

旋转环形浅液池内双组分溶液耦合热 - 溶质毛细对流渐近解*

龚振兴 李友荣[†] 彭岚 吴双应 石万元

(重庆大学动力工程学院, 低品位能源利用技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400044)

(2012年5月31日收到; 2012年9月14日收到修改稿)

为了了解水平温度梯度作用下旋转环形浅液池内耦合热 - 溶质毛细对流基本特征, 采用匹配渐近展开法对旋转环形浅液池内耦合热 - 溶质毛细对流过程进行了求解, 获得了中心区域的速度、温度和浓度分布, 分析了旋转、Soret 效应、浮力、溶质扩散系数和液池的几何尺寸对流动结构的影响. 将所得到的渐近解和文献中的已有结果进行对比, 证明了所求结果的正确性; 在浅液池内, 耦合热 - 溶质毛细力对流体流动起主导作用, 旋转和浮力对流动的影响较小, 溶质扩散系数和几何尺寸有较明显影响; 当各种耦合的驱动力作用方向相同时, 流动增强; 否则, 流动减弱.

关键词: 旋转, 环形浅液池, 耦合热 - 溶质毛细对流, 渐近解

PACS: 02.30.Mv, 44.05.+e, 47.11.-j, 47.55.pf

DOI: 10.7498/aps.62.040201

1 引言

液体的表面张力会随温度和浓度的不同而发生变化, 在双组分混合溶液中, 当自由表面同时存在温度和浓度梯度时, 将会产生表面张力梯度, 从而驱动流体流动, 这种流动通常被称为耦合热 - 溶质毛细对流. 耦合的毛细对流过程广泛存在于晶体生长、合金凝固、混合工质的相变传热等过程中^[1-3].

Bergman^[4] 最先对水平温度梯度和浓度梯度作用下矩形池内耦合热 - 溶质毛细对流进行了数值模拟, 主要讨论了热和溶质毛细力大小相等、方向相反的特殊情况, 研究表明, 当热 Marangoni 数超过临界值时, 流体将由静止状态转变为流动状态. Bergeon 等^[5] 采用二维数值模拟和稳定性分析方法研究了垂直温度梯度作用下矩形池内双组分溶液 Marangoni 对流现象, 分析了 Soret 效应对流动的影响, 结果表明, 当 Soret 效应足够大时, 溶质梯

度驱动的 Marangoni 流动起主导作用, 同时, 讨论了流体流动的分岔现象. Arafune 等^[6,7] 对 Bergman 的研究进行了拓展和完善, 发现了多种流型的存在, 并对流动出现分岔的物理机制进行了解释. Chen 和 Chan^[8] 采用稳定性分析、数值模拟和实验观测相结合的方法研究了腔体内表面张力和浮力驱动的流动稳定性, 得到了流动失稳的临界条件. Cröll 等^[2] 借助实验研究了 Czochralski 法晶体生长过程中锗 - 硅熔体内溶质毛细对流现象, 测定了不同重力水平下熔体的流动速度. Li 等^[9] 和 Chen 等^[10] 对水平温度梯度和浓度梯度作用下矩形池内 Marangoni 对流现象进行了稳定性分析和二维数值模拟, 其主要针对热和溶质毛细力大小相等、方向相反的特殊情况, 获得了流体的流型转变规律, 并分析了物性参数和几何形状对传热和传质速率的影响. 随后, Zhan 等^[11] 在 Li 等^[9] 和 Chen 等^[10] 研究的基础上采用三维数值模拟方法对矩形池内 Marangoni 对流现象、流型的演变以及物

* 国家自然科学基金 (批准号: 51176209) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: liyourong@cqu.edu.cn

性和几何参数对传热传质的影响进行了系统研究. 此外, Li 等^[12]和 Shi 等^[13]对旋转环形液池内的热毛细流动现象也进行了研究, Zheng 等^[14,15]和 Zhang 等^[16]获得了 Marangoni 对流边界层近似解析解. 然而, 对于旋转环形池内水平温度和浓度梯度作用下耦合热 - 溶质毛细对流的研究鲜有报道. 匹配渐近展开法是研究流体流动的一种常用的有效方法. Cormack 和 Leal^[17], Merker 和 Leal^[18], Leppinen^[19]用这种方法求解了两侧边壁具有温度差的矩形和环形浅液池内流体自然对流过程; Li 等^[20-22]将这种方法进行了拓展, 研究了环形单层及双层浅液池内热毛细对流和热毛细 - 浮力对流过程, 获得了中心区域近似解. 本文的目的是采用匹配渐近展开法研究旋转环形浅液池内耦合热 - 溶质毛细对流传过程, 同时分析旋转、Soret 效应、浮力、溶质扩散系数和几何尺寸对流动的影响.

2 物理数学模型

假定环形浅液池内半径为 r_i , 外半径为 r_o , 深度为 h , 宽度为 l , 则 $r_o = r_i + l$. 液池底部为固壁, 顶部为不变形的自由界面, 底部和顶部均绝热, 如图 1 所示. 液池深宽比 $\varepsilon = h/l$, 对于浅液层, $\varepsilon \rightarrow 0$. 记液池几何参量 $\Gamma = r_i/l$, $\delta = r_i/h$, 则 $\Gamma = \varepsilon\delta$. 设液池按逆时针方向绕垂直中心轴旋转, 转速为每分钟 n 转. 内、外壁分别维持恒温 T_C 和 T_h ($T_h > T_C$). 初始时刻液池内溶质浓度分布均匀, 比重较大组分的溶质质量分数为 N_0 , 质量浓度为 S_0 . 为简化起见, 假定: 1) 流体为不可压缩的牛顿流体, 除表面张力和浮力项中的密度外, 所有的物性参数都为常数; 2) 温差 $\Delta T = T_h - T_C$ 较小, 液池转速较低, 流动为轴对称二维稳态层流; 3) 在顶部自由表面考虑热和溶质毛细力作用, 且表面张力是温度和浓度的线性函数; 4) 所有固壁无质量渗透, 且满足无滑移条件; 5) 考虑 Soret 效应的影响, 忽略 Dufour 效应.

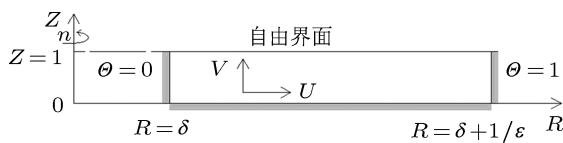


图 1 浅液池的物理模型

分别将 $\varepsilon v/h$, $\rho v^2/h^2$, $T_h - T_C$, $\Delta S = -D_{TS}S_0(1 - N_0)(T_h - T_C)/D$ ($D_{TS} = S_T \cdot D$, S_T 为

Soret 系数) 和 h 作为控制方程的无量纲参考速度、压力、温度、浓度和长度, 并引入无量纲流函数 ψ 和涡量 ω :

$$U = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad V = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad \omega = \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial V}{\partial R}.$$

则无量纲化后的控制方程组为

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \omega}{\partial Z} - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\omega}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) + \frac{2\varepsilon^2}{R} \frac{\partial W}{\partial Z} \\ &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial R} - \frac{\omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Z^2} \\ & - \frac{Gr}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R} + \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial W}{\partial R} - \frac{W}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} - \frac{W}{R^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\omega, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Pr\varepsilon}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Sc\varepsilon}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \Phi}{\partial Z} - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} \\ & - a \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

定义常数 a , 当考虑 Soret 效应时, $a = 1$, 反之 $a = 0$. 相应的无量纲边界条件为

$$\begin{aligned} Z=0: \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0, \\ W &= Re_R \varepsilon R, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Z=1: \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} &= Re_T \frac{\partial \Theta}{\partial R} + Re_S \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R=\delta: \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0, \quad W = Re_R \varepsilon \delta, \\ \Theta &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} - a \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} R=\delta+1/\varepsilon: \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0, \quad W = Re_R \varepsilon (\delta + 1/\varepsilon), \\ \Theta &= 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} - a \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, R 和 Z 分别为无量纲坐标; U , V 和 W 分别为无量纲的径向、轴向和周向速度. 上述各式中其他

无量纲量定义如下:

$$\begin{aligned}\Theta &= (T - T_C)/(T_h - T_C), \quad \Phi = (S - S_0)/\Delta S, \\ Pr &= \nu/\alpha, \quad Sc = \nu/D, \quad Gr = g\beta_T h^3 (T_h - T_C)/\nu^2, \\ \varphi &= \beta_S \Delta S / \beta_T (T_h - T_C), \quad Re_R = 2\pi n l^2 / 60\nu, \\ Re_T &= \gamma_T l (T_h - T_C) / (\mu\nu), \quad Re_S = \gamma_S l \Delta S / (\mu\nu),\end{aligned}$$

其中, Θ 为无量纲温度, Φ 为无量纲浓度, Pr 为普朗特数, Sc 为施密特数, Gr 为格拉晓夫数, φ 为浓度不均匀和温度不均匀引起的浮力比, Re_R 为旋转毛细雷诺数, Re_T 和 Re_S 分别为热毛细雷诺数和溶质毛细雷诺数, ν , α 和 D 分别为流体的运动黏度系数、热扩散率和质量扩散率; $\beta_T = -\rho_0^{-1} \partial \rho / \partial T$ 和 $\beta_S = -\rho_0^{-1} \partial \rho / \partial S$ 分别为温度和浓度体积膨胀系数; $\gamma_T = -\partial \sigma / \partial T$ 和 $\gamma_S = -\partial \sigma / \partial S$ 分别为表面张力温度和浓度系数; μ 为流体动力黏度系数.

3 近似解求解过程

3.1 中心区域近似解

在物理模型中, 当深宽比 $\varepsilon \rightarrow 0$, 有 $\Gamma = \varepsilon \delta = r_i/l = O(1)$. 为方便计算, 无量纲方程中的变量 R 用 $\delta + X$ 代替, 则 $1/R = 1/(\delta + X) = \varepsilon/(\Gamma + \varepsilon X)$, 同时, 做如下变换: $\hat{\psi} = \varepsilon \psi$, $\hat{X} = \varepsilon X$, $\hat{\omega} = \omega$, $\hat{W} = W$, $\hat{\Theta} = \Theta$ 和 $\hat{\Phi} = \Phi$, 并分别按 $(\hat{\psi}, \hat{\omega}, \hat{W}, \hat{\Theta}, \hat{\Phi}) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (\hat{\psi}_i, \hat{\omega}_i, \hat{W}_i, \hat{\Theta}_i, \hat{\Phi}_i)$ 展开, 代入到各控制方程和边界条件中, 得到各阶控制方程和相应的边界条件.

零阶控制方程和边界条件如下:

$$\frac{\partial^2 \hat{\omega}_0}{\partial Z^2} = Gr \left(\frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}} + \varphi \frac{\partial \hat{\Phi}_0}{\partial \hat{X}} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{W}_0}{\partial Z^2} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\Gamma + \hat{X}} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_0}{\partial Z^2} = -\hat{\omega}_0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Theta}_0}{\partial Z^2} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}_0}{\partial Z^2} - a \frac{\partial^2 \hat{\Theta}_0}{\partial Z^2} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}Z=0: \quad \hat{\psi}_0 &= \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial Z} = \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial Z} = \frac{\partial \hat{\Phi}_0}{\partial Z} = 0, \\ \hat{W}_0 &= Re_R (\Gamma + \hat{X}),\end{aligned} \quad (15)$$

$$Z=1: \quad \hat{\psi}_0 = \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial Z} = \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial Z} = \frac{\partial \hat{\Phi}_0}{\partial Z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_0}{\partial Z^2} = 0. \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\text{令 } Gr \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}} &= \frac{a_{T0}}{\Gamma + \hat{X}}, \quad Gr \varphi \frac{\partial \hat{\Phi}_0}{\partial \hat{X}} = \frac{a_{S0}}{\Gamma + \hat{X}}, \text{ 则} \\ Gr \left(\frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}} + \varphi \frac{\partial \hat{\Phi}_0}{\partial \hat{X}} \right) &= \frac{a_0}{\Gamma + \hat{X}},\end{aligned} \quad (17)$$

其中 $a_0 = a_{T0} + a_{S0}$, 均为与 $\hat{X}$ 有关的参数.

由零阶控制方程和边界条件可以求得:

$$\hat{\psi}_0 = -a_0 \left(\frac{1}{24} Z^4 - \frac{5}{48} Z^3 + \frac{1}{16} Z^2 \right), \quad (18)$$

$$\hat{\omega}_0 = \frac{a_0}{\Gamma + \hat{X}} \left(\frac{1}{2} Z^2 - \frac{5}{8} Z + \frac{1}{8} \right), \quad (19)$$

$$\hat{W}_0 = Re_R (\Gamma + \hat{X}), \quad (20)$$

$$\frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}} = \frac{a_{T0}}{Gr (\Gamma + \hat{X})}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_0}{\partial \hat{X}} = \frac{a_{S0}}{Gr \varphi (\Gamma + \hat{X})}. \quad (22)$$

二阶能量方程如下:

$$\begin{aligned}\frac{Pr}{\Gamma + \hat{X}} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial \hat{X}} \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial Z} - \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial Z} \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}} \right) \\ = \frac{\partial^2 \hat{\Theta}_2}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}^2} + \frac{1}{\Gamma + \hat{X}} \frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}}.\end{aligned} \quad (23)$$

将 $\hat{\psi}_0$ 和 $\frac{\partial \hat{\Theta}_0}{\partial \hat{X}}$ 代入, 同时将等式两边从 $Z=0$ 到 $Z=1$ 分别进行积分, 利用二阶边界条件 $\left(\frac{\partial \hat{\Theta}_2}{\partial Z} \right)_{Z=0} = 0$ 和 $\left(\frac{\partial \hat{\Theta}_2}{\partial Z} \right)_{Z=1} = 0$, 可以得到:

$$\frac{1}{Gr (\Gamma + \hat{X})} \frac{\partial a_{T0}}{\partial \hat{X}} = 0, \quad (24)$$

因此, a_{T0} 为常数. 同理, 根据二阶传质方程和边界条件也可证明 a_{S0} 为常数.

对 (21) 和 (22) 式积分得到

$$\hat{\Theta}_0 = \frac{a_{T0}}{Gr} \ln(\Gamma + \hat{X}) + d_{T0}, \quad (25)$$

$$\hat{\Phi}_0 = \frac{a_{S0}}{\varphi Gr} \ln(\Gamma + \hat{X}) + d_{S0}, \quad (26)$$

积分常数 d_{T0} 和 d_{S0} 在与边界区域的匹配时确定.

运用相同的方法可以求得其余各阶近似解, 其中相应的未知积分常数可通过与边壁区域的匹配求得.

3.2 与边壁区域的匹配

边壁区域的无量纲流函数、涡量、周向速度、温度和浓度分别用 $\tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{W}, \tilde{\Theta}$ 和 $\tilde{\Phi}$ 来表示, 为方便起见, 做如下变换: $\tilde{\psi} = \varepsilon\psi, \tilde{\omega} = \omega, \tilde{W} = W, \tilde{\Theta} = \Theta, \tilde{\Phi} = \Phi$, 则中心区域与边壁区域匹配条件为 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \lim_{\hat{x} \rightarrow \infty} (\tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{W}, \tilde{\Theta}, \tilde{\Phi})_{\text{core}} \\ & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\psi, \omega, W, \Theta, \Phi)_{\text{cold}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\hat{x} \rightarrow 1} (\tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{W}, \tilde{\Theta}, \tilde{\Phi})_{\text{core}} \\ & \Leftrightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\psi, \omega, W, \Theta, \Phi)_{\text{hot}}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\xi = 1/\varepsilon - X$.

由此可以求得:

$$a_{T0} = \frac{Gr}{\ln \frac{\Gamma+1}{\Gamma}}, \quad (29a)$$

$$d_{T0} = -\frac{\ln \Gamma}{\ln \frac{\Gamma+1}{\Gamma}}; \quad (29b)$$

由零阶边界条件得

$$a_{S0} = \varphi a a_{T0} = \varphi a Gr / \ln[(\Gamma+1)/\Gamma], \quad (29c)$$

由于 $a_0 = a_{T0} + a_{S0}$, 因此, $a_0 = \frac{Gr(1+\varphi a)}{\ln[(\Gamma+1)/\Gamma]}$.

当不考虑 Soret 效应时, $a = 0$, 此时, 环形液池内容质分布均匀, $\hat{\Phi}_0 = 0$, 并且 d_{S0} 是与 a 无关的常数, 故 $d_{S0} = 0$. 其他阶中的积分常数亦用相同阶次下的匹配条件求得.

3.3 中心区域解

将各系数代入到中心区域各阶近似解中, 便可完整地写出中心区域的渐近解, 结合流函数的定义, 可得到中心区域温度、浓度和速度分布为

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{\ln \frac{\Gamma + \varepsilon X}{\Gamma}}{\ln \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}} + \varepsilon^2 \left[\frac{PrGr(1+\varphi a)}{(\Gamma + \varepsilon X)^2 (\ln((\Gamma+1)/\Gamma))^2} \left(\frac{Z^5}{120} - \frac{5Z^4}{192} + \frac{Z^3}{48} - \frac{1}{720} \right) + \frac{19Pr^2Gr^2(1+\varphi a)^2}{2903040} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^4 \left(\frac{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)}{(\Gamma + \varepsilon X)^2} + \frac{\ln \frac{\Gamma + \varepsilon X}{\Gamma + 1}}{\Gamma^2} - \frac{\ln \frac{\Gamma + \varepsilon X}{\Gamma}}{(\Gamma + 1)^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{a \ln(\Gamma + \varepsilon X)}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} + \varepsilon^2 \left[\frac{aGr(1+\varphi a)(Pr+Sc)}{(\Gamma + \varepsilon X)^2 (\ln((\Gamma+1)/\Gamma))^2} \left(\frac{Z^5}{120} - \frac{5Z^4}{192} + \frac{Z^3}{48} - \frac{1}{720} \right) \right. \\ & \left. + \frac{19aSc(Pr+Sc)Gr^2(1+\varphi a)^2}{2903040} \left(\frac{1}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^4 \left(\frac{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)}{(\Gamma + \varepsilon X)^2} + \frac{\ln \frac{\Gamma + \varepsilon X}{\Gamma + 1}}{\Gamma^2} - \frac{\ln \frac{\Gamma + \varepsilon X}{\Gamma}}{(\Gamma + 1)^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} U = & \frac{Gr(1+\varphi a)}{(\Gamma + \varepsilon X) \ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \left(\frac{1}{6}Z^3 - \frac{5}{16}Z^2 + \frac{1}{8}Z \right) - \frac{\varepsilon}{4(\Gamma + \varepsilon X) \ln((\Gamma+1)/\Gamma)} (Re_T + Re_S)(3Z^2 - 2Z) \\ & - \frac{2\varepsilon^2 Gr^2(1+\varphi a)^2}{(\Gamma + \varepsilon X)^3} \left(\frac{1}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^2 \frac{1}{8!} \left(10Z^8 - 50Z^7 + \frac{749}{8}Z^6 - \frac{315}{4}Z^5 + \frac{105}{4}Z^4 - \frac{41}{24}Z^2 + \frac{5}{12}Z \right) \\ & - \frac{2\varepsilon^2 Gr^2(1+\varphi a)}{(\Gamma + \varepsilon X)^3} [Pr + \varphi a(Pr+Sc)] \left(\frac{1}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^2 \frac{1}{8!} \left(Z^8 - 5Z^7 + 7Z^6 - \frac{28}{3}Z^3 + \frac{335}{48}Z^2 - \frac{23}{24}Z \right) \\ & - \varepsilon^2 \left\{ \frac{19(1+\varphi a)^2}{1451520} \left(\frac{Gr}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^3 [Pr^2 + \varphi aSc(Pr+Sc)] \left[\frac{1}{(\Gamma + \varepsilon X)^3} - \frac{1}{2(\Gamma + \varepsilon X)} \right] \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{\Gamma^2} - \frac{1}{(\Gamma+1)^2} \right) / \ln \frac{\Gamma+1}{\Gamma} \right\} \left(\frac{Z^3}{6} - \frac{5Z^2}{16} + \frac{Z}{8} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} V = & -\frac{4\varepsilon^3 Gr^2(1+\varphi a)^2}{(\Gamma + \varepsilon X)^4} \left(\frac{1}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^2 \frac{1}{8!} \left(\frac{10}{9}Z^9 - \frac{25}{4}Z^8 + \frac{107}{8}Z^7 - \frac{105}{8}Z^6 + \frac{21}{4}Z^5 - \frac{41}{72}Z^3 + \frac{5}{24}Z^2 \right) \\ & - \frac{4\varepsilon^3 Gr^2(1+\varphi a)}{(\Gamma + \varepsilon X)^4} [Pr + \varphi a(Pr+Sc)] \left(\frac{1}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^2 \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{9}Z^9 - \frac{5}{8}Z^8 + Z^7 - \frac{7}{3}Z^4 + \frac{335}{144}Z^3 - \frac{23}{48}Z^2 \right) \end{aligned}$$

$$- \frac{19(1+\varphi a)^2}{1451520} \left(\frac{Gr\varepsilon}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \right)^3 [Pr^2 + \varphi a Sc(Pr + Sc)] \frac{1}{(\Gamma + \varepsilon X)^4} \left(\frac{Z^4}{12} - \frac{5Z^3}{24} + \frac{Z^2}{8} \right), \quad (33)$$

$$W = Re_R(\Gamma + \varepsilon X) + \frac{2\varepsilon^2 Gr(1+\varphi) Re_R}{\ln((\Gamma+1)/\Gamma)} \frac{1}{\Gamma + \varepsilon X} \left(\frac{1}{120} Z^5 - \frac{5}{192} Z^4 + \frac{1}{48} Z^3 \right). \quad (34)$$

采用此方法可以得到更高阶的解析解, 但解的表达式非常复杂, 并且 ε 是一个趋于零的小量, 更高阶的项对浅液池内温度、浓度和速度分布的影响很小, 可以忽略, 所以, 这里只给出了二阶近似解析解.

4 结果分析与讨论

当忽略液池旋转及 Soret 效应时, 由于所有固壁无质量渗透, 故此时液池内的浓度分布是均匀的, 此时的对流过程为无旋转的热毛细 - 浮力对流过程. 在上述解中, 令 $n = 0$, $a = 0$, 则可得到与 Li 等 [21] 的研究完全一致的结果.

当忽略浮力时, 旋转环形浅液池内耦合热 - 溶质毛细对流过程相对比较简单, 可以采用类似方法求得二阶以上的解. 例如, 包含三阶的中心区域温度、浓度和速度分布:

$$\Theta = \frac{\ln \frac{\Gamma + \varepsilon X}{\Gamma}}{\ln \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}} - \frac{(Re_T + a Re_S) Pr}{\left(\ln \frac{\Gamma + 1}{\Gamma} \right)^2} \frac{\varepsilon^3}{(\Gamma + \varepsilon X)^2} \times \left(\frac{Z^4}{16} - \frac{Z^3}{12} + \frac{1}{120} \right), \quad (35)$$

$$\Phi = \frac{a \ln(\Gamma + \varepsilon X)}{\ln \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}} - \frac{a(Re_T + a Re_S)(Sc + Pr)}{\left(\ln \frac{\Gamma + 1}{\Gamma} \right)^2} \times \frac{\varepsilon^3}{(\Gamma + \varepsilon X)^2} \left(\frac{Z^4}{16} - \frac{Z^3}{12} + \frac{1}{120} \right), \quad (36)$$

$$U = - \frac{(Re_T + a Re_S)}{\ln \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}} \frac{\varepsilon}{\Gamma + \varepsilon X} \left(\frac{3Z^2}{4} - \frac{Z}{2} \right), \quad (37)$$

$$V = 0, \quad (38)$$

$$W = Re_R(\Gamma + \varepsilon X) - \frac{Re_R(Re_T + Re_S)}{\ln \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}} \times \frac{\varepsilon^3}{\Gamma + \varepsilon X} \left(\frac{Z^4}{8} - \frac{Z^3}{6} \right). \quad (39)$$

当 $n = 0$, $a = 0$ 时, 液池无旋转, 且内部溶质分布均匀. 上述结果与 Li 等 [20] 得到的环形浅液池内纯热毛细对流的近似解完全一致, 由此可以证明以上所得结果的正确性.

边壁区域流动结构非常复杂, 采用匹配渐近展开法很难求得控制方程在边壁区域的渐近解, 根据 Leppinen [19], Sen 和 Davis [23] 的研究可知, 对于边壁区域的流动结构、温度和浓度分布只能通过数值方法获得.

温度、浓度和速度的分布表达式中不包含旋转雷诺数, 它应该包含在更高阶的项中, 高阶项对浅液池内的近似解影响很小, 可忽略不计, 因此, 低转速对液池内温度、浓度、径向和轴向速度分布基本没有影响, 这与 Shi 等 [13] 所研究的旋转环形液池内热毛细对流的结论一致, 即较低转速对轴对称的稳态毛细流动过程中的温度和径向速度分布基本没有影响.

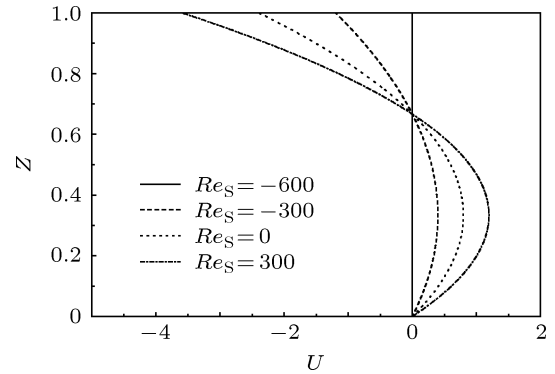


图2 耦合的毛细力对无量纲径向速度分布的影响 ($\varepsilon = 1/50$, $\Gamma = 1/5$, $Pr = 5$, $Sc = 500$, $Re_R = 1$, $Re_T = 600$, $Gr = 0$, $\varphi = 0$)

为了分析热毛细力、溶质毛细力的耦合效应, 进行如下工况的计算: $\varepsilon = 1/50$, $\Gamma = 1/5$, $Pr = 5$, $Sc = 500$, $Re_R = 1$, $Re_T = 600$, $Gr = 0$ 和 $\varphi = 0$. 图2给出了忽略浮力影响时, 耦合热 - 溶质毛细力对中心截面 ($R = \delta + 1/2\varepsilon$) 处流体径向速度分布的影响, 当忽略 Soret 效应时, 液池内浓度分布均匀 $Re_S = 0$, 此时为纯热毛细流动过程, 自由表面上流体由外壁高温区向内壁低温区流动, 回流出现在液池底部附近; 当溶质毛细力方向与热毛细力方向相同时, 流动增强, 否则, 流动减弱; 当 $Re_S = -600$ 时, 热毛细力和溶质毛细力正好相互抵消, 流体处于静止状态, 因此, 速度总是为零. 溶质毛细力的大小与 Soret 效应和液池内初始浓度有关, 由浓度差

$\Delta S = -D_{TS}S_0(1 - N_0)(T_h - T_c)/D$ 的定义可知, 当初始时刻液池内质量分数增大时, Soret 效应引起液池内水平方向上溶质浓度梯度增加, 溶质毛细力增大, 从而增强 (热毛细力与溶质毛细力同向) 或减弱 (两种力反向) 流体流动.

图 3 给出了在温度不均匀引起的浮力恒定的情况下, 不同浮力比 φ 对中心截面径向速度分布的影响. 图 3 中 $\varphi = 0$ 为忽略浓度不均匀引起的浮力, 仅考虑温度不均匀引起的浮力时中心截面上的径向速度分布; $\varphi = -1$ 和 $\varphi = 1$ 分别表示两种浮力方向相反和相同的情况. 对比图 2 中 $Re_S = 600$ ($Gr = 0$) 与图 3 中的径向速度分布, 可以发现: 由于耦合的热 - 溶质毛细力对流体流动起主导作用, 浮力对流动强度的影响较小, 在计算工况下, 由于温度不均匀引起的浮力总是增强流体流动, 因此, 两种浮力方向相同时, 流动增强, 方向相反时, 流动减弱.

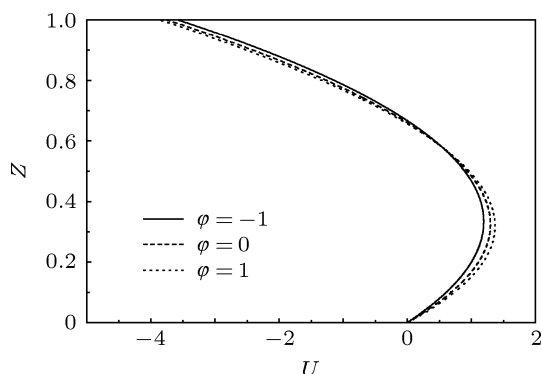


图 3 耦合的浮力对无量纲径向速度分布的影响 ($\epsilon = 1/50$, $\Gamma = 1/5$, $Pr = 5$, $Sc = 500$, $Re_R = 1$, $Re_T = 600$, $Re_S = 300$, $Gr = 10$)

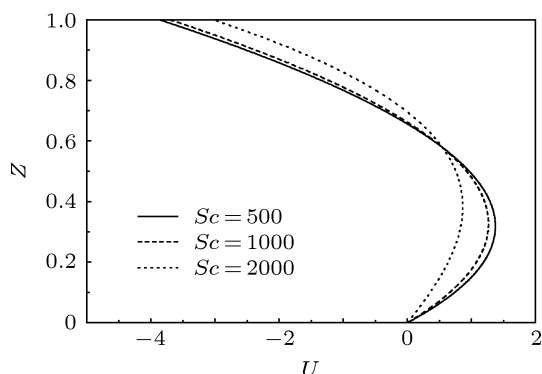


图 4 施密特数对无量纲径向速度分布的影响 ($\epsilon = 1/50$, $\Gamma = 1/5$, $Pr = 5$, $Re_R = 1$, $Re_T = 600$, $Re_S = 300$, $Gr = 10$, $\varphi = 1$)

图 4 给出了普朗特数 Pr 恒定时, 不同施密特数 Sc 下中心截面的径向速度分布. 毛细雷诺数恒

定时, 施密特数越大, 溶质扩散速率越小, 液池内水平方向上 Soret 效应引起的浓度梯度越小, 因此, 流动强度随施密特数的增大而减弱.

液池几何尺寸对流动的影响如图 5 所示, 显然, 相同的毛细雷诺数下, 液池宽度越大, 径宽比 $\Gamma = r_1/l$ 和深宽比 $\epsilon = h/l$ 越小, 液池内水平方向上温度梯度和浓度梯度越小, 因此, 流动减弱; 相反, 液池宽度越小, 流动增强.

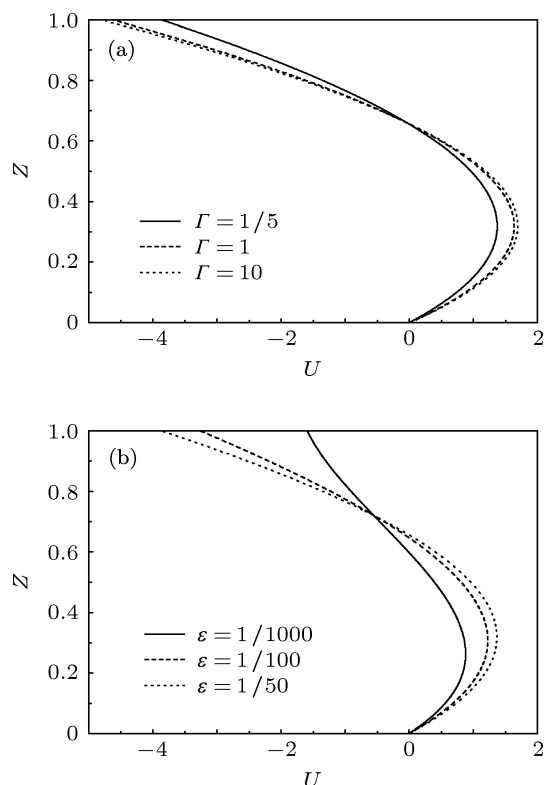


图 5 几何尺寸对无量纲径向速度分布的影响 (a) 径宽比的影响 ($\epsilon = 1/50$); (b) 深宽比的影响 ($\Gamma = 1/5$); ($Pr = 5$, $Sc = 500$, $Re_R = 1$, $Re_T = 600$, $Re_S = 300$, $Gr = 10$, $\varphi = 1$)

由以上分析可知: 温差引起的表面张力梯度驱动的热毛细对流占主导地位; 对于大多数双组分溶液而言, Soret 效应相对较小, 因此, Soret 效应引起的溶质毛细对流相比热毛细对流较弱; 浮力对流相比毛细对流更弱; 旋转对流动的影响很小, 可忽略不计.

5 结论

采用匹配渐近展开法求得了水平温度梯度作用下旋转环形浅液池内耦合热 - 溶质毛细对流中心区域的近似解析解. 结果表明: 耦合的热毛细力和溶质毛细力对流动过程起主导作用, 低转速和浮力

对流动的影响较小, 而溶质扩散系数和几何尺寸对流体流动有较明显的影响; 当耦合的浮力和毛细力

作用方向相同时, 流动增强, 相反时流动减弱.

-
- [1] Schwabe D, Scharmann A, Preisser F, Oeder R 1978 *J. Cryst. Growth* **43** 305
- [2] Cröll A, Mitric A, Aniol O, Schütt S, Simon P 2009 *Cryst. Res. Technol.* **44** 1101
- [3] Wang J S, Yan J J, Hu S H, Liu J P 2009 *Int. J. Heat Mass Transfer* **52** 1533
- [4] Bergman T L 1986 *Phys. Fluids* **29** 2103
- [5] Bergeon A, Henry D, Benhadid L H, Tuckerman L S 1998 *J. Fluid Mech.* **375** 143
- [6] Arafune K, Hirata A 1998 *Numerical Heat Transfer A* **44** 421
- [7] Arafune K, Yamamoto K, Hirata A 2001 *Int. J. Heat Mass Transfer* **44** 2405
- [8] Chen C F, Chan C L 2010 *Int. J. Heat Mass Transfer* **53** 1563
- [9] Li Y S, Chen Z W, Zhan J M 2010 *Int. J. Heat Mass Transfer* **53** 5223
- [10] Chen Z W, Li Y S, Zhan J M 2010 *Phys. Fluids* **22** 0341006
- [11] Zhan J M, Chen Z W, Li Y S, Nie Y H 2010 *Phys. Rev. E* **82** 066305
- [12] Li Y R, Wu C M, Wu S Y, Peng L 2009 *Phys. Fluids* **21** 084102
- [13] Shi W Y, Ermakov M K, Imaishi N 2006 *J. Cryst. Growth* **294** 474
- [14] Zheng L C, Sheng X Y, Zhang X X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5298 (in Chinese) [郑连存, 盛晓艳, 张欣欣 2006 物理学报 **55** 5298]
- [15] Zheng L C, Feng Z F, Zhang X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1549 (in Chinese) [郑连存, 冯志丰, 张欣欣 2007 物理学报 **56** 1549]
- [16] Zhang Y, Zheng L C, Zhang X X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5506 (in Chinese) [张艳, 郑连存, 张欣欣 2009 物理学报 **58** 5506]
- [17] Cormack D E, Leal L G 1974 *J. Fluid Mech.* **65** 209
- [18] Merker G P, Leal L G 1980 *Int. J. Heat Mass Transfer* **23** 677
- [19] Leppinen D M 2002 *Int. J. Heat Mass Transfer* **45** 2967
- [20] Li Y R, Zhao X X, Wu S Y, Peng L 2008 *Phys. Fluids* **20** 082107
- [21] Li Y R, Ouyang Y Q, Wang S C, Wu S Y 2010 *J. Eng. Thermophys.* **31** 1921 (in Chinese) [李友荣, 欧阳玉清, 王双成, 吴双应 2010 工程热物理学报 **31** 1921]
- [22] Li Y R, Wang S C, Wu S Y, Peng L 2010 *Microgravity Sci. Technol.* **22** 193
- [23] Sen A K, Davis S H 1982 *J. Fluid Mech.* **12** 163

Asymptotic solution of thermal-solutal capillary convection in a slowly rotating shallow annular pool of two components solution^{*}

Gong Zhen-Xing Li You-Rong[†] Peng Lan Wu Shuang-Ying Shi Wan-Yuan

(Key Laboratory of Low-grade Energy Utilization Technologies and Systems of Ministry of Education, College of Power Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

(Received 31 May 2012; revised manuscript received 14 September 2012)

Abstract

In order to understand the characteristics of the coupled thermal and solutal capillary convection with the radial temperature gradient in a slowly rotating shallow annular pool with the free surface, the asymptotic solution is obtained in the core region using asymptotical analysis in the limit as the aspect ratio, which is defined as the ratio of the layer thickness to the gap width, goes to zero. The influences of the rotating, Soret effect, solute diffusion coefficient, buoyant force and geometric parameters on fluid flow are analyzed. The results show that when the rotating and the solutal capillary force and the buoyancy induced by the ununiform distribution of solute concentration are not considered, the asymptotic solution is the same as that of the previous work. The influences of the rotating, the buoyancy, solute diffusion coefficient and the geometric parameters on the fluid flow are all small and the coupled thermal and solutal capillary forces play a dominant role in the convection. When the coupled forces are in the same direction, the flow is reinforced, otherwise, the flow is suppressed.

Keywords: rotating, shallow annular pool, coupled thermal and solutal capillary convection, asymptotic solution

PACS: 02.30.Mv, 44.05.+e, 47.11.-j, 47.55.pf

DOI: 10.7498/aps.62.040201

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51176209).

[†] Corresponding author. E-mail: liyourong@cqu.edu.cn