

缓变下垫面对浅水方程的动力学订正*

达朝究^{1)2)†} 冯爱霞³⁾ 龚志强³⁾ 宋健⁴⁾

1) (西北民族大学数学与计算机科学学院, 兰州 730030)

2) (兰州大学大气科学学院, 兰州 730000)

3) (国家气候中心气候研究开放实验室, 北京 100081)

4) (内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010062)

(2012年7月4日收到; 2012年9月7日收到修改稿)

讨论了当下垫面随时间缓慢变化时浅水方程的形式. 从控制大气运动的连续性方程和动量方程出发, 将下垫面的缓慢变化作为一个小量叠加到固有下垫面函数上, 利用大气的上下边界条件, 得到改进的浅水方程. 在改进的浅水方程中, 由缓变局部水平体积散度, 订正了局部水平体积散度和流体局部厚度变化之间的平衡, 在此基础上得到包含下垫面缓变的涡度方程.

关键词: 下垫面, 全球变暖, 缓变, 浅水方程

PACS: 92.40.Cy, 92.60.Aa

DOI: 10.7498/aps.62.039202

1 引言

大气的下垫面指地球表面, 包括海洋、陆地及陆地上的高原、山地、平原、森林、草原、城市等等. 下垫面的性质和形状, 对大气的热量、水分、干洁度和运动状况有明显的影响; 在陆地上, 巨大的山地和高原对气候的形成与影响有着不可忽视的作用, 而在海洋上, 海平面的变化、海水成分的变化, 以及海洋环流的异常无疑会影响大气环流, 进而影响气候.

全球变暖对大气、海洋系统及社会经济体系具有深远的影响. 以全球气候变化为核心的全球变化问题, 引起各国政府、科学工作者的高度重视, 也是普通民众广泛关注的问题, 20世纪80年代以来, 在全球范围内开展了全球气候变化及其影响的研究^[1-10].

全球变暖对陆地生态系统的影响及其反馈, 是全球变化研究的焦点, 全球变化对陆地生态系统的

影响已经进行了大量的研究, 这主要体现在陆地结构、植被变化和气候变化的关联^[11-13], 这种关联的年际气候变化表现为区域增温和降水波动^[14], 对气候变暖的响应呈现出全球气候增暖的趋势^[15], 这势必对我国区域发展带来影响^[16,17], 但是陆地系统的变化对气候变化的影响还没有定量的研究; 全球变暖以后, 两极冰盖融化, 大量的淡水进入海洋, 造成海平面的上升, 这会影响到海水的物理结构, 在持续温暖的条件下, 海水的膨胀率也会增长. 这种变化是一种缓变性海洋灾害, 其长期的累积效应将加剧风暴潮、海岸侵蚀、海水入侵、土壤盐渍化和咸潮等海洋灾害的致灾程度^[18-23], 同样海平面的上升对气候变化的影响也没有定量的研究.

在全球变暖条件下, 就极端事件的发生和发展, 封国林, 候威, 龚志强等做了系统的研究. 首先对于极端事件进行了理论研究, 给出了一种确定极端事件阈值的新方法^[24], 对于温度破纪录事件和温度极端事件也做了研究, 得到中国各地区极端温度变化幅度差异明显, 具有明显的区域特征^[25],

* 全球变化研究国家重大科学研究计划 (批准号: 2012CB955902)、国家自然科学基金 (批准号: 40930952, 41175067)、国家科技支撑计划 (批准号: 2009BAC51B04)、公益性行业 (气象) 科研专项 (批准号: GYHY201106016, GYHY201206009)、内蒙古自然科学基金 (批准号: 2011MS0112) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: zyz2011079) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jtdcj@163.com

给出了温度突变的过程可能是极端温度事件由一个相对稳定状态向另一个稳定状态演变过程的结论 [26], 气候变暖对中国极端暖月事件的变率有明显影响 [27], 全球增暖与中国温度破纪录事件的时空分布有一定的关联, 随着全球变暖趋势的不断增强, 破纪录温度事件发生的频次呈现不断增加的特点 [28,29].

综上所述, 可以知道在全球变暖和人类活动的双重影响下, 大气的下垫面会发生变化, 这种变化会对气候有反馈作用 [30,31], 而气候的变化也会对社会经济发展产生影响 [32]! 大气下垫面的变化对气候的反馈作用就是本文要解决的问题, 讨论正压均值流体在下垫面发生缓慢变化时, 浅水方程的形式, 以及对应涡度方程的变化.

2 缓变地形下的浅水方程

2.1 基础知识

2.1.1 连续性方程与运动方程

当流体内部无质量源、汇时, 连续性方程为 [33]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (1a)$$

这里 ρ 是密度, p 是压力, \mathbf{u} 是速度矢量, 都是时间 t 和空间坐标 (x, y, z) 的函数. 上式用全导数形式还可写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1b)$$

这里 $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ 是全导数.

运动方程为 [33]

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \nabla \phi + \mathbf{F}(\mathbf{u}). \quad (2)$$

这里 ϕ 是保守彻体力 (the body force) [33,34] 的位势, 是已知量. 而 $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ 是非保守力, 在本文中表示大气、海洋这样牛顿流体的摩擦力, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ 有如下的近似表示

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) \approx \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3)$$

假设 μ 和 ρ 是常数, 方程 (1) 与方程 (2) 就封闭 [33], 未知的变量只有速度 \mathbf{u} 与压力 p .

2.1.2 旋转坐标系中的运动方程

对于大气与海洋, 由于它们随地球旋转, 而运动方程 (2) 是在惯性坐标系中描述的, 以地球角速度 Ω 旋转的坐标系中描述大气海洋的运动方程 (2) 为 [33]

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \nabla \Phi + \mathbf{F}, \quad (4)$$

这里 \mathbf{u} 是地球上观测到的速度, 是相对速度, p 是压力, 而 Φ 是位势函数 ϕ 与由于旋转而产生的向心加速度 $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ 的位势函数 ϕ_c 之和; $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ 称为相对加速度, $2\Omega \times \mathbf{u}$ 是科氏加速度 [33].

方程 (1) 在旋转坐标系中没有变化, 仍为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

2.2 缓变下垫面下的浅水方程

如图 1 所示, 具有均匀常值密度 ($\rho = \text{const}$) 的一层流体, 自参考面 $z = 0$ 算起, 流体的表面高度为 $h(x, y, t)$. 考虑到地球对大气、海洋的作用, 把由位势 Φ 引起的彻体力模式化为一个矢量 \mathbf{g} , 其方向垂直于 $z = 0$ 平面, 即 $\Omega = k\Omega$, 与垂直坐标轴平行、方向相反 [33-35]. 在我们的研究问题中, 流体的旋转

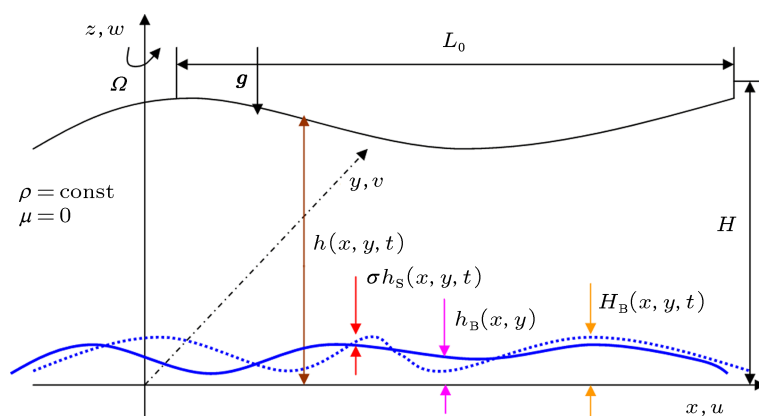


图 1 浅水模式

轴与 z 轴重合, 所以在此情况下, 科氏参数 f 就是 $2\Omega \sin \theta$ (Ω 是地转角速度, θ 为纬度). 由于全球变暖, 地球下垫面随时间会缓变, 将其细化为两部分: 大气海洋的固有下垫面和随时间缓慢变化部分, 记其形式为

$$z \equiv H_B(x, y, t) = h_B(x, y) + \sigma h_S(x, y, t), \quad (6)$$

这里 $H_B(x, y, t)$ 是大气海洋下垫面, $h_B(x, y)$ 为大气海洋固有下垫面, 而 $h_S(x, y, t)$ 为随时间缓慢变化的部分, 参数 σ 是刻画这种缓慢变化程度的一小量, 显然, 当参数 $\sigma = 0$ 时, 问题就退化为大气下垫面没有缓变的情况; 平行于 x, y 和 z 轴的速度分量分别是 u, v, w ; 施加在流体表面的压力可以是任意的, 在本文中取其为常数; 最后, 我们假设流体是无黏性, 即 $\mu = 0$, 或者在讨论中流体的黏滞性不是太重要 [33–35].

显然, 流体的深度 $h(x, y, t) - H_B(x, y, t)$ 随时间和空间变化的. 假设流体的深度特征量是已知量, 记其为 H . 同样, 假设存在一个运动的水平特征量, 记为 L_0 . 表征浅水理论的基本参数条件是

$$\delta = H/L_0 \ll 1, \quad (7)$$

δ 就是形态比, 是描述水平运动与垂直运动关系的一个量 [33–35]. 由于假设密度是常数, 所以连续性方程 (5) 简化为不可压缩条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

为了研究方便, 将压力 $p(x, y, z, t)$ 写为 [33–35]

$$p(x, y, z, t) = -\rho g z + \tilde{p}(x, y, z, t), \quad (9)$$

上式右侧第一项将于单位质量流体所受的常值重力抵消. 假设无黏, 这时候运动方程 (4) 的分量形式有如下表示

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \quad (10b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \quad (10c)$$

在推导 (10a), (10b) 的过程中, $f = 2\Omega \sin \theta$. 根据浅流体模式的定义, 用总压力 $p(x, y, z, t)$ 表示, 有

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + O(\delta^2), \quad (11)$$

上式就是静力近似 [33–35]. 关于 z 积分 (11) 式, 得

$$p(x, y, z, t) = -\rho g z + A(x, y, t), \quad (12)$$

这里 $A(x, y, t)$ 是积分常数, 由上、下边界条件来定. 为了讨论方便取上边界条件为

$$p(x, y, h, t) = p_0, \quad (13)$$

也就是施加在流体表面的压力为 p_0 , 这里的 p_0 为常数. 所以

$$A(x, y, t) = p_0 + \rho g h. \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (12) 式, 得

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \rho g (h - z), \quad (15)$$

由 (15) 式知道: 水平压力梯度与 z 无关, 即

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (16a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (16b)$$

所以水平加速度必然与 z 无关, 假设初始水平速度与 z 无关, 则在以后的运动中仍能够保持与 z 无关, 这样水平动量方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (17a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (17b)$$

由于水平速度 u, v 与 z 无关, 将 (8) 式关于 z 积分得

$$w(x, y, z, t) = -z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tilde{w}(x, y, t), \quad (18)$$

上式中的 $\tilde{w}(x, y, t)$ 为积分常数, 利用刚性地面 $z \equiv H_B(x, y, t) = h_B(x, y) + \sigma h_S(x, y, t)$ 处法向速度为零的条件 [36], 有

$$w(x, y, H_B(x, y, t), t) = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} + \sigma \left(u \frac{\partial h_S}{\partial x} + v \frac{\partial h_S}{\partial y} \right), \quad (19)$$

得到

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y, t) &= \left(u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} \right) + \sigma \left(u \frac{\partial h_S}{\partial x} + v \frac{\partial h_S}{\partial y} \right) \\ &\quad + [h_B(x, y) + \sigma h_S(x, y, t)] \\ &\quad \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

故有

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= [h_B(x, y) + \sigma h_S(x, y, t) - z] \\ &\quad \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} \\ &\quad + \sigma \left(u \frac{\partial h_S}{\partial x} + v \frac{\partial h_S}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

在自由面 $z = h$ 上相应的运动学条件是^[36]

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}, \quad z = h(x, y, t), \quad (22)$$

由 (21) 与 (22) 式得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - [h_B(x, y) + \sigma h_S(x, y, t) - h] \\ & \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial h_B}{\partial x} - v \frac{\partial h_B}{\partial y} \\ & - \sigma \left(u \frac{\partial h_S}{\partial x} + v \frac{\partial h_S}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (23a)$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(h - h_B)}{\partial t} + \nabla_H \cdot \mathbf{u}_H(h - h_B) \\ & - \sigma \nabla_H \cdot \mathbf{u}_H h_S(x, y, t) = 0, \end{aligned} \quad (23b)$$

这里 ∇_H 是水平梯度算子, \mathbf{u}_H 是水平速度, 这较之没有地形缓变的方程^[33]

$$\frac{\partial(h - h_B)}{\partial t} + \nabla_H \cdot \mathbf{u}_H(h - h_B) = 0 \quad (24)$$

来说, 方程左侧的第三项就是下垫面缓变的效应, 该效应受参数 σ 的制约. 比较方程 (23b) 和方程 (24), 从方程 (24) 知道, 下垫面没有缓变时, 局部水平体积散度 $\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H(h - h_B)$ 和流体局部厚度变化两者之间建立了平衡关系; 从方程 (23d) 知道, 当下垫面有缓变时, 局部水平体积散度 $\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H(h - h_B)$ 、流体局部厚度变化以及缓变局部水平体积散度之间三者保持平衡关系, 方程 (23d) 订正原有平衡关系 (24), 更真实地反映动力学关系; 还可以看到, 当下垫面没有缓变时, 即前文所说的 $\sigma = 0$, 方程 (23b) 就退化为方程 (24), 这说明方程 (23b) 是方程 (24) 的推广, 方程 (24) 是方程 (23b) 的特殊情况. 方程 (17a), (17b), (23) 构成缓变下垫面条件下的改进浅水模式方程组.

2.3 缓变地形位涡方程

在笛卡尔坐标系中, 相对涡度的三个分量是

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (25a)$$

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (25b)$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (25c)$$

由于假设 u, v 与 z 无关, 有

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} = O\left(\frac{W}{L}\right) = O\left(\delta \frac{U}{L}\right), \quad (26a)$$

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = O\left(\frac{W}{L}\right) = O\left(\delta \frac{U}{L}\right), \quad (26b)$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{U}{L}\right), \quad (26c)$$

所以, 相对涡度的水平分量是其垂直分量的 $O(\delta)$ 倍. 如果将方程 (17a) 对 y 求微商, 将方程 (17b) 对 x 求微商, 消去 h , 便得

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} & \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ & = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

式中引进了记号

$$\zeta \equiv \omega_x. \quad (28)$$

利用 (24) 式, 可以把 (27) 式写为

$$\begin{aligned} & \frac{d(h - h_B)}{dt} + (h_B - h) \left(\frac{1}{(\zeta + f)} \frac{d\zeta}{dt} \right) + \sigma \left[h_S(x, y, t) \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{(\zeta + f)} \frac{d\zeta}{dt} \right) + \left(u \frac{\partial h_S}{\partial x} + v \frac{\partial h_S}{\partial y} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

上式就是改进的浅水流体的位涡方程, 可以作为大气与海洋大尺度运动中考虑了下垫面缓变的动力学模型. 同样当 $\sigma = 0$, 方程 (29) 就退化为^[33]

$$\frac{d(h - h_B)}{dt} + (h_B - h) \left(\frac{1}{(\zeta + f)} \frac{d\zeta}{dt} \right) = 0. \quad (30)$$

3 结论

在全球变暖的大背景和人类活动的直接影响下, 大气下垫面随时间会发生变化, 这种变化从某种意义上来说是缓慢变化, 这种缓慢变化对大气运动会产生影响, 涡度是描述空气微团旋转运动的强弱程度及其方向的一个物理量, 涡度方程定量地描述了这种变化. 本文基于大气运动基本方程, 采用了不可压缩和常值密度的假设, 将下垫面的缓变作为一个小量叠加于固有下垫面上, 利用大气的上下边界条件, 得到改进的浅水方程, 这个方程较之原始浅水方程来说, 很好地处理了下垫面条件, 下垫面的缓慢变化对浅水方程做了合理的动力学订正, 得到改进的位涡方程, 其更适合描述大气运动的真实状态.

- [1] Tehart W J, Shenlelon G W, Giffiths D C 1990 *The IPCC Impacts Assessment* (Canberra: Australian Government Publishing Service)
- [2] Perry J S 1993 *Understanding Our Own Planet: An Overview of Major International Scientific Activities* (Paris: ICSU Secretariat)
- [3] IPCC 1998 *The Regional Impacts of Climate Change: An Assessment of Vulnerability* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] IPCC 2001 *Climate Change 2001: Impacts, Adaptation & Vulnerability* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [5] Zhang Z Q, Sun C Q 1999 *Chin. Sci. Bull.* **44** 464 (in Chinese) [张志强, 孙成权 1999 科学通报 **44** 464]
- [6] Sha W Y, Shao X M, Huang M 2002 *Scientia Sinica Terrae* **32** 317 (in Chinese) [沙万英, 邵雪梅, 黄玫 2002 中国科学 (D 辑) **32** 317]
- [7] Liu S Y, Ding Y J, Li J, Shangguan D H, Zhang Y 2006 *Quaternary Sciences* **26** 762 (in Chinese) [刘时银, 丁永建, 李晶, 上官冬辉, 张勇 2006 第四纪研究 **26** 762]
- [8] Zhang S X, Zhang L, Sun S P, Feng G L 2011 *Plateau Meteor.* **30** 659 (in Chinese) [张世轩, 张璐, 孙树鹏, 封国林 2011 高原气象 **30** 659]
- [9] Sun S P, Zhang L, Hou W, Feng G L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 029201 (in Chinese) [孙树鹏, 张璐, 侯威, 封国林 2011 物理学报 **60** 029201]
- [10] Zong X P, Li M H, Hu J G, Feng G L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8272 (in Chinese) [宗序平, 李明辉, 胡经国, 封国林 2010 物理学报 **59** 8272]
- [11] Zhao M S, Neilson R P, Yan X D 2002 *Acta Geog. Sin.* **57** 28 (in Chinese) [赵茂盛, Ronald P. Neilson, 延晓东 2002 地理学报 **57** 28]
- [12] Zhou G S, Zhang X S 1995 *Acta Phytocologica Sinica* **20** 9 (in Chinese) [周广胜, 张新时 1995 植物生态学报 **20** 9]
- [13] Zhou G S, Wang Y H 1999 *Journal of Natural Resources* **14** 318 (in Chinese) [周广胜, 王玉辉 1999 自然资源学报 **14** 318]
- [14] Li X B, Chen Y H 2002 *Advances in Earth Science* **17** 254 (in Chinese) [李晓兵, 陈云浩 2002 地球科学进展 **17** 254]
- [15] Wang C H, Dong W J, Wei Z G 2001 *Acta Geog. Sin.* **56** 523 (in Chinese) [王澄海, 董文杰, 韦志刚 2001 地理学报 **56** 523]
- [16] Lü X M, Wu S H, Yang Q Y 2003 *Progress in Geography* **22** 260 (in Chinese) [吕新苗, 吴绍洪, 杨勤业 2003 地理科学进展 **22** 260]
- [17] Yang G S, Shi Y F 1995 *Acta Geog. Sin.* **50** 302 (in Chinese) [杨桂山, 施雅风 1995 地理学报 **50** 302]
- [18] Douglas B C 1991 *J. Geo. Phys. Research* **96** 6981
- [19] Pirazzoli PA 1989 *Global and Planetary Change* **1** 241
- [20] Yang G S, Zhu J W 1993 *Advances in Earth Science* **8** 70 (in Chinese) [杨桂山, 朱季文 1993 地球科学进展 **8** 70]
- [21] Li J L, Zhang D F, Yang X P, Tong Y Q, Zhang R S 2005 *J. Catastrophology* **20** 49 (in Chinese) [李加林, 张殿发, 杨晓平, 童亿勤, 张忍顺 2005 灾害学 **20** 49]
- [22] Shi Y F 1996 *Journal of Natural Disasters* **5** 106 (in Chinese) [施雅风 1996 自然灾害学报 **5** 106]
- [23] Ji Z X, Jiang Z X, Zhu J W 1993 *Acta Geog. Sin.* **48** 516 (in Chinese) [季子修, 蒋自巽, 朱季文 1993 地理学报 **48** 516]
- [24] Hou W, Zhang D Q, Zhou Y, Yang P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 109202 (in Chinese) [侯威, 章大全, 周云, 杨萍 2011 物理学报 **60** 109202]
- [25] Feng G L, Yang J, Wan S Q, Hou W, Zhi R 2009 *Acta Meteor. Sin.* **67** 61 (in Chinese) [封国林, 杨杰, 万仕全, 侯威, 支蓉 2009 气象学报 **67** 61]
- [26] Gong Z Q, Wang X J, Zhi R, Feng G L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4342 (in Chinese) [龚志强, 王晓娟, 支蓉, 封国林 2009 物理学报 **58** 4342]
- [27] Wan S Q, Wang L, Feng G L, He W P *Acta Phys. Sin.* **58** 5083 (in Chinese) [万仕全, 王令, 封国林, 何文平 2009 物理学报 **58** 5083]
- [28] Xiong K G, Feng G L, Wang Q G, Hu J G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8107 (in Chinese) [熊开国, 封国林, 王启光, 胡经国 2009 物理学报 **58** 8107]
- [29] Zhang D Q, Yang J, Wang Q G, Feng G L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4354 (in Chinese) [章大全, 杨杰, 王启光, 封国林 2009 物理学报 **58** 4354]
- [30] Da C J, Chou J F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2595 (in Chinese) [达朝究, 丑纪范 2008 物理学报 **57** 2595]
- [31] Da C J, Sun S P, Song J, Yang L G 2011 *Plateau Meteor.* **30** 349
- [32] Dong W J, Chou J M, Feng G L 2007 *Adv. Atmos. Sci.* **24** 336
- [33] Wang B, Weng H Y 1981 *Geophysical Fluid Dynamics* (Beijing: China Ocean Press) pp7-141 (in Chinese) [王斌, 翁衡毅 1981 地球物理流体动力学导论 (北京: 海洋出版社) 第 60—141 页]
- [34] Joseph Pedlosky 1986 *Geophysical Fluid Dynamics* (New York: Springer Verlag) pp7-9
- [35] Da C J 2005 *M. S. Dissertation* (Hohhot: Inner Mongolia University) (in Chinese) [达朝究 2005 硕士学位论文 (呼和浩特: 内蒙古大学)]
- [36] Guo B R B 1990 *the Introduction of Linear and Nonlinear Wave Theory* (Beijing: China Meteorological Press) (in Chinese) [郭秉荣 1990 线性波与非线性波导论 (北京: 气象出版社)]

Dynamic modification of the shallow water equation on the slowly changing underlying surface condition*

Da Chao-Jiu^{1)2)†} Feng Ai-Xia³⁾ Gong Zhi-Qiang³⁾ Song Jian⁴⁾

1) (*School of Mathematics and Computer Science Institute, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730030, China*)

2) (*College of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*)

3) (*Laboratory for Climate Studies, National Climate Center, China Meteorological Administration, Beijing 100081, China*)

4) (*College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010062, China*)

(Received 4 July 2012; revised manuscript received 7 September 2012)

Abstract

In this paper, the shallow water equation is discussed, when the underlying surface is slowly changing. From the continuity equation and the equation of motion controlling the movement of the atmosphere, the slowly changing of the underlying surface is superimposed on the topography function as a small quantity, using the upper and lower boundary conditions of the atmosphere, the modified shallow water equation is obtained. In the modified shallow water equation, the slowly changing local horizontal divergence modifies the equilibrium between the local horizontal divergence and the local change of the thickness of the atmosphere. On the basis of this, the vorticity equation is obtained, which contains the slowly changing underlying surface.

Keywords: underlying surface, global warming, slowly changing, shallow water equation

PACS: 92.40.Cy, 92.60.Aa

DOI: 10.7498/aps.62.039202

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2012CB955902), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40930952, 41175067), the Key Technologies R & D Program of China (Grant No. 2009BAC51B04), the Meteorological Special Project of China (Grant Nos. GYHY201106016, GYHY201206009), the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 2011MS0112) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. zyz2011079).

† Corresponding author. E-mail: jtcej@163.com