

# 机械弹性储能机组储能过程非线性动力学模型与混沌特性\*

余洋<sup>†</sup> 米增强

(华北电力大学新能源电力系统国家重点实验室, 保定 071003)

(2012年5月23日收到; 2012年8月30日收到修改稿)

提出了一种新的基于机械弹性的储能方法, 推导了永磁电机式机械弹性储能机组的非线性动力学模型, 论证了机组储能过程中某些参数及运行条件下会出现混沌运动, 分析了机组非线性动力学模型的线性稳定性. 在此基础上, 基于本实验室正在研发的 0.16 kWh/0.8 kW 机械弹性储能机组运行参数, 将机组 3 维非线性模型降阶为带时变参数的 2 维投影子系统, 采用坐标平面投影法研究了机组的混沌特性, 分析了降维子系统平衡点位置及特征方程随时变参数的变化关系, 并对机组混沌运动进行了数值验证, 在一定程度上解决了解析方法, 适用性较差导致对多维机电耦合系统只能仿真求解难以理论分析的问题.

**关键词:** 机械弹性储能, 永磁电机, 非线性动力学, 混沌

**PACS:** 84.60.Rb, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.038403

## 1 引言

当前, 我国最高用电负荷持续增加, “间歇性”电源接入占比不断扩大, 设计一种大容量电能储存装置, 对于保证电能的供需平衡, 解决智能电网和规模化“间歇性”电源并网问题具有十分重要的意义. 为此, 2011年3月, 储能技术被列入了国家“十二五”规划纲要, 发展大规模电力系统储能是一个十分急迫的课题.

目前, 从储能方式看, 有物理储能, 如: 抽水蓄能<sup>[1]</sup>、压缩空气储能<sup>[2]</sup>、飞轮储能<sup>[3,4]</sup>、超导线圈储能<sup>[5-7]</sup>、超级电容器储能<sup>[8]</sup>、脉冲储能<sup>[9,10]</sup>等; 也有电化学储能, 如: 蓄电池储能<sup>[11-13]</sup>、燃料电池<sup>[14]</sup>、氢储能<sup>[15-17]</sup>等. 从电力系统角度看, 要求储能技术至少满足以下几个特点<sup>[18,19]</sup>: 足够大的储能容量、足够快的功率响应速度、足够高的储能效率、足够长的使用寿命、足够小的运行费用以及对地理条件场地无特殊要求、无污染. 按此要求, 在现有储能技术中, 除了抽水蓄能技术成熟

外, 其他储能技术尚无法大规模满足电力系统对储能技术的现实需求. 我们需要客观认识各储能方式的优势与不足, 更需要研发新的储能技术.

基于此, 在深入研究涡簧弹性储能原理的基础上, 本团队创新性地提出了一种机械弹性储能 (mechanical elastic energy storage, 简记为 MEES) 机组<sup>[20,21]</sup>, 机组构件包括储能箱、动力传动机构 (齿轮变速箱)、储能电机 (永磁电机)、控制系统等. 从构成看, 机械弹性储能机组包括机械和电气两大部分, 属于典型的机电耦合系统. 本文以一种新型的永磁电机式机械弹性储能机组为研究对象, 在文献<sup>[22-26]</sup>的基础上建立了机组的非线性动力学模型, 揭示了永磁电机式机械弹性储能机组混沌产生机理. 混沌<sup>[27-34]</sup>是非线性系统表现的一种常见且复杂的运行行为, 现有文献研究非线性系统行为的主要方法之一是 Poincare 映射法<sup>[35,36]</sup>, 通过 Poincare 截面将轨迹离散化为所研究轨迹与  $(n-1)$  维截面的交点序列, 但是, 在降维的过程中, Poincare 映射容易丢失相邻两次相交的信息, 难以

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51077053) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 11MG40) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: ncepu\_yy@163.com

揭示奇异吸引子的精细结构. 本文运用坐标平面投影法 (coordinate plane projection method, CPP 法)<sup>[37]</sup> 对 MEES 机组混沌特性进行了分析, 采用 CPP 法研究高维系统具有分析简单、思想朴素等优点, 能够有效揭示非线性混沌系统通向混沌的道路, 为认识和分析多维机电系统的非线性行为与混沌现象提供了一个新的视角.

## 2 机组非线性动力学模型

### 2.1 机组构成及工作原理

采用永磁电机和全功率双向变流器的 MEES 机组模型如图 1 所示.

从图 1 可见, 永磁电机式 MEES 机组由储能箱、齿轮变速箱、永磁同步电机、双向变流器、断路器和机组控制器等组成, 几十个甚至更多个这样的机组组合在一起, 可建成机械弹性储能电站. 机械弹性储能电站通过一个集中的中央控制器实现对多个机组的顺序储能、发电控制, 可实现大规模电能存储与发电之目的.

永磁电机式 MEES 机组以储能箱储能涡簧的弹性变形能作为动力源或负载, 其运行原理分为储

能与发电两个过程: 储能时, 电能驱动永磁电机运行, 电机再通过齿轮变速箱使储能箱中的涡簧拧紧, 涡簧就以弹性势能的形式将能量储存起来, 完成电能到弹性势能的转换; 之后, 涡簧维持锁紧状态, 直到接收到一个能量释放的控制信号; 当释能时, 储能箱中锁紧的涡簧开始释放, 通过齿轮变速箱带动储能电机发电 (或并网), 实现弹性势能到电能转换的能量释放过程.

### 2.2 非线性动力学模型

机械弹性储能箱是 MEES 机组的储能元件, 储能时, 储能箱相当于永磁电机的输出负载, 若要求储能箱以恒定角速度储存能量, 其扭矩公式可写为

$$T = \frac{EBH^3\pi}{6L}\omega t + T_0, \quad (1)$$

其中,  $T$  为储能箱扭矩,  $T_0$  为初始扭矩,  $\omega$  为储能箱储能角速度,  $E$  为涡簧材料弹性模量,  $B$  为材料宽度,  $H$  为材料厚度,  $L$  为涡簧长度,  $t$  为时间.

据此, 可得到储能箱储能的储能特性曲线如图 2 所示. 从图 2 可见, 储能箱工作扭矩应介于最大扭矩和最小扭矩之间, 并且其工作扭矩还应与永磁电机的电磁转矩相匹配.

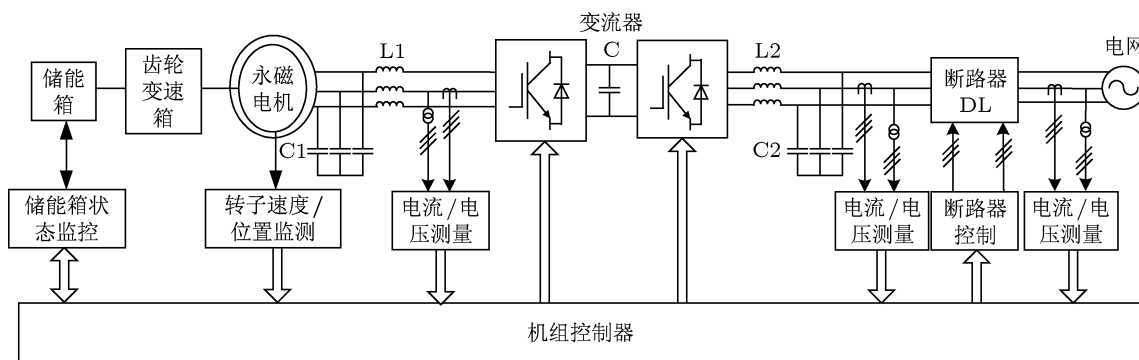


图 1 MEES 机组构成模型

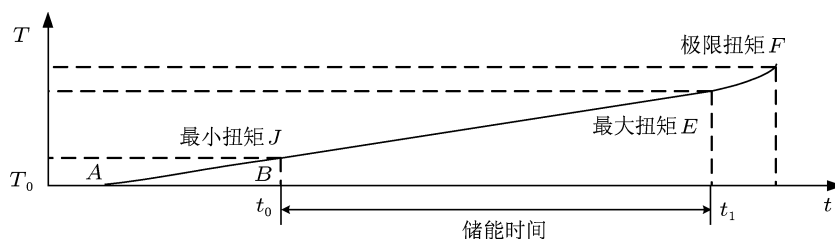


图 2 储能箱储能涡簧的理论出力外特性曲线

储能时, 永磁电机运行于电动机状态, 其同步旋转  $d, q$  轴下的数学模型为

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d}(-R_s i_d + \omega_r L_d i_q), \\ \frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q}(-R_s i_q - \omega_r L_q i_d - \omega_r \psi_r), \\ \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{1}{JL_q}(p_n \psi_r i_q \\ &\quad + p_n(L_d - L_q)i_d i_q - T_L - \beta \omega_r), \end{aligned} \quad (2)$$

式中,  $i_d, i_q$  表示定子电流  $d, q$  轴分量,  $\omega_r$  表示转子机械角速度,  $L_d, L_q$  表示定子绕组  $d, q$  轴电感,  $R_s$  表示定子绕组电阻,  $\psi_r$  表示转子永磁体产生的磁链,  $p_n$  表示极对数,  $\beta$  表示黏滞阻尼系数,  $T_L$  表示负载转矩.

通过仿射变换  $x = \lambda \tilde{x}$  和时间尺度变换  $t = \tau \tilde{t}$ , 并假设永磁同步电机气隙均匀, 那么, 可将 (2) 式变换为无量纲的状态方程

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{i}_d}{d\tilde{t}} &= -\tilde{i}_d + \tilde{\omega}_r \tilde{i}_q + \tilde{u}_d, \\ \frac{d\tilde{i}_q}{d\tilde{t}} &= -\tilde{i}_q - \tilde{\omega}_r \tilde{i}_d - \gamma \tilde{\omega}_r + \tilde{u}_q, \\ \frac{d\tilde{\omega}_r}{d\tilde{t}} &= \sigma(\tilde{i}_q - \tilde{\omega}_r) - \tilde{T}_L, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} x &= [i_d, i_q, \omega_r], \quad \tilde{x} = [\tilde{i}_d, \tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r], \\ \lambda &= \begin{bmatrix} bk & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau \end{bmatrix}, \\ \tilde{u}_d &= u_d/R_s k, \quad \tilde{u}_q = u_q/(R_s k), \\ b &= L_q/L_d, \quad k = \beta/(p_n \tau \psi_r), \\ \tau &= L_q/R_1, \quad \gamma = -\psi_r/(kL_q), \\ \sigma &= \beta \tau/J, \quad \tilde{T}_L = \tau^2 T_L/J. \end{aligned}$$

### 3 机组运行稳定性分析及条件

MEES 机组的数学模型 (3) 是一个非线性自治方程, 其平衡点由 (4) 式确定,

$$\begin{aligned} \tilde{i}_d &= \tilde{\omega}_r^2 - \frac{\tilde{T}_L \tilde{\omega}_r}{\sigma} + \tilde{u}_d, \\ \tilde{i}_q &= \tilde{\omega}_r \tilde{i}_d + \frac{\tilde{T}_L}{\sigma}, \\ \tilde{\omega}_r^3 + \frac{\tilde{T}_L \tilde{\omega}_r^2}{\sigma} + \frac{(\tilde{u}_d - \gamma + 1)\tilde{\omega}_r \tilde{T}_L}{\sigma} - \tilde{u}_q &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

以下分三种情形对机组运行稳定性进行分析.

1)  $\tilde{u}_d = \tilde{u}_q = \tilde{T}_L = 0$

此种情形相当于 MEES 机组运行中突然断电, 外部输入为零. 显然, 原点是其中一个平衡点, 当  $\gamma < -1$  时, 根据 (4) 式, 确定另外两个平衡点为:  $[-\gamma - 1, \sqrt{-\gamma - 1}, \sqrt{-\gamma - 1}]$  和  $[-\gamma - 1, -\sqrt{-\gamma - 1}, -\sqrt{-\gamma - 1}]$ .

机组数学模型 (3) 对应的 Jacobian 矩阵为

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & \tilde{\omega}_r & \tilde{i}_q \\ -\tilde{\omega}_r & -1 & -\tilde{i}_d - \gamma \\ 0 & \sigma & -\sigma \end{pmatrix},$$

其对应的特征多项式可化简为

$$D(\lambda) = \lambda^3 + (2 + \sigma)\lambda^2 + (\sigma - \gamma)\lambda + 2\sigma(-\gamma - 1). \quad (5)$$

当  $\gamma = \gamma_h = -\sigma(\sigma + 4)/(\sigma - 2)$  时, 两个非平凡平衡点的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\sigma + 2), \\ \lambda_{2,3} &= \pm j \sqrt{\frac{2\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - 2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

故在  $\gamma = \gamma_h$  时, (3) 式对应的线性化方程将产生 Hopf 分岔, 当  $\gamma < \gamma_h$  时, 三个平衡点都将变为不稳定平衡点.

2)  $\tilde{u}_q = \tilde{T}_L = 0, \tilde{u}_d \neq 0$

在这种情形下, 若  $(-\gamma - \tilde{u}_d) > 1$ , 根据 (4) 式, 确定另外两个平衡点为  $[-\gamma - 1, \sqrt{-\gamma - 1 - \tilde{u}_d}, \sqrt{-\gamma - 1 - \tilde{u}_d}]$  和

$$[-\gamma - 1, -\sqrt{-\gamma - 1 - \tilde{u}_d}, -\sqrt{-\gamma - 1 - \tilde{u}_d}].$$

类似于情形 1) 的推导过程, 当  $\tilde{u}_d = \tilde{u}_{dh} = \frac{\sigma^2 + \gamma\sigma + 4\sigma - 2\gamma}{2 - \sigma}$  时, 两个非平凡平衡点的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\sigma + 2), \\ \lambda_{2,3} &= \pm j \sqrt{\frac{2\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - 2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

此时, (3) 式对应的线性化方程也将产生 Hopf 分岔, 当  $\tilde{u}_d > \tilde{u}_{dh}$  时, 三个平衡点都将变为不稳定平衡点.

3)  $\tilde{u}_d \neq 0, \tilde{u}_q \neq 0, \tilde{T}_L \neq 0$

该情形为机组在外加电源、涡簧为负载时储能运行的一般情况, 采用数值方法, 根据 (4) 式, 可确定机组运行的平衡点, 记为  $S(x, y, z)$ .

若式子  $\sigma yz = 2(1 + \sigma)^2 + (\sigma^2 + \sigma)(x + \gamma) + 2z^2$  成立, 基于类似于情形 1) 的推导过程可发现, (3)

式对应的线性化方程将出现极限环, 若  $\tilde{T}_L$  已知, 对于适当的  $\tilde{u}_d$  和  $\tilde{u}_q$  值, MEES 机组将出现混沌运行状态.

## 4 混沌特性数值分析

### 4.1 坐标平面投影法 (CPP 法)

大量研究表明, 分岔是混沌产生的主要路径. 当前, 研究混沌的主要方法之一是 Poincare 映射法, 通过 Poincare 截面将轨迹离散化为所研究轨迹与  $(n-1)$  维截面的交点序列, 但是, 在降维的过程中, Poincare 映射容易丢失相邻两次相交的信息, 难以揭示奇异吸引子的精细结构 [38,39]. 本文基于另一个全新的视角, 采用坐标平面投影法来研究 MEES 机组的混沌特性.

CPP 法由薛禹胜院士提出, 是一种适宜于研究高维动力学系统的半解析半数值方法, 将  $n$  维动力学系统  $X$  分解为 2 维  $X_1$  和与之互补的  $n-2$  维的  $X_2$ , 从而在 2 维空间内直接降维处理原  $n$  维系统. CPP 法包含两大部分, 解析分析部分和数值计算部分. 前者在 2 维  $X_1$  方程中将  $X_2$  处理为虚拟参数, 通过研究  $X_1$  中的特征方程, 直接计算参数  $X_2$  的分岔集, 后者考虑特定的轨线, 通过对原  $n$  维系统进行数值积分, 将  $X_1(t)$  表示在相平面上, 并在参数空间中同时表示出解析部分得到的分岔集和实际轨线的  $X_2(t)$ , 观察二者相交的序列, 根据  $X_2(t)$  穿越分岔集的时刻, 识别出  $X_1(t)$  发生性态突变的点及其性质, 从而得到高维分岔以及通向混沌的路径. CPP 法综合了低维系统中解析法和高维系统中数值法二者的优点.

### 4.2 MEES 机组混沌吸引子分析

以本实验室正在研发的 0.16 kWh/0.8 kW 机械弹性储能机组为例进行数值分析. 经整理后, 机组相关参数为, 额定电压 =0.38 kV (线值), 额定转矩 =2.1 N·m; 永磁同步电机参数整理如下:  $p_n = 4$ ,  $\psi_f = 0.1442$  Wb,  $R_s = 1.95 \Omega$ ,  $L_d = L_q = 0.2541$  H,  $\beta = 0.015$  N/rad·s<sup>-1</sup>,  $J = 0.8 \times 10^{-3}$  kg/m<sup>2</sup>,  $\sigma = 2.4433$ ,  $\gamma = -2.8436$ .

不失一般性, 下面以机组运行的一般情况, 即第三种情况为例, 采用 CPP 法对机组混沌运行特性进行数值分析. 取负载转矩  $\tilde{T}_L = 2$ ,  $\tilde{u}_q = 5$ ,  $\tilde{u}_d = -23$ , 此时, 机组三个平衡点均不稳定, 特别是出现了两

个非平凡平衡点  $S_+$  和  $S_-$ . 图 3 给出了机组的混沌吸引子, 其相轨迹时而绕  $S_+$  旋转, 时而绕  $S_-$  旋转, 并不时在二者间做无规则切换, 形成非周期奇异吸引子.

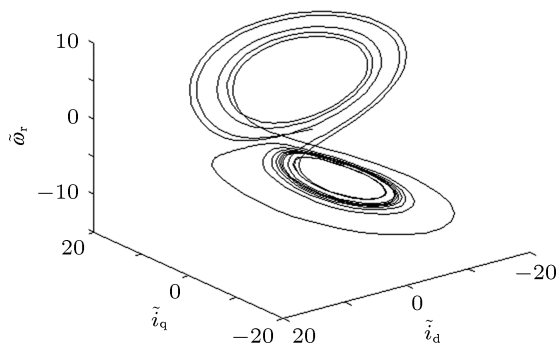


图 3 MEES 机组混沌吸引子

#### 1) $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$ 平面上的投影轨迹

首先考察  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹, 根据 CPP 法原理, 将  $\tilde{i}_d(\tilde{t})$  看作虚拟参数, 此时  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面上 CPP 降维子系统为

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{i}_q}{d\tilde{t}} &= -\tilde{i}_q - \tilde{\omega}_r \tilde{i}_d(\tilde{t}) - \gamma \tilde{\omega}_r + \tilde{u}_q, \\ \frac{d\tilde{\omega}_r}{d\tilde{t}} &= \sigma(\tilde{i}_q - \tilde{\omega}_r) - \tilde{T}_L, \end{aligned} \quad (8)$$

该降维系统平衡点坐标为  $\left( \frac{\tilde{u}_q + [\tilde{i}_d(\tilde{t}) + \gamma]\tilde{T}_L/\sigma}{1 + \tilde{i}_d(\tilde{t}) + \gamma}, \frac{\tilde{u}_q - \tilde{T}_L/\sigma}{1 + \tilde{i}_d(\tilde{t}) + \gamma} \right)$ , 由于  $\tilde{i}_d(\tilde{t})$  随时间变化, 故平衡点的位置和性质也将随之改变. (8) 式的 Jacobian 矩阵为  $\begin{pmatrix} -1 & -\gamma - \tilde{i}_d(\tilde{t}) \\ \sigma & -\sigma \end{pmatrix}$ , 对应特征方程的特征根为

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(\tilde{i}_d(\tilde{t}) + \gamma + 1)}}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

可计算得到两个分岔值  $\tilde{i}_{d1} = -\gamma - 1$ ,  $\tilde{i}_{d2} = -\gamma - 1 + \frac{(\sigma + 1)^2}{4\sigma}$ . 当  $\tilde{i}_d(\tilde{t}) < \tilde{i}_{d1}$  时, 平衡点为鞍点, 当  $\tilde{i}_{d1} < \tilde{i}_d(\tilde{t}) < \tilde{i}_{d2}$  时, 平衡点为稳定结点, 当  $\tilde{i}_d(\tilde{t}) > \tilde{i}_{d2}$  时, 平衡点为稳定焦点.

采用四阶五级龙格-库塔算法, 双精度求解 (3) 式, 得到  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹以及虚拟参数  $\tilde{i}_d(\tilde{t})$  的时变曲线, 分别见图 4 和图 5 所示. 此时, 两个分岔值取为  $\tilde{i}_{d1} = 1.8436$ ,  $\tilde{i}_{d2} = 3.0567$ .

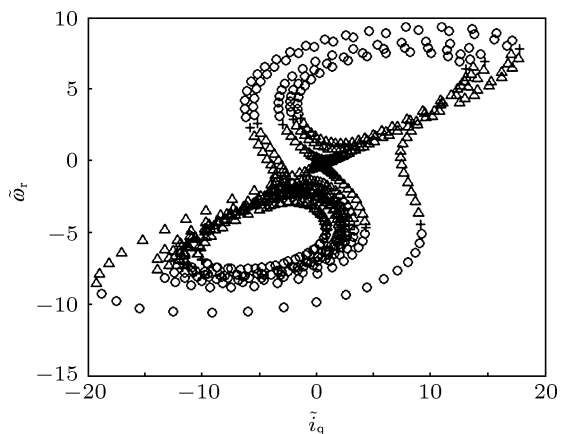


图4  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  面上的投影轨迹

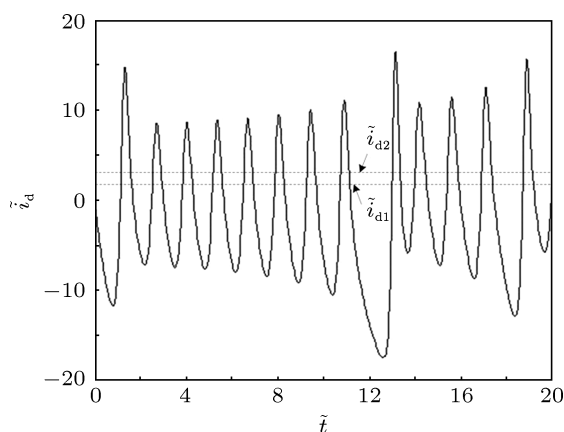


图5 虚拟参数  $\tilde{i}_d(t)$  时变曲线与分岔值

图5中，“ $\Delta$ ”，“+”和“o”分别表示平衡点为鞍点、稳定结点与稳定焦点时， $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹，结合图4还可见，虚拟参数  $\tilde{i}_d(\tilde{t})$  的两条分岔曲线将投影轨迹划分为5个部分，虚拟参数  $\tilde{i}_d(\tilde{t})$  经过分岔值  $\tilde{i}_{d1}$  或  $\tilde{i}_{d2}$  时，将使降维子系统  $\Sigma(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  的平衡点性质和相轨迹拓扑性质发生突变，这正是 MEES 机组产生混沌的根本原因。

根据虚拟参数  $\tilde{i}_d(\tilde{t})$  某时刻  $\tilde{t}_k$  的值以及该时刻  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  在相平面上的位置，就可以判断出  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹在未来一小段时间  $[\tilde{t}_k, \tilde{t}_k + \Delta\tilde{t}]$  内的运动变化趋势，即可以观察到轨迹变化的微观结构，这是由于在足够短的时间范围内，可以用  $\tilde{i}_d(\tilde{t}_k)$  线性的代替时变参数  $\tilde{i}_d(\tilde{t})$ ，将(8)式变为时间分段的线性定常方程，而线性系统的全局相图取决于唯一平衡点的性质和位置，因而在一个充分小的时间段内可以用特征根严格描述系统的全局动态特性。

下面就以13 s至15 s时间段内  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹为例(见图6)，具体分析一下投影轨迹

的运动趋势、平衡点切换过程以及机组混沌产生的机理。

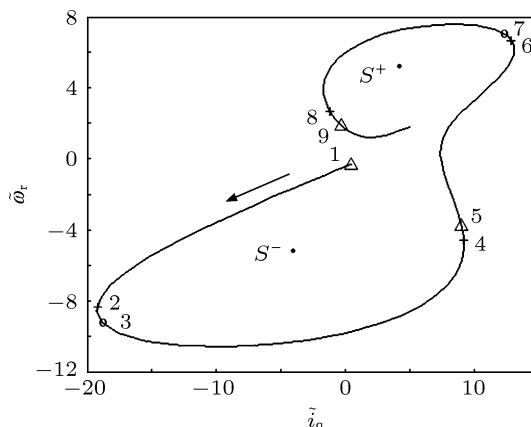


图6 13 s至15 s时间段内  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹

表1列出了图6相轨迹中所列各点时的平衡点位置、特征根和平衡点类型，当  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  运动到“1”时，由于此时刻  $\tilde{i}_d(\tilde{t}) < \tilde{i}_{d1}$ ，平衡点为鞍点，根据“1”点在鞍点流行上的位置，可判断  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  将远离鞍点，向左下方运动；当运动到“2”点时，由于此时刻  $\tilde{i}_{d1} < \tilde{i}_d(\tilde{t}) < \tilde{i}_{d2}$ ，平衡点为稳定结点，相运动轨迹将向平衡点趋近，开始绕  $S_-$  运动；当运动到“3”点时，由于此时刻  $\tilde{i}_d(\tilde{t}) > \tilde{i}_{d2}$ ，平衡点为稳定焦点，相运动轨迹将继续绕  $S_-$  运动；当运动到“4”点时，由于“4”点位于平衡点下方，且“4”点所处平衡点为稳定结点，相轨迹将向平衡点靠拢，此时相轨迹开始从  $S_-$  周围向  $S_+$  周围切换；当运动到“5”点时，此时平衡点为鞍点，“5”处于鞍点周围不稳定流形上，将继续往上运动远离鞍点；当运动到“6”点时，此时平衡点为稳定结点，“6”点位于平衡点上方，相运动轨迹将向平衡点趋近，开始绕  $S_+$  运动；运动到“7”点时，平衡点为稳定焦点，相运动轨迹将继续绕  $S_+$  运动。至此， $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面相轨迹完成了一次从绕  $S_-$  向绕  $S_+$  运动的突变过程。

2)  $(\tilde{i}_d, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹

将  $\tilde{i}_q(\tilde{t})$  看作虚拟参数，此时  $(\tilde{i}_d, \tilde{\omega}_r)$  平面上 CPP 降维子系统为

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{i}_d}{d\tilde{t}} &= -\tilde{i}_d + \tilde{\omega}_r \tilde{i}_q(\tilde{t}) + \tilde{u}_d, \\ \frac{d\tilde{\omega}_r}{d\tilde{t}} &= \sigma(\tilde{i}_q(\tilde{t}) - \tilde{\omega}_r) - \tilde{T}_L, \end{aligned} \quad (10)$$

该降维子系统平衡点坐标为  $(\tilde{i}_q^*(\tilde{t}) - \frac{\tilde{T}_L}{\sigma} \tilde{i}_q(\tilde{t}) + \tilde{u}_d, \tilde{i}_q(\tilde{t}) - \frac{\tilde{T}_L}{\sigma})$ 。(10) 式的 Jacobian 矩阵为

$\begin{pmatrix} -1 & \tilde{i}_q(\tilde{t}) \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}$ , 对应特征方程的特征根为  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -\sigma$ , 由于  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  均为负实数, 故该系统对应的平衡点为稳定结点, 平衡点位置随  $\tilde{i}_q(\tilde{t})$  变化, 但性质不会发生改变. 采用与 1) 相同的数值算法, 得到  $(\tilde{i}_d, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹见图 7 所示.

由图 7 可以看到, 虽然平衡点为稳定结点, 但由于  $\tilde{i}_q(\tilde{t})$  变化使得平衡点在稳定流形上的位置不断改变, 导致各点运动趋势各不相同, 形成了时而绕  $S_-$  运动, 时而又切换至  $S_+$ , 绕  $S_+$  运动的相轨迹. 具体分析过程与 1) 类似, 不再赘述.

3)  $(\tilde{i}_d, \tilde{i}_q)$  平面上的投影轨迹

表 1 13 s 至 15 s 时间段内  $(\tilde{i}_q, \tilde{\omega}_r)$  平面投影轨迹运动趋势分析

编号	积分时刻/s	投影点坐标	虚拟参数	平衡点	特征根及平衡点类型
1	12.00	(0.50, -0.33)	-13.35	(0.54, -0.28)	$\lambda_1 = 4.98, \lambda_2 = -8.43$ 鞍点
2	13.00	(-19.20, -8.56)	0.30	(-1.89, -2.71)	$\lambda_1 = 1.69, \lambda_2 = -5.13$ 稳定结点
3	13.02	(-18.77, -9.23)	3.88	(2.87, 2.05)	$\lambda_1 = -0.03, \lambda_2 = -3.41$ 稳定焦点
4	13.35	(9.15, -4.45)	2.98	(4.50, 3.68)	$\lambda_1 = 0.53, \lambda_2 = -3.97$ 稳定结点
5	13.38	(8.95, -3.61)	1.27	(-6.47, -7.29)	$\lambda_1 = 1.32, \lambda_2 = -4.76$ 鞍点
6	13.99	(13.06, 6.40)	2.43	(7.95, 7.13)	$\lambda_1 = 0.81, \lambda_2 = -4.26$ 稳定结点
7	14.02	(12.54, 6.92)	4.78	(2.24, 1.42)	$\lambda_1 = -0.90, \lambda_2 = -2.54$ 稳定焦点
8	14.49	(-41, 2.95)	2.47	(7.49, 6.67)	$\lambda_1 = -0.79, \lambda_2 = -4.24$ 稳定结点
9	14.52	(-1.13, 2.56)	1.53	(-12.52, -13.33)	$\lambda_1 = 1.21, \lambda_2 = -4.66$ 鞍点

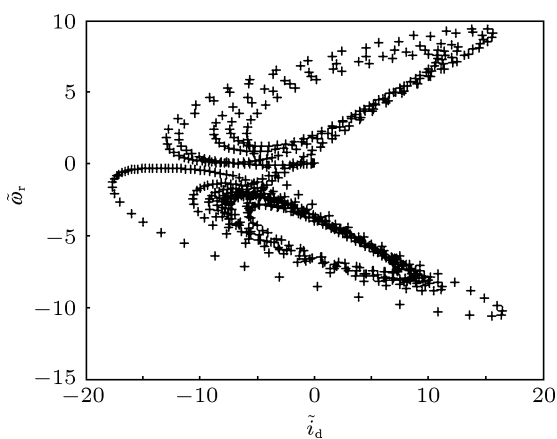


图 7  $(\tilde{i}_d, \tilde{\omega}_r)$  平面上的投影轨迹

将  $\tilde{\omega}_r$  看作虚拟参数, 此时  $(\tilde{i}_d, \tilde{i}_q)$  平面上 CPP 降维子系统为

$$\frac{d\tilde{i}_d}{d\tilde{t}} = -\tilde{i}_d + \tilde{\omega}_r(\tilde{t})\tilde{i}_q + \tilde{u}_d,$$

$$\frac{d\tilde{i}_q}{d\tilde{t}} = -\tilde{i}_q - \tilde{\omega}_r(\tilde{t})\tilde{i}_d - \gamma\tilde{\omega}_r(\tilde{t}) + \tilde{u}_q, \quad (11)$$

该降维系统平衡点坐标为

$$\left( \frac{-\gamma\tilde{\omega}_r^2(\tilde{t}) + \tilde{u}_q\tilde{\omega}_r(\tilde{t}) + \tilde{u}_d}{1 + \tilde{\omega}_r^2(\tilde{t})}, \frac{(-\gamma - \tilde{u}_d)\tilde{\omega}_r(\tilde{t}) + \tilde{u}_q}{1 + \tilde{\omega}_r^2(\tilde{t})} \right),$$

(11) 式的 Jacobian 矩阵为  $\begin{pmatrix} -1 & \tilde{\omega}_r(\tilde{t}) \\ -\tilde{\omega}_r(\tilde{t}) & -1 \end{pmatrix}$ , 对

应特征方程的特征根为  $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-\tilde{\omega}_r^2(\tilde{t})}$ , 若  $\tilde{\omega}_r(\tilde{t}) = 0$ , 则  $\lambda_{1,2} = -1$ , 此时平衡点为稳定结点, 若  $\tilde{\omega}_r(\tilde{t}) \neq 0$ , 由于  $\tilde{\omega}_r(\tilde{t})$  为正实数, 则  $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\tilde{\omega}_r(\tilde{t})$ , 为稳定焦点. 采用与 1) 相同的数值算法, 得到  $(\tilde{i}_d, \tilde{i}_q)$  平面上的投影轨迹见图 8 所示.

图 8 中不存在  $\tilde{\omega}_r(\tilde{t}) = 0$ , 与情形 2) 类似, 在这样的  $(\tilde{i}_d, \tilde{i}_q)$  平面上投影轨迹沿着稳定焦点的拓扑流形运动, 随着  $\tilde{\omega}_r(\tilde{t})$  的改变, 稳定焦点位置不断改

变, 导致相轨迹时而绕  $S_-$  运动, 时而又切换至  $S_+$  附近, 绕  $S_+$  运动.

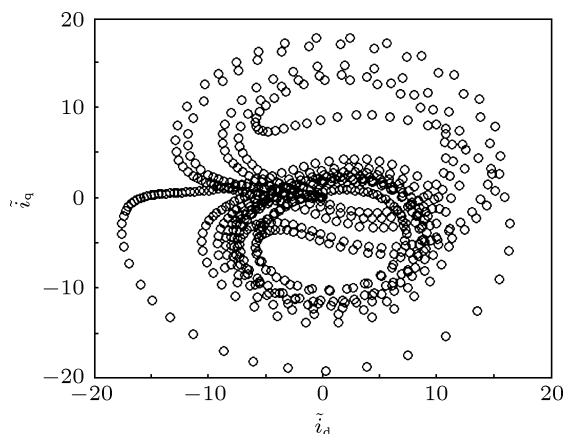


图 8  $(\tilde{i}_d, \tilde{i}_q)$  平面上的投影轨迹

## 5 结论

提出了一种永磁电机式 MEES 机组, 建立了机组的非线性动力学模型, 发现机组在某些参数下会出现混沌运动, 基于本实验室正在研发的 0.16 kWh/0.8 kW 机械弹性储能机组运行参数, 将机组 3 维非线性模型降阶为带时变参数的 2 维投影子系统, 采用坐标平面投影法研究了机组的混沌特性, 分析了子系统平衡点位置及特征方程随时变参数的变化关系, 并对机组混沌运动进行了数值验证, 揭示了机组混沌产生机理. 混沌现象不利于机组的安全稳定运行, 提出抑制机组混沌运动的方法将是下一步亟需研究的内容.

- [1] Cohen A I, Wan S H 1985 *IEEE Trans. Power Appar. Syst.* **104** 2099
- [2] Schainker P B, Nakhmkin M 1985 *IEEE Trans. Power Appar. Syst.* **4** 790
- [3] Hebner R, Beno J, Walls A 2002 *IEEE Spectr. Mag.* **39** 46
- [4] Ji L T, Zhang J C 2010 *Proc. CSEE* **31** 101 (in Chinese) [姬联涛, 张建成 2010 中国电机工程学报 **31** 101]
- [5] Ali M H, Bin Wu, Dougal R A 2010 *IEEE Trans. Sust. Ener.* **1** 38
- [6] Ma L, Huang A Q, Li J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 037104
- [7] Han C, Li Y, Yu J, Tang Y J, Cheng S J, Pan Y 2001 *Aut. Electr. Power Syst.* **25** 63 (in Chinese) [韩翀, 李艳, 余江, 唐跃进, 程时杰, 潘垣 2001 电力系统自动化 **25** 63]
- [8] Rufer A, Hotellier D, Barrade P 2004 *IEEE Trans. Power Deliver.* **19** 629
- [9] Yu H W, Xu M J, Duan W T, Sui Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4158 (in Chinese) [於海武, 徐美健, 段文涛, 隋展 2007 物理学报 **56** 4158]
- [10] Yan X W, Yu H W, Cao D X, Li M Z, Jiang D B, Jiang X Y, Duan W T, Xu M J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4230 (in Chinese) [严雄伟, 於海武, 曹丁象, 李明中, 蒋东镇, 蒋新颖, 段文涛, 徐美健 2009 物理学报 **58** 4230]
- [11] Caumont O, Le Moigne P, Rombaut C, Muneret X, Lenain P 2000 *IEEE Trans. Energ. Conver.* **15** 354
- [12] Bai Y, Wang B, Zhang W F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 068202 (in Chinese) [白莹, 王蓓, 张伟风 2011 物理学报 **60** 068202]
- [13] Li J, Yang C Z, Zhang X G, Zhang J, Xia B J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6573 (in Chinese) [李佳, 杨传铮, 张熙贵, 张建, 夏保佳 2009 物理学报 **58** 6573]
- [14] Ellis M W, Von Spakovsky M R, Nelson D J 2001 *Proc. IEEE* **89** 1808
- [15] Ruan W, Xie A D, Yu X G, Wu D L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 043104
- [16] Liu X Y, Wang C Y, Tang Y J, Sun W G, Wu W P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 036103
- [17] Niu X L, Deng Y F, Li X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7313 (in Chinese) [牛雪莲, 邓玉福, 李雪 2009 物理学报 **58** 7313]
- [18] Cheng S J, Wen J Y, Sun H S 2005 *Electrotechnical Application* **24** 1 (in Chinese) [程时杰, 文劲宇, 孙海顺 2005 电气应用 **24** 1]
- [19] Cheng S J, Yu W H, Wen J Y, Sun H S, Wang H F 2007 *Power Syst. Technol.* **31** 97 (in Chinese) [程时杰, 余文辉, 文劲宇, 孙海顺, 王海
- 风 2007 电网技术 **31** 97]
- [20] Mi Z Q, Wang Z Q, Yu Y, Duan W C. *N. Patent* 201639308 U [2010-11-17] (in Chinese) [米增强, 王璋奇, 余洋, 段巍 中国专利 201639308 U] [2010-11-17]
- [21] Duan W, Feng H C, Wang Z Q 2011 *Chin. J. Constr. Mach.* **9** 493 (in Chinese) [段巍, 冯恒昌, 王璋奇 2011 中国工程机械学报 **9** 493]
- [22] Li Z, Jin B P, Joo Y H, Zhang B, Chen G R 2002 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **49** 383
- [23] Yang G L, Li H G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7552 (in Chinese) [杨国良, 李惠光 2009 物理学报 **58** 7552]
- [24] Li D, Wang S L, Zhang X H, Yang D 2010 *Chin. Phys. B* **18** 1399
- [25] Zheng G, Zou J X, Xu H B, Qin G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 7552 (in Chinese) [郑刚, 邹见效, 徐红兵, 秦钢 2011 物理学报 **60** 7552]
- [26] Ren L N, Liu F C, Jiao X H, Li J Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 060506 [任丽娜, 刘福才, 焦晓红, 李俊义 2012 物理学报 **61** 060506]
- [27] Lü L, Yu M, Wei L L, Zhang M, Li Y S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100507
- [28] Zhai L J, Zheng Y J, Ding S L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 070503
- [29] Mohammad P A 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100505
- [30] Li W L, Li S F, Li G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 064217
- [31] Li N, Sun H Y, Zhang Q L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 010503
- [32] Zhao H, Ma Y J, Liu S J, Gao S G, Zhong D 2012 *Chin. Phys. B* **20** 120501
- [33] Ahn C K 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 100504
- [34] Brugnago E L, Rech P C 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 110506
- [35] Zhou X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100503 (in Chinese) [周小勇 2011 物理学报 **60** 100503]
- [36] Wang Z, Li Y X, Hui X X, Lü L *Acta Phys. Sin.* **60** 010513 (in Chinese) [王震, 李永新, 惠小健, 吕雷 2011 物理学报 **60** 010513]
- [37] Xue Y S 1999 *Motion Stability quantification Theory* (Nanjing: Phoenix Science Press) (in Chinese) [薛禹胜 1999 运动稳定性量化理论 (南京: 江苏科学技术出版社)]
- [38] Ge X H 2007 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [葛晓慧 2007 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]
- [39] Xue Y S, Wu Q H, Zhou H Q, Tan B, Lau K W 2003 *J. Nonlin. Dyn. Sci. Technol.* **21** 1 (in Chinese) [薛禹胜, Wu Q H, 周海强, 檀斌, Lau K W 2003 非线性动力学学报 **21** 1]

# Nonlinear dynamic model and chaotic characteristics of mechanical elastic energy storage unit in energy storage process\*

Yu Yang<sup>†</sup> Mi Zeng-Qiang

(State Key Laboratory of Alternate Electrical Power System with Renewable Energy Sources, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

(Received 23 May 2012; revised manuscript received 30 August 2012)

## Abstract

A new way of energy storage based on mechanical elasticity is proposed. Nonlinear dynamic model of permanent magnet motor based mechanical elastic energy storage unit is derived, and the chaotic behaviors under certain parameter values and operation conditions are demonstrated. The linear stability of the nonlinear dynamic model is analyzed. Based on the operation parameters of the 0.16 kWh/0.8 kW unit that is being developed in our laboratory, three-dimensional nonlinear model is reduced to two-dimensional projection subsystem with varying parameters. Then the chaotic property of the unit is analyzed by coordinate plane projection method, the changing relationship between the locations of equilibrium point, characteristic equation of reduction subsystem and varying parameters is discussed, and the chaotic behavior is numerically verified. The issue caused by poor applicability of analytical methods and solved only by simulation is solved to some extent at a theoretical analysis level.

**Keywords:** mechanical elastic energy storage, permanent magnet motor, nonlinear dynamics, chaos

**PACS:** 84.60.Rb, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.038403

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51077053), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 11MG40).

† Corresponding author. E-mail: ncepu\_yy@163.com