

辛 Runge-Kutta 方法在求解 Lagrange-Maxwell 方程中的应用研究*

刘世兴¹⁾ 宋端²⁾ 贾林¹⁾ 刘畅¹⁾ 郭永新^{1)2)†}

1) (辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

2) (辽东学院影像物理教研室, 丹东 118001)

(2012年3月7日收到; 2012年9月5日收到修改稿)

给出了采用辛 Runge-Kutta (R-K) 方法求解 Lagrange-Maxwell 方程的数值积分方法, 并数值研究了 RLC 电路弹簧耦联系统中极板的运动及电流的变化情况, 其计算结果和传统的 R-K 方法相一致, 说明利用辛积分算法研究机电动力系统是合理和有效的, 并在此基础上采用辛 R-K 方法研究了 Noether 意义下的形式不变性.

关键词: 完整机电系统, 辛 R-K 方法, Lagrange-Maxwell 方程, Noether 守恒量

PACS: 45.20.Jj, 11.30. -j

DOI: 10.7498/aps.62.034501

1 引言

现代科技的发展, 使得机械与电子的融合越来越紧密, 光机电一体化趋势越来越明显, 如各种电机、机电换能器、磁流体动力变换装置、磁悬浮列车、机电驱动与传动系统、机器人系统等都是典型的机电能量转换系统^[1,2]. 设计和研制性能优良的机电一体化系统, 掌握和深入研究机电耦联系统的动态行为等问题, 必须要以分析动力学为基础, 辅以好的数值分析手段. 这将对科学技术及国民经济的发展起到良好的促进作用. 用分析动力学方法研究机电耦联系统的基本方程就是 Lagrange-Maxwell (L-M) 方程^[1-8], 所以对方程的研究和计算是一个至关重要的问题, 本文就是要应用现在比较优越的辛积分算法来研究 L-M 方程的数值解法.

辛积分算法开始于 1980 年代初, 是由我国著名学者冯康先生首先提出来, 迅速应用于大气物理、天文观测、原子与分子物理、材料科学等各个学科和领域, 并取得了许多重要成果. 哈密顿体

系的辛几何算法具有保持系统拓扑结构和精度高等特点, 在研究长时间的演化解时具有优越性^[9-11]. 为了研究系统长时间的演化, 要求相应数值算法具有保持体系守恒量的性质. 本文利用辛 Runge-Kutta 算法来研究完整机电耦联系统分析动力学方程——L-M 方程, 并计算其在 Noether 对称性意义下的守恒量.

2 完整机电系统的 L-M 方程及其 Hamilton 化

我们把力学过程和电学过程相互关联的系统, 称为机电动力系统. 用力学模型来描述 N 个粒子的机械运动部分, 如果系统受到 d 个理想的双面完整约束, 则系统的空间位置由 $n = 3N - d$ 个广义坐标确定; 用电学模型来描述电路和磁路构成的电动部分, 假设系统有 m 个回路, 取 m 个广义电量来确定系统的电磁运动. 为研究问题方便, 假设机电系统的每一个回路由线性导体和电容构成, 回路之间没有关系, 回路的电磁过程是相互依赖的. 对于第 k 个回路, 我们用 i_k 表示电流, V_k 表示电动势, e_k 表示

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172120, 10932002, 10872084)、辽宁省高校科研基金 (批准号: 2008S098)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (批准号: 2008RC20) 和辽宁省重点实验室建设项目 (批准号: 2008403009) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

电容中的电量 ($\dot{e}_k = i_k$), R_k 表示电阻, C_k 表示电容, 那么机电系统的 Lagrange 函数为^[1-7]

$$L = T(q_j, \dot{q}_j) - V(q_j) + W_m(q_j, i_k) - W_e(q_j, e_k), \quad (1)$$

耗散函数为

$$F = F_m(q_j, \dot{q}_j) + F_e(i_k), \quad (2)$$

这里 $q_j, \dot{q}_j (j = 1, \dots, n)$ 为系统的广义坐标和对应的广义速度; 在稳定约束条件下, 机械系统的动能 $T(q_j, \dot{q}_j)$ 是广义速度的齐二次型

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3)$$

机械系统的势能 V 是广义坐标的函数 $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$. 系统的电场能 W_e 和磁场能 W_m 分别为

$$\begin{aligned} W_e &= \sum_{k=1}^m \int_0^{e_k} U_k^e de_k \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^{e_k} \frac{e_k}{C_k} de_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{e_k^2}{C_k}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^m L_{kr} i_k i_r. \quad (5)$$

机械系统中黏滞阻尼力的耗散函数 F_m 和电磁系统中的电耗散函数 F_e 分别为

$$F_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (6)$$

$$F_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m R_k i_k^2, \quad (7)$$

则可以得到机电耦合系统的 L-M 方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_k} + \frac{\partial F_e}{\partial \dot{e}_k} &= U_k, \quad (k = 1, \dots, m) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F_m}{\partial \dot{q}_j} &= Q_j, \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

这样形成了 $n+m$ 个独立的二阶微分方程组. 其初始和边界条件为

$$\begin{aligned} e_k|_{t=0} &= e_k^0, \quad i_k|_{t=0} = i_k^0, \\ q_j|_{t=0} &= q_j^0, \quad \dot{q}_j|_{t=0} = \dot{q}_j^0. \end{aligned} \quad (9)$$

我们称 $\partial F / \partial \dot{q}_j$ 和 $\partial F / \partial \dot{e}_k$ 为耗散力, U_k 为外加电动势, Q_j 为非势广义力.

将空间坐标和广义电量用统一的广义坐标 $q_s (s = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m)$ 来表示, 其中 $q_s (s =$

$1, \dots, n)$ 表示空间坐标分量, $q_s (s = n+1, \dots, n+m)$ 表示电学分量, 机电动力系统的 L-M 方程 (8) 可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} &= Q_s \\ (s = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $Q_s (s = 1, \dots, n)$ 为非势广义力, $Q_s (s = n+1, \dots, n+m)$ 为广义电动势.

假定机电动力系统的广义动量为

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \\ (s = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m), \end{aligned} \quad (11)$$

引入该系统的 Hamilton 函数为

$$H(t, q, \dot{q}) = \sum_{s=1}^{n+m} p_s \dot{q}_s - L = H(t, q, p). \quad (12)$$

从方程 (10) 可以得到 L-M 机电动力系统的 Hamilton 正则方程为

$$\begin{aligned} \dot{q}_s &= \frac{\partial H}{\partial p_s} \Big|_{\dot{q}_s=(t,q,p)}, \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \Big|_{\dot{q}_s=(t,q,p)}, \end{aligned} \quad (13)$$

方程 (13) 中的 $q = \{q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m}\}$, $p = \{p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m}\}$ 分别表示机电动力系统的广义坐标和广义动量.

3 L-M 方程的辛积分算法

隐式 R-K 积分格式是辛积分格式^[9,11]:

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + h \sum_{i=1}^l b_i \dot{q}^{(i)}, \quad (14)$$

$$q^{(i)} = q^{(n)} + h \sum_{j=1}^l a_{ij} \dot{q}^{(j)}, \quad (i = 1, \dots, l), \quad (15)$$

其中 $q(t)$ 为积分变量, \dot{q} 为其对时间导数, 上标表示变量在相应节点上的值, h 表步长, l 为高斯节点数目, b_i 和 a_{ij} 为积分系数. 将 (15) 式写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} q^{(1)} \\ \vdots \\ q^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^{(n)} \\ \vdots \\ q^{(n)} \end{bmatrix} + hA \begin{bmatrix} \dot{q}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{q}^{(l)} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中 $A = [a_{ij}]$ 可逆. 令 $D = [d_{ij}] = A^{-1}$, 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{q}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{q}^{(l)} \end{bmatrix} = h^{-1}D \left[\begin{bmatrix} \dot{q}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{q}^{(l)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q^{(n)} \\ \vdots \\ q^{(n)} \end{bmatrix} \right], \quad (17)$$

即

$$\dot{q}^{(i)} = h^{-1} \sum_{j=1}^l d_{ij}(q^{(j)} - q^{(n)})$$

$$(i = 1, \dots, l), \quad (18)$$

以 (14) 和 (18) 式为基本的积分格式, 可以对微分方程组 (13) 进行积分. 积分变量为广义坐标 q 和广义动量 p . 根据 (18) 式, \dot{q} 是广义坐标的线性函数, 即 (18) 式, \dot{p} 是广义动量的线性函数

$$\dot{p}^{(i)} = h^{-1} \sum_{j=1}^l d_{ij}(p^{(j)} - p^{(n)})$$

$$(i = 1, \dots, l), \quad (19)$$

这样, 由关系式 (11), (18) 和 (19) 式, l 个高斯积分点上的广义坐标、广义动量和广义动量的时间导数都可以由相应广义坐标确定. 过程如下: 已知 $q^{(1)} \dots q^{(l)}$, 先由 (18) 式计算广义速度 $\dot{q}^{(1)} \dots \dot{q}^{(l)}$, 再由 (11) 式计算广义动量 $p^{(1)} \dots p^{(l)}$, 最后由 (19) 式计算 $\dot{p}^{(1)} \dots \dot{p}^{(l)}$.

系统方程 (13) 式在 l 个高斯节点上成立. 联立得到一个以广义坐标 $q^{(1)} \dots q^{(l)}$ 为未知量的非线性方程组

$$\phi = \phi(z) = \begin{bmatrix} \left[\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} - Q - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right]^{(1)} \\ \vdots \\ \left[\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} - Q - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right]^{(l)} \end{bmatrix} = 0, \quad (20)$$

其中 $z = \left[(q^{(1)})^T, \dots, (q^{(l)})^T \right]^T$ 为未知量矩阵, 上标表示相应节点上的计算值, 采用标准 Newton 迭代方法可以对方程 (20) 进行数值求解. 最后利用积分格式 (14) 计算积分节点 $(n+1)$ 上 $(q^{(n+1)}, p^{(n+1)})$ 的值.

表 1 计算过程中所采用的参数值 (采用国际单位制)

s	A	m	R	ω	L	K	h
0.1 m	0.01 m ²	0.015 kg	0.05 Ω	85.4 rad/s	0.0016 F	369.73 N/m	0.001

图 2 表示在无外加激励电压、无阻尼, 初始值 $x(0) = 0.04, e(0) = 0.5$ 时算得的电容器极板的振动曲线, 电容器极板做简谐振动. 图 3 表示在无外加激励电压, 有电阻阻尼和上述初始条件下算得的电路中电荷的变化曲线, 电路中的电荷呈指数衰减.

4 数值实验

图 1 为 RLC 电路, 其中电容 C 由上、下电极板组成. 质量为 m 的电极板被悬挂在一个刚度系数为 k 弹簧上. 电极板在重力、弹性力和电场力的作用下沿着垂直方向振动. A 是电极板面积, s 是极板距离, R 是电阻, L_1 是电感, 电场力 $E = E_0 \sin(\omega t)$. 下面通过辛 R-K 算法研究电容器极板运动的动量依赖对称性, 并和标准的 R-K 方法的计算结果进行比较, 来充分说明辛积分算法在处理机电耦合系统动力学问题中的可行性和优越性.

图 1 所示电容器有两个自由度. 我们选择电容器的活动极板的平衡位置 O 为坐标原点, 空间坐标 x 和电量 e 作为广义坐标. $T = mx^2/2$ 是系统的动能, $W_m = L_1 \dot{e}^2/2$ 是系统的电能, $V = kx^2/2$ 是弹性势能, $W_c = (s-x)e^2/2A$ 是电容器储存的能量.

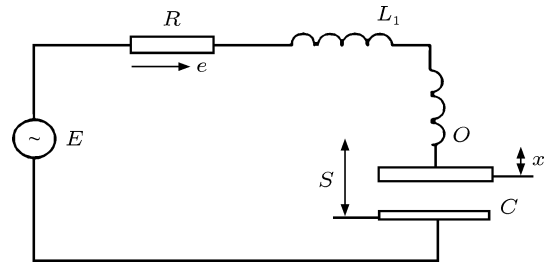


图 1 RLC 电路

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L_1 \dot{e}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} \frac{s-x}{A} e^2, \quad (21)$$

耗散函数为

$$F = F_c = \frac{1}{2} R \dot{e}^2. \quad (22)$$

下面, 分别采用辛积分格式 (14), (15) 和 4 步 4 阶 R-K 方法来研究上述 RLC 电路, 计算过程中取如表 1 所示的参数值 [12].

从图 2 和图 3 可以看出, 利用格式 (14), (15) 对 RLC 电路弹簧耦合系统进行数值计算所得结果和采用 4 步 4 阶 R-K 方法所得结果相一致, 说明利用辛积分算法研究机电动力系统是合理和有效的.

在 Noether 对称性的意义下, 上述 RLC 电路系

统存在着如下的守恒量 [6]:

$$I_1 = \frac{1}{2A}L_1e^2 - \frac{s-x}{A}e^2 + Re = \text{const}, \quad (23)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2A}e^2 = \text{const}. \quad (24)$$

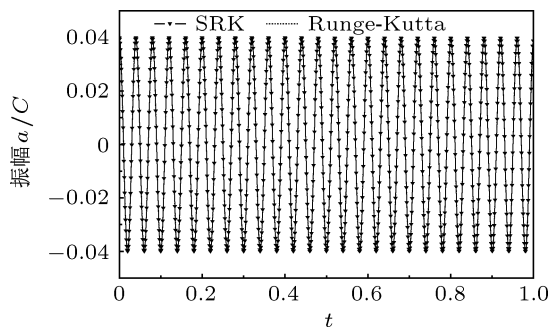


图2 无外加激励电压时电容器基本的振动

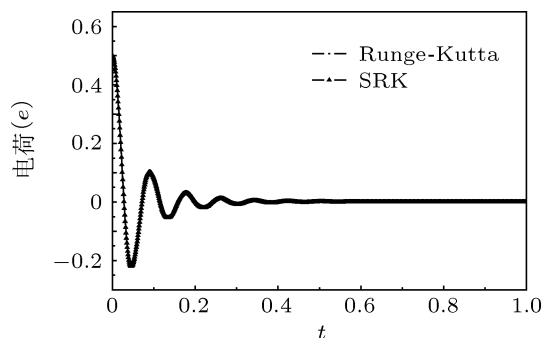


图3 无外加激励电压时电路中电荷的变化

图4给出了采用辛R-K算法算得的守恒量 I_1 , I_2 随时间的演化曲线, 当计算到1000个时间单位时, 该守恒量仍然保持得很好.

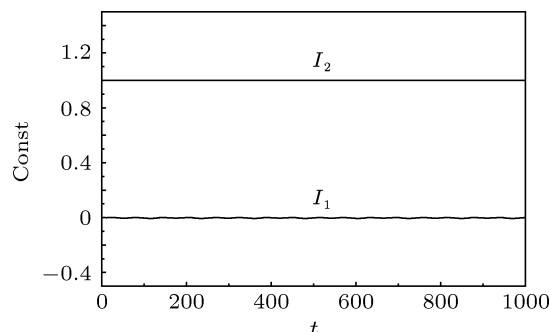


图4 Noether意义下RLC电路系统的守恒量

5 结论

通过上述算例可以看出, 在分析力学框架下研究机电耦合系统为采用辛积分算法提供了很好的便利条件, 通过和传统的4步4阶R-K法算得的结构相比较, 说明了利用辛积分算法得到的数值结果是合理和可靠的, 计算的Noether守恒量能够保持得很好也充分说明了采用辛积分算法处理机电耦合系统问题的可靠性.

- [1] Wen X S, Qiu J, Tao J Y 2003 *Analytical Mechanics of Mechano-electrical Dynamical Systems and its Application* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [温熙森, 邱静, 陶俊勇 2003 机电系统分析动力学及其应用 (北京: 科学出版社)]
- [2] Qiu J 1992 *Analytical Mechanics of Mechano-electrical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [邱家俊 1992 机电分析动力学 (北京: 科学出版社)]
- [3] Zheng S W, Fu J L, Li X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5551 (in Chinese) [郑世旺, 傅景礼, 李显辉 2005 物理学报 **54** 5511]
- [4] Fu J L, Chen B Y, Tang Y F, Fu H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3942
- [5] Liu X W, Li Y C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 111102 (in Chinese) [刘晓巍, 李元成 2011 物理学报 **60** 111102]
- [6] Jing-Li Fu, Li-Jun 2004 *Chen. Phys. Lett. A* **331** 138
- [7] Fu J L, Chen L Q, Jiménez S, Tang Y F 2006 *Phys. Lett. A* **358** 2
- [8] Xia L L, Li Y C, Wang X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6732 (in Chinese) [夏丽莉, 李元成, 王小明 2009 物理学报 **58** 6732]
- [9] Feng K, Qin M Z 2003 *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems* (Zhejiang: Zhejiang Science & Technology Press) (in Chinese) [冯康, 秦孟兆 2003 哈密顿系统的辛几何算法 (浙江: 浙江科学技术出版社)]
- [10] Liu X S, Ding P Z 2004 *Adv. Phys.* **26** 48 (in Chinese) [刘学深, 丁培柱 2004 物理学进展 **26** 48]
- [11] Lu Y J, Ren G X 2006 *Appl. Math. Mech.* **27** 47 (in Chinese) [路英杰, 任革学 2006 应用数学与力学 **27** 47]
- [12] Cui Y H, Yang Z A 2006 *Journal Vibration and Shock* **25** 76 (in Chinese) [崔一辉, 杨志安 2006 振动与冲击 **25** 76]

Application research of symplectic Runge-Kutta method of solving Lagrange-Maxwell equation*

Liu Shi-Xing¹⁾ Song Duan²⁾ Jia Lin¹⁾ Liu Chang¹⁾ Guo Yong-Xin^{1)2)†}

1) (College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

2) (Physics of Medical Imaging Department, Eastern Liaoning University, Dandong 118001, China)

(Received 7 March 2012; revised manuscript received 5 September 2012)

Abstract

In this paper, we show the numerical integration method of solving Lagrange-Maxwell equation by using the symplectic Runge-Kutta (R-K) method, and numerically study the motion of the plate in an RLC circuit spring coupled system and the current changes. Its result is consistent with that obtained by the traditional R-K method, which demonstrates symplectic integration algorithm is reasonable and effective in studying the electro-mechanical systems. And on this basis, the form invariance of Noether sense is studied by using the symplectic Runge-Kutta method.

Keywords: holonomic electro-mechanical system, symplectic Runge-Kutta method, Lagrange-Maxwell equation, Noether conserved quantity

PACS: 45.20.Jj, 11.30. -j

DOI: 10.7498/aps.62.034501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11172120, 10932002, 10872084), the Research Program of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008S098), the Program of Supporting Elitists of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008RC20), and the Program of Constructing Liaoning Provincial Key Laboratory, China (Grant No. 2008403009)

† Corresponding author. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn