯曲振动的共振频率方程为

$$ka [J_0(ka) I_1(ka) + I_0(ka) J_1(ka)] = 2(1 - \sigma) J_1(ka) I_1(ka). \quad (6)$$

根据 (6) 式, 当圆盘的材料参数和几何尺寸给定时, 便可得出其共振频率 f_n , 对应圆盘的 n 阶振动, 其位移的本征函数为

$$\zeta_n(r, t) = [A_n J_0(k_n r) + B_n I_0(k_n r)] \exp(j \omega_n t), \quad (7)$$

其振动速度为

$$v_n(r, t) = j \omega_n [A_n J_0(k_n r) + B_n I_0(k_n r)] \exp(j \omega_n t). \quad (8)$$

2.1 等效质量的计算

设在薄圆盘上取一径向坐标为 $(r, r + dr)$ 的体元, 体元的质量为 $2\pi \rho h r dr$, 其第 n 阶振动的动能可

表示为

$$dE_{kn} = \frac{1}{2} (2\pi \rho h r dr) v_n^2$$

由 (8) 式可得弯曲振动圆盘第 n 阶弯曲振动的动能,

$$E_{kn} = \int_0^a dE_{kn} = -\pi \rho h \omega_n^2 \exp(j2\omega_n t) \int_0^a \times [A_n J_0(k_n r) + B_n I_0(k_n r)]^2 r dr. \quad (9)$$

利用 (8) 式, 可以得出弯曲振动薄圆盘中心处的振动速度为

$$v_n = j \omega_n (A_n + B_n) \exp(j \omega_n t).$$

当把薄圆盘的中心作为参考点时, 其第 n 阶弯曲振动的动能也可由下式表示:

$$E'_{kn} = \frac{1}{2} M_n v_n^2 = -\frac{1}{2} M_n (A_n + B_n)^2 \omega_n^2 \exp(j2\omega_n t), \quad (10)$$

式中 M_n 是弯曲振动圆盘第 n 阶弯曲振动的等效质量. 令 $E'_{kn} = E_{kn}$, 可以得出振动圆盘第 n 阶弯曲振动等效质量的表达式为

$$M_n = \frac{2m}{a^2 (A_n + B_n)^2} \int_0^a [A_n J_0(k_n r) + B_n I_0(k_n r)]^2 r dr. \quad (11)$$

式中 $m = \pi a^2 h \rho$.

由贝塞尔函数的递推公式及两类含两个变态贝塞尔函数积的积分^[13], 可得:

$$\int_0^x I_0^2(x) x dx = \frac{x^2}{2} [I_0^2(x) - I_1^2(x)], \quad (12)$$

$$\int_0^x J_0^2(x) x dx = \frac{x^2}{2} [J_0^2(x) + J_1^2(x)], \quad (13)$$

$$\int_0^x I_0(x) J_0(x) x dx = \frac{x}{2} [I_0(x) J_1(x) + I_1(x) J_0(x)]. \quad (14)$$

根据自由边界条件, 把 $B_n/A_n = -J_1(k_n a)/I_1(k_n a)$ 代入 (11) 式, 可得边界自由弯曲振动薄圆盘的等效质量为

$$M_n = m \frac{\left[J_0^2(k_n a) + \frac{J_1^2(k_n a) I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - \frac{4 J_1^2(k_n a) (1 - \sigma)}{(k_n a)^2} \right] I_1^2(k_n a)}{[I_1(k_n a) - J_1(k_n a)]^2}. \quad (15)$$

图 1 为振动圆盘第 n 阶弯曲振动的等效质量和频率的关系曲线, 很明显, 等效质量与材料参数、几何尺寸及频率都有关系, 且随着频率的变大, 等效质量逐渐减小.

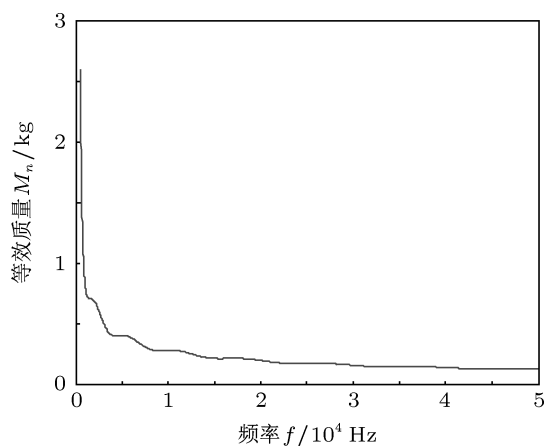


图 1 频率和等效质量关系曲线

2.2 等效弹性系数的计算

根据薄板理论, 在小扰度弯曲振动假设下, 忽略剪切应力, 薄板弯曲的势能密度^[14]可表示为扰度 ζ 的函数:

$$U = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

根据 (13) 式, 经过坐标变换, 在柱坐标下, 体元质量为 $2\pi\rho h r dr$ 的第 n 阶振动势能可表示为

$$dE_{pn} = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial r} \right)^2 + \frac{2\sigma}{r} \frac{\partial \zeta_n}{\partial r} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial r^2} \right] 2\pi r dr, \quad (17)$$

由 (14) 式, 可得第 n 阶弯曲振动薄圆盘的势能为

$$E_{pn} = \frac{E\pi h^3}{12(1-\sigma^2)} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \zeta_n}{\partial r} \right)^2 + \frac{2\sigma}{r} \frac{\partial \zeta_n}{\partial r} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial r^2} \right] r dr. \quad (18)$$

第一类贝塞尔函数和第一类修正贝塞尔函数存在如下关系式:

$$\int_0^x (-I_0(x)J_1(x) - I_1(x)J_0(x) + 2I_1(x)J_1(x)/x) dx = -I_1(x)J_1(x), \quad (19)$$

$$\int_0^x (I_1^2(x)/x) dx = -\frac{1}{2} [1 - I_0^2(x) + I_1^2(x)], \quad (20)$$

$$\int_0^x (J_1^2(x)/x) dx = \frac{1}{2} [1 - J_0^2(x) - J_1^2(x)], \quad (21)$$

$$\int_0^x I_0(x)I_1(x) dx = \frac{1}{2} I_0^2(x), \quad (22)$$

$$\int_0^x J_0(x)J_1(x) dx = -\frac{1}{2} J_0^2(x). \quad (23)$$

将 (7) 式带入 (18) 式, 根据自由边界条件 (4) 和 (5) 式, 由贝塞尔函数关系 (12)—(14) 式及 (19)—(23) 式, 可得振动圆盘势能解析表达式为

$$E_{pn} = \frac{E\pi h^3 k_n^2 A_n^2}{12(1-\sigma^2)} \left\{ (k_n a)^2 J_0^2(k_n a) - 2(1-\sigma)(k_n a)J_0(k_n a)J_1(k_n a) - 2(1-\sigma)\sigma J_1^2(k_n a) - (1-\sigma) [J_1^2(k_n a)/I_1^2(k_n a) - 1] \right\}. \quad (24)$$

当把薄圆盘的中心作为参考点时, 其第 n 阶弯曲振动势能也可由下式表示

$$E'_{pn} = \frac{1}{2} K_n \xi_n^2(r=0) = \frac{1}{2} K_n (A_n + B_n)^2 \exp(j2w_n t), \quad (25)$$

式中 K_n 是弯曲振动圆盘第 n 阶弯曲振动的等效弹性系数. 令 $E'_{pn} = E_{pn}$, 根据自由边界条件, $B_n/A_n = -J_1(k_n a)/I_1(k_n a)$, 可以得出等效弹性系数的表达式为

$$K_n = \frac{E\pi h^3 k_n^2}{6(1-\sigma^2)} \left\{ (k_n a)^2 J_0^2(k_n a) - 2(1-\sigma)(k_n a)J_0(k_n a)J_1(k_n a) - 2(1-\sigma) \cdot \sigma J_1^2(k_n a) - (1-\sigma) \times [J_1^2(k_n a)/I_1^2(k_n a) - 1] \right\} \times I_1^2(k_n a) / [I_1(k_n a) - J_1(k_n a)]^2. \quad (26)$$

图 2 为振动圆盘第 n 阶弯曲振动的等效弹性系数和频率的关系曲线, 很明显, 等效弹性系数也

与材料参数、几何尺寸及频率都有关系,且随着频率的变大,等效弹性系数逐渐增大.

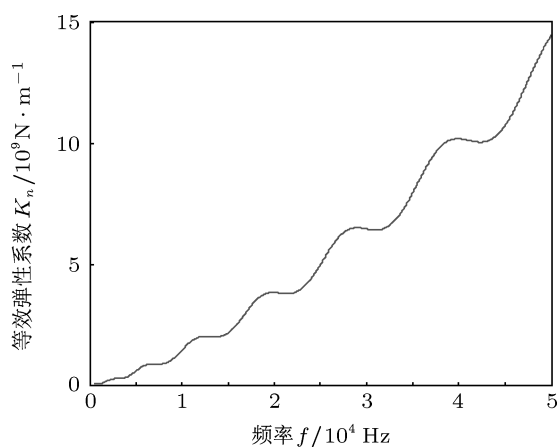


图2 频率和等效弹性系数关系曲线

3 理论计算及数值模拟

以上分析可以看出,等效质量 M_n 和等效弹性系数 K_n 都是角频率 ω 的函数,根据传统的换能器设计理论,第 n 阶弯曲振动圆盘的振动抗为

$$X_n = j \left(\omega M_n - \frac{1}{\omega C_n} \right) = j \left(\omega M_n - \frac{K_n}{\omega} \right), \quad (27)$$

式中, C_n 为弹性柔顺系数, $C_n = 1/K_n$. 当 $\omega = \omega_n$ 时,令 $X_n = 0$ 即可求出共振频率, X_n 为等效参数抗.

取薄圆盘材料为 45# 钢,其密度为 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$,泊松比 $\sigma = 0.28$,杨氏模量 $E = 2.09 \text{ e}+11 \text{ N/m}^2$,半径和厚度如表 1 所示,根据共振频率方程 (27) 式并利用有限元软件 ATILA,给出了边界自由薄圆盘弯曲振动的前三阶频率,其中 f_m 表示理论计算得到的各阶振型频率, f_n 表示有限元模拟得到的频率.

以弯曲振动薄圆盘半径 $a = 120 \text{ mm}$,厚度 $h = 8 \text{ mm}$ 为例,用有限元软件 ATILA 模拟了其二分之一模型振动情况,如图 3 所示,step5, step11, step20 分别是提取的一阶、二阶和三阶弯曲振动模态,其频率分别为 1225, 5137 和 11409 Hz. 从图 3 及表 1,尤其相对误差 $\Delta f = |f_m - f_n|/f_n$,能够看出解析结果和数值模拟结果趋于一致.

4 弯曲振动薄圆盘集中参数等效电路

根据上述分析,可以得出弯曲振动薄圆盘的集

中参数等效电路,如图 4 所示, M_n , C_n 和 R_n 分别是第 n 阶弯曲振动圆盘的集中参数等效质量、弹性柔顺系数和等效机械损耗. 由于系统机械损耗的研究比较复杂,一般情况下,忽略圆盘弯曲振动的机械损耗,即 $R_n = 0$. 实际上,振动系统的机械损耗并不为零,而且与系统的振动幅度有关,设计时,机械损耗通常是通过实验测得的.

表 1 弯曲薄圆盘共振频率计算结果

a/mm	h/mm	阶数 n	f_m/Hz	f_n/Hz	$\Delta f/\%$
120	8	1	1210	1225	1.22
		2	5010	5137	2.47
		3	11780	11409	3.25
150	8	1	780	786	0.76
		2	3250	3321	2.14
		3	7540	7446	1.26
150	10	1	970	980	1.02
		2	4000	4110	2.68
		3	9420	9128	3.2

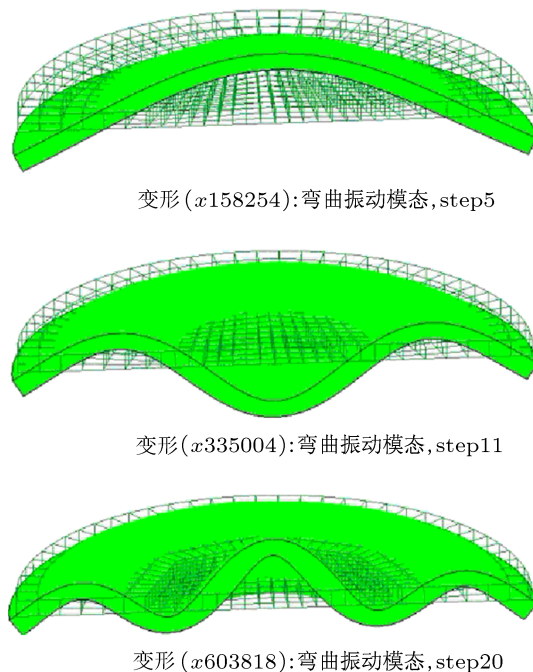


图 3 薄圆盘前三阶振型

图 4 中, Z_a 是弯曲振动薄圆盘的辐射阻抗,可表示为 $Z_a = R_a + jX_a$,其中 R_a 是薄圆盘弯曲振动的

辐射阻,它决定了薄圆盘声辐射能力的大小和辐射功率的多少. X_a 是辐射抗,反映了负载对弯曲振动圆盘的反作用情况.在弯曲振动复合换能器的机电等效电路中通常忽略其辐射阻抗,也可以从辐射声功率角度求得^[10].

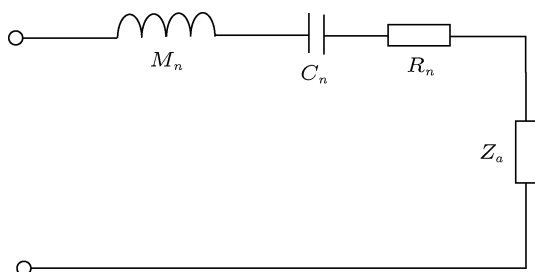


图4 弯曲振动薄圆盘的等效电路

求解弯曲振动复合换能器共振频率时,由图4

可以看出,利用机电等效电路法,薄圆盘的集中参数等效电路将大大简化了求解过程,并且可以方便地实现该系统的最佳工作状态,即该系统总抗为零,可求得系统共振频率.

5 结论

本文从薄圆盘弯曲复合振动系统优化设计出发,提出了分布参数系统集中参数化,即根据动能和势能的等效原则,给出了边界自由薄圆盘的集中参数等效质量和等效弹性系数,同时得到了固有频率,并用 ATILA 软件模拟了其振动分布情况,可以看出解析结果与数值结果趋于一致.最后给出了分析振动系统时薄圆盘集中参数等效电路,用于系统机电等效电路中能够大大简化其求解过程,方便地实现最佳工作状态.本文的结果,对弯曲振动复合换能器的设计提供了理论参考.

- [1] Gallego-Juarez J A, Rodriguez-Corral G, Sarabia E R, Vazquez-Martinez F, Campos-Pozuelo C, Acosta-Aparicio V M 2002 *Ultrasonics* **40** 889
- [2] Yuan Y L, Ma Y P, Wang D S 2004 *Mechanical Engineer* **10** 46 (in Chinese) [袁艳玲, 马玉平, 王得胜 2004 机械工程师 **10** 46]
- [3] Lin S Y 2006 *Ultrasonics* **44** 545
- [4] Watanabe Y, Mori E 1996 *Ultrasonics* **34** 235
- [5] Pan X J, He X P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7911 (in Chinese) [潘晓娟, 贺西平 2010 物理学报 **59** 7911]
- [6] He X P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3290 (in Chinese) [贺西平 2010 物理学报 **59** 3290]
- [7] Mason W P 1964 *Physical Acoustics Principles and Methods* (Vol. 1) (New York: Academic Press) p72
- [8] Paganelli R P, Romani A, Golfarelli A, Magi M, Sangiorgi E, Tartagni M 2010 *Sens. Actuators A* **160** 9
- [9] Lin S Y 2004 *Principle and Design of Ultrasonic Transducer* (Beijing: Science Press) p162 (in Chinese) [林书玉 2004 超声换能器的原理及设计 (北京: 科学出版社) 第 162 页]
- [10] Lin S Y 2012 *IEEE Trans Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **59** 139
- [11] Wang Q S 2001 *Journal of Anqing Teachers College* (Natural Science Edition) **7** 1 (in Chinese) [王其申 2001 安庆师范学院学报 (自然科学版) **7** 1]
- [12] Xu Z L 1982 *Elastic Mechanics* (Vol. 2) (Beijing: People's Education Press) p263 (in Chinese) [徐芝纶 1982 弹性力学 (下册) (北京: 人民教育出版社) 第 263 页]
- [13] Wei Y Y, Wang W X, Li H F 1999 *Journal of University of Electronic Science and Technology* **28** 66 (in Chinese) [魏彦玉, 王文祥, 李宏福 1999 电子科技大学学报 **28** 66]
- [14] Xiong Z H, Liu Z Y 1988 *Variational Principles in Elasticity* (Changsha: Hunan University Press) p319 (in Chinese) [熊祝华, 刘子延 1988 弹性力学变分原理 (长沙: 湖南大学出版社) 第 319 页]

Study on resonance frequency and equivalent circuit parameters of a thin disk in flexural vibration*

Zhang Xiao-Li Lin Shu-Yu[†] Fu Zhi-Qiang Wang Yong

(*Institute of Applied Acoustics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

(Received 27 April 2012; revised manuscript received 6 September 2012)

Abstract

The electro-mechanical equivalent circuit is the most common method of analyzing and designing composite transducers. However, for the thin disk, because of the complexity of flexural vibration, equivalent lumped parameters are difficult to obtain, and so this method is rarely used. From the point of equivalent view of the distributed parameter system and lumped parameter system, according to the kinetic energy equal principle and the potential energy equal principle in this paper, we give the lumped parameter equivalent mass and equivalent elasticity coefficient of the flexural vibration, and the resonance frequency equations as well. The results from the analytical method are in good agreement with those from the finite element method. Finally, the equivalent circuit of lumped parameter model of the thin disk in analyzing the composite vibration system is given. These results can serve as a reference for designing flexural vibration composite transducers.

Keywords: flexural vibration thin disk, resonance frequency, lumped parameters, equivalent circuit

PACS: 43.25.Ed, 43.40.+s, 43.20.Rz

DOI: 10.7498/aps.62.034301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174192).

[†] Corresponding author. E-mail: sylin@snnu.edu.cn