

一类三次方对称离散混沌系统的分岔控制*

张惠^{1)†} 褚衍东²⁾ 丁旺才¹⁾ 李险峰²⁾³⁾

1) (兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

2) (兰州交通大学数学系, 兰州 730070)

3) (香港城市大学土木与建筑工程系, 香港)

(2012年8月5日收到; 2012年9月26日收到修改稿)

通过分析对称性破缺分岔机制, 采用了一个直接的、有效的线性控制器, 精确控制了一类三次方对称离散混沌系统发生对称性破缺分岔和倍周期分岔时分岔点的位置. 进而分析了系统对初始值的敏感性和对称性, 选择合适的吸引域, 将对称性破缺分岔进行进一步控制, 从而使得对称性破缺分岔所缺解枝得以恢复. 数值结果表明了该控制器的有效性.

关键词: 离散混沌系统, 对称性破缺, 倍周期, 分岔控制

PACS: 02.30.Oz, 05.45.Gg, 05.45.Pq, 07.05.Tp

DOI: 10.7498/aps.62.040202

1 引言

近几年来, 随着分岔理论和应用的快速发展, 分岔分析和分岔控制得到了国内外研究者的重视和进一步的发展. 分岔控制的主旨是设计一个控制器去改变非线性动力系统的分岔特性^[1,2]. 控制器既可以选择静态的或者动态的反馈控制器, 也可以选取开环控制器等^[3]. 分岔控制研究内容包括控制分岔策略^[4]和分岔反控制策略^[5-7]以及在控制系统、电力系统、电子系统以及机械系统中的应用等^[2]. 分岔控制的主要目标有消除分岔^[8-10]、改变分岔点的参数值^[11-14]、通过分岔控制或分岔反控制来实现混沌控制和反控制^[15-17]; 另外也可选择合适的控制器产生新的分岔类型^[18], 或改变分岔的性质^[19-21]. 目前, 分岔控制已经取得丰硕的成果, 尤其是在控制倍周期分岔^[22]、鞍结分岔^[23-26]和 Hopf 分岔^[27-29]等方面, 大量文献涌现.

本文通过分析一类三次方对称离散混沌系统发生对称性破缺分岔机制, 应用一个直接的、有效的线性控制器来精确控制发生对称性破缺分岔和

倍周期分岔时分岔点的位置, 提前或延迟待控分岔点的定时和定点出现, 并保证分岔点之间的距离保持不变. 进而分析了系统对初始值的敏感性和对称性, 选择合适的吸引域, 可以将对称性破缺分岔进一步控制, 从而使得系统所缺解枝在对称性恢复 (symmetry-restoring) 点前, 吸引子的对称性得以“即时性地”恢复.

2 对称性破缺分岔机制

对称性和对称性破缺都是非常普遍的自然现象^[30], 并且二者总是在相互联系和补充、相互依赖和转化中表现出来^[31]. 近些年来, 尤其是在物理学、生物学、社会学与系统论等交叉学科中, 对称性和对称性破缺得到了最为广泛的研究和应用^[31]. 对称性普遍存在于各个尺度下的系统中, 但是一个完全对称性系统极不稳定, 一旦受到微扰, 系统固有的或保持的某种对称性就会被打破, 从而系统进入非对称态, 即发生对称性破缺. 具体到一个确定性动力系统, 如果在某临界点处以后的一定的参数区域内, 系统的吸引子不再保持系统固有的某种对

* 国家自然科学基金 (批准号: 11161027, 11162007)、甘肃省自然科学基金 (批准号: 1010RJZA067) 和兰州交通大学青年科学基金 (批准号: 2011026) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhanghui_nice@163.com

称性, 则称该系统在临界点处发生了对称性破缺分岔 [32-35]. 对于对称性破缺分岔的研究非常重要, 因为在一个对称的非线性动力系统中, 对称性破缺分岔往往是倍周期分岔的前兆, 而倍周期分岔又是快速通向混沌的最为典型和普遍的途径之一.

在 n 维欧氏空间中, 考虑一个依赖于控制 (或称为分岔) 参数 a 的离散动力系统:

$$f(x, a) : x \mapsto f(x, a), x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

其中 f 是关于变量 x 和控制参数 a 的光滑或非光滑映射. 在局部分岔意义下 [35-37], 如果在某点 (x^0, a_c) , 关于此点的偏导矩阵 $\partial f_{x^0, a_c}$ 有一个特征值的模数等于 1, 则称系统在点 (x^0, a_c) 处发生局部分岔. 并且特征值等于 1 时, 有可能发生折叠分岔, 也有可能是叉式分岔; 如果等于 -1 , 则发生倍周期分岔. 而系统 (1) 发生对称性破缺分岔处的特征值也等于 1 [38], 要区别折叠分岔和叉式分岔, 必须遵循下面三个步骤: 1) 分析系统固有的对称性; 2) 分析系统在分岔点前后的稳定解的性质, 进而判断分岔类型; 3) 在固有的对称性意义下, 分析系统吸引域的对称性.

考虑如下的一类一维三次离散混沌系统:

$$f(x, a) : x \mapsto ax^3 + (1-a)x, \quad (2)$$

其中 a 为控制参数. 系统 (2) 具有对称性, 即 $f(x, a) = f(-x, a)$. 并且系统 (2) 的周期 1 稳定解枝为 $x=0$, 也为系统 (2) 的三个不动点 $0, \pm 1$ (在分岔参数 $a > 0$ 时始终不稳定) 之一. 由此可知系统 (2) 的周期 1 稳定参数范围为

$$\left| \frac{\partial f(x, a)}{\partial x} \right|_{x^0=0} = |3ax^2 + (1-a)|_{x^0=0} < 1, \quad (3)$$

$$a < 2. \quad (4)$$

当控制参数 $a = a_c = 2$ 时, $\left| \frac{\partial f(x, a)}{\partial x} \right|_{x^0=0} = -1$, 发生倍周期分岔. 记系统 (2) 的二次映射为 $f^2(x, a) = f(f(x, a), a)$, 即

$$f^2(x, a) : x \mapsto a(f(x, a))^3 + (1-a)f(x, a). \quad (5)$$

系统 (5) 是一个 9 次方的离散动力系统, 依旧保持对称性, 即 $f^2(x, a) = f^2(-x, a)$.

系统 (2) 的周期 2 解, 也就是系统 (5) 的不动点, 其代数方程为

$$x = a(f(x, a))^3 + (1-a)f(x, a). \quad (6)$$

求解不动点方程 (6), 可得系统 (2) 的周期 2 解枝有三组, 分别为:

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a(a-2)}, \quad (7)$$

$$x_{3,4} = \left(\sqrt{-\frac{\sqrt{a^2-2a-3}-a+1}{2a}}, \right. \\ \left. -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-2a-3}+a+1}{2a}} \right), \quad (8)$$

$$x_{5,6} = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-2a-3}+a-1}{2a}}, \right. \\ \left. -\sqrt{-\frac{\sqrt{a^2-2a-3}-a+1}{2a}} \right). \quad (9)$$

分别将系统 (2) 的周期 2 解枝代入到系统 (5) 关于解 x 的偏导方程

$$\frac{\partial f^2(x, a)}{\partial x} = [3a(ax^3 + (1-a)x)^2 + (1-a)] \\ \times (3ax^2 + 1 - a) \quad (10)$$

中, 周期 2 解枝 $x_{1,2}, x_{3,4}$ 和 $x_{5,6}$ 的稳定参数范围为

$$\left| \frac{\partial f^2(x, a)}{\partial x} \right| < 1, \quad (11)$$

由此可得解枝 $x_{1,2}$ 的稳定参数范围为 $a \in (2, 3)$, 而解枝 $x_{3,4}$ 和 $x_{5,6}$ 的稳定参数范围同为 $a \in (3, 1 + \sqrt{5})$. 并且在参数 $a = 3$ 处, 有

$$\frac{\partial f^2(x, a)}{\partial x} = 1, \quad (12)$$

这就意味着, 虽然 $f^2(x, a)$ 在临界点 $a = a_c = 3$ 处发生了分岔, 但是系统的稳定解枝的个数并没有发生变化. 因为既然都是系统 (2) 的周期 2 的解枝, 解枝 $x_{3,4}$ 和 $x_{5,6}$ 不但都失去了对称性, 而且不能在相同的稳定参数区间内同时出现. 这时称解枝 $x_{3,4}$ 和 $x_{5,6}$ 为共轭周期 2 解枝, 至于哪一组出现依赖于初始值. 这就排除了发生折叠分岔或叉式分岔的可能性.

引入辅助复函数 $z = x + iy$, 其中 i 为虚数单位:

$$g(z, a) : \begin{cases} z \mapsto az^3 + (1-a)z \\ z = x + iy \end{cases}. \quad (13)$$

利用实部和虚部分别对应原则, 将一维离散系统 (2) 重构成如下二维实系统:

$$g(x, y, a) : \begin{cases} x \mapsto x^3 - 3xy^2 + (1-a)x \\ y \mapsto 3yx^2 - y^3 + (1-a)y \end{cases}. \quad (14)$$

显然, $g(x, y, a)$ 在实数域内关于变量 x, y 具有以下四种对称性, 即

$$\begin{aligned} g(x, y, a) &= g(y, x, a), \\ g(x, y, a) &= g(-x, -y, a), \\ g(x, y, a) &= g(-x, y, a), \\ g(x, y, a) &= g(x, -y, a). \end{aligned} \quad (15)$$

以上四种对称性表明系统 (2) 的吸引域具有强烈的中心对称性. 选择控制参数 a 分别为 3.05, 3.1, 3.2 时, 利用逃逸时间算法 [39-41], 绘制出系统 (2) 的逃逸吸引域, 其中 $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$, 如图 1 所示.

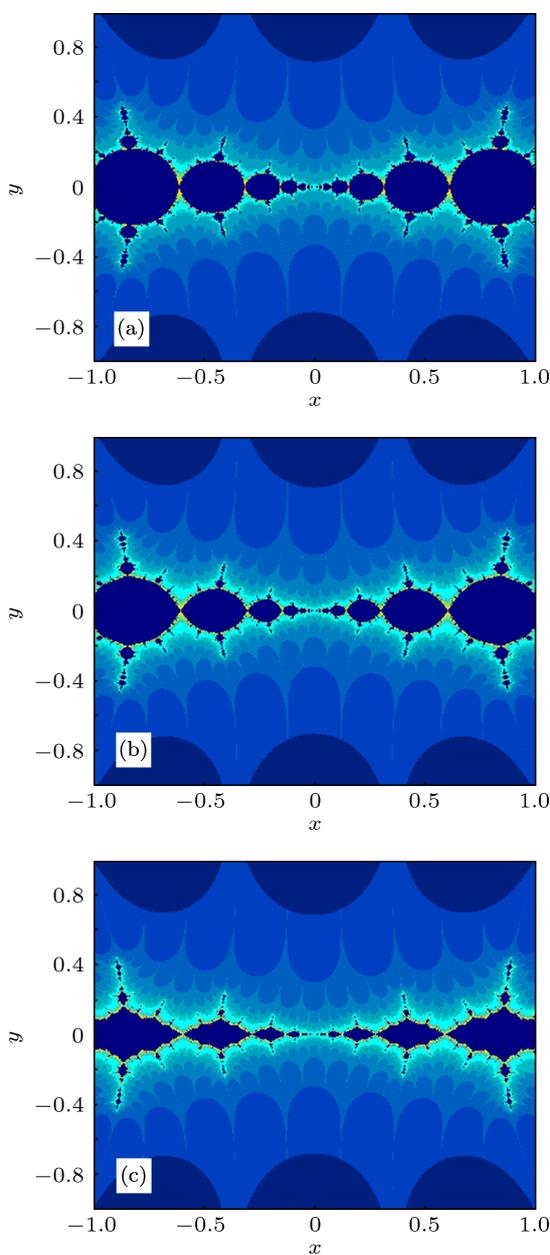


图1 系统 (2) 的中心对称逃逸吸引域 (a) $a = 3.05$; (b) $a = 3.1$; (c) $a = 3.2$

又由于系统 (2) 只有一个变量 x 和一个控制参数 a , 可以方便地构造出随控制参数 a 变化的全局吸引域, 如图 2 所示. 其中初始值 x_0 取值范围为 $x \in (-1, 1)$, 控制参数 a 的取值范围为 $(3, 1 + \sqrt{5})$. 解枝 $x_{3,4}$ 的吸引域赋予白色, 解枝 $x_{5,6}$ 的吸引域赋予黑色, 其中 $x = 0$ 是最为特殊的一条线, 因为当取初始值 $x_0 = 0$ 时, 系统 (2) 的迭代解始终都是 0, 既不会趋近 $x_{3,4}$, 也不会趋近 $x_{5,6}$. 由图 2 可知, 以 $x = 0$ 为对称轴, 趋向于解枝 $x_{3,4}$ 和 $x_{5,6}$ 的初始值呈上下对称分布 (白色对应黑色), 并具有分形结构. 也就意味着, 假设取某一初始值 $x_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 趋向于解枝 $x_{3,4}$, 那么取初始值 $-x_0$ 一定趋向于解枝 $x_{5,6}$.

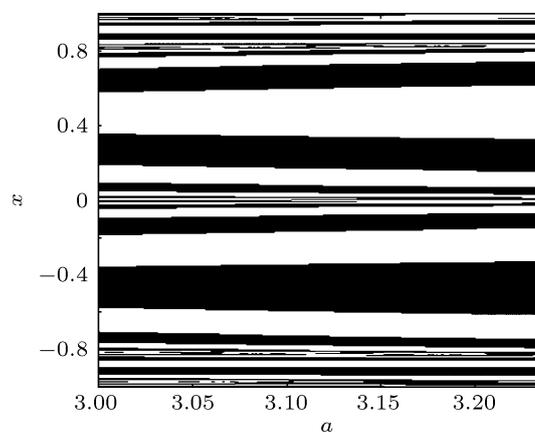


图2 系统 (2) 在分岔区间 $(3, 1 + \sqrt{5})$ 内的全局吸引域

综合前面的分析可知, 系统 (2) 的稳定平衡点 $x = 0$ 在控制参数 $a = a_c = 2$ 处失稳, 并且经历一次倍周期分岔后, 分岔出只在控制参数区间 $(2, 3)$ 内存在且稳定的一对周期 2 解枝 $x_{1,2}$, 以及只在控制参数区间 $(3, 1 + \sqrt{5})$ 内存在且稳定, 并依赖于初始值的一对周期 2 共轭对称性破缺解枝 $x_{3,4}$ 和 $x_{5,6}$. 更深入的研究表明, 这对共轭对称性破缺解枝会历经一系列的倍周期分岔进而导致一对共轭混沌吸引子 A_+ 和 A_- 的产生, 并且每个吸引子包含在唯一的轨线中. 这些轨线逐渐“弥补”实轴的部分区域, 记这些轨线分别为 $[\alpha, \beta]$ 和 $[-\alpha, -\beta]$. 随着控制参数 α 的进一步增大, β 逐渐减小并且最终变为负值, 这就意味着系统 (2) 有 Z_2 对称性吸引子出现 [33], 同时也表明系统 (2) 的吸引子从此处开始恢复了对称性 (这一现象也称为对称性恢复危机). 利用文献 [33] 的理论很容易确定系统 (2) 有 Z_2 对称性吸引子出现的确切控制参数 a 的最小值 a_r , 首先

要满足方程

$$f^2(x_r, a) = 0, \quad (16)$$

并且在 a_r 点有

$$x_r^2 = \frac{a_r - 1}{3a_r}, \quad (17)$$

进而可得

$$a_r = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (18)$$

3 对称性破缺分岔线性控制

几乎类同于混沌控制器的选择, 分岔控制器的选择也遵循着简单性、适用性的基本原则, 这样的控制器才更易于物理实现和推广. 非线性控制器在改变待控制系统的分岔结构和类型方面具有优势, 这是由于引入了新的非线性项, 待控制系统的固有的一些非线性特性被破坏或被嵌入了新的非线性特性. 但由于非线性控制器的复杂性或不连续性, 不利于被控制后的系统 (尤其是高维系统) 的动力学分析和精确控制. 就待控制系统 (2) 而言, 最为简单的非线性控制器应是最高次数不超过二次方的多项式:

$$u(x, k_2, k_1, k_0) = k_2 x^2 + k_1 x + k_0 \quad (k_2 \neq 0), \quad (19)$$

其中 $k_2, k_1, k_0 \in \mathbb{R}$, 为待定且可调控控制增益.

待控制系统 (2) 中加入非线性控制器 (19) 后, 控制系统可写为

$$c(x, a, k_2, k_1, k_0) : x \mapsto ax^3 + (1-a)x + u(x, k_2, k_1, k_0). \quad (20)$$

由于控制系统 (20) 的动力学分析依赖于四个参数, 即 a, k_2, k_1, k_0 , 所以控制系统 (20) 的动力学分析很是繁杂. 并且, 较之原来待控制系统 (2) 来说, 由于 $k_2 \neq 0$, 则控制系统 (20) 已经失去了系统 (2) 固有的对称性, 即

$$c(x, a, k_2, k_1, k_0) \neq c(-x, a, k_2, k_1, k_0), \quad (21)$$

所以控制系统 (20) 再不会出现对称性破缺分岔. 因此, 非线性控制器 (19) 一定会改变系统 (2) 原来的分岔结构和分岔类型. 图 3 展示了加入最简单的二次方非线性控制器 $u(x, k_2, 0, 0)$ 后, 控制系统 (20) 在参数平面 (a, k_2) 上的动力学分布, 其中 $a \in [1.5, 4]$, $k_2 \in [-1, 1]$. 图 3 中, 数字 1—4, 6, 8 分别表示所在的或所指的参数区域的周期数, 英文标识 chaos

和 unbounded 分别表示混沌参数区域和逃逸参数区域. 从图 3 可以看出, 控制系统 (20) 在参数平面 (a, k_2) 上的周期解分岔具有分形结构^[42] 和多层次的对称结构^[43]. 因此, 在控制增益 k_2 的调节下 ($k_2 = 0$ 除外), 控制系统 (20) 都沿着分岔参数 a 增大的方向历经严格的倍周期分岔通向混沌.

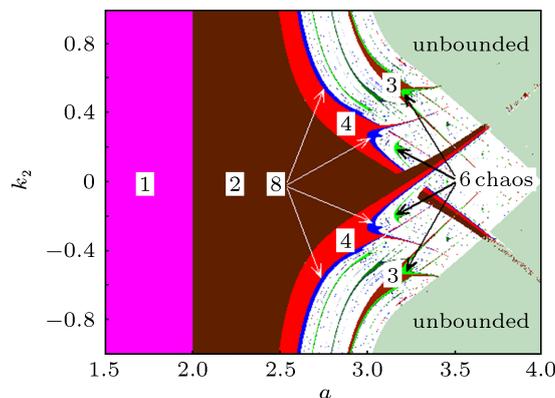


图 3 控制系统 (20) 在参数平面 (a, k_2) 上的动力学分布

与非线性控制器相比较, 线性控制器比较简单且易操控, 并且在动力学分析和精确控制两方面具有无可比拟的优势^[11].

待控制系统 (2) 中加入线性控制器后, 控制系统可写为

$$c(x, a, k_1, k_0) : x \mapsto ax^3 + (1-a)x + u(x, k_1, k_0), \quad (22)$$

其中 $u(x, k_1, k_0) = k_1 x + k_0$ 为关于变量 x 的一次函数, $k_1, k_0 \in \mathbb{R}$ 为待定且可调控控制增益.

由于控制系统 (22) 是由待控制系统 (2) 加入线性控制器 $u(x, k_1, k_0)$ 后生成的, 二者的拓扑性质并没有发生变化, 只不过是随着调节控制粗调节控制增益 k_1 和细调节控制增益 k_0 , 发生分岔点的位置 a_c 发生了变化^[11]. 进一步来说, 采取这样的控制策略还可以压缩混沌区域, 达到控制混沌的目的. 此外, 为了使控制系统 (22) 除了对称性破缺分岔之外其他分岔点也被控制, 需要采用以下策略:

- 1) 确定控制系统 (22) 的周期 2 解的对称性破缺分岔点 a_c , 特征值 $\frac{\partial c^2(x, a, k_2, k_0)}{\partial x} = 1$, 并保证, 会产生一对共轭周期 2 解枝, 并且失去对称性; 这一对共轭周期 2 解枝的吸引域具有某种对称性;
- 2) 确定控制系统 (22) 的周期 2 对称性破缺分岔在可调控控制增益 k_1 和 k_0 影响下的稳定参数范围 $\left| \frac{\partial c^2(x, a, k_2, k_0)}{\partial x} \right| < 1$;
- 3) 对称性破缺分岔点 a_c 的最大可调范围为系统 (22) 的周期 2 解的稳定参数范

围, 进而确定可控制增益 k_1 和 k_0 的取值范围; 4) 如果再想使控制系统 (22) 的吸引子具有“即时”对称性, 即使得控制系统 (22) 在对称性恢复点前恢复对称性, 可以采用在对称性破缺分岔点和对称性破缺恢复点之间采用双初始值的计算办法, 即同时选取初始值 x_0 和 $-x_0$.

4 数值结果

由于在线性控制器 $u(x, k_1, k_0)$ 中, k_0 只能在一个狭窄区域取值才能使系统的分岔行为存在 [11], 故为了方便计, 令 $k_0 = 0, k_1 = k$, 控制系统 (22) 可改写为

$$c(x, a, k) : x \mapsto ax^3 + (1 - a)x + kx, \quad (23)$$

于是可得周期 2 解枝代数表达式为

$$\begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - a\Theta - 2a}}{a}, \\ x_{3,4} = \left(\sqrt{\frac{a - k + \Theta - 1}{2a}}, -\sqrt{-\frac{k - a + \Theta + 1}{2a}} \right), \\ x_{5,6} = \left(\sqrt{-\frac{k - a + \Theta + 1}{2a}}, -\sqrt{\frac{a - k + \Theta - 1}{2a}} \right), \end{cases} \quad (24)$$

其中 $\Theta = \sqrt{a^2 - 2ak - 2a + k^2 + 2k - 3}$. 并且由 $\left| \frac{\partial c^2(x, a, k)}{\partial x} \right| < 1$ 推知, 周期 2 的 $x_{1,2}$ 解枝的稳定参数范围为 $a \in (2 + k, 3 + k)$, 而解枝 $x_{3,4}$ 和 $x_{5,6}$ 的稳定参数范围为 $a \in (3 + k, 1 + \sqrt{5} + k)$. 由此可见周期 2 解枝在可控制增益 k 的作用下, 在参数区间 $a \in (3 + k, 1 + \sqrt{5} + k)$ 内失去对称性; 不但参数区间长度不变, 而且发生倍周期分岔和对称性破缺分岔的分岔点, 以及对称性恢复点, 通设为 a'_c , 较之原来的待控制系统 (2) 来说, 呈线性关系, 即

$$a'_c = a_c + k. \quad (25)$$

选择 $k = 0.1$, 那么倍周期分岔应该发生在 $a'_c = 2.1$, 而对称性破缺分岔应该发生在 $a'_c = 3.1$, 对称性恢复点应该发生在 $a'_c = 1.1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 3.698$, 延迟了分岔和混沌的出现, 数值结果验证了这三点, 如图 4 所示.

选择 $k = -0.1$, 那么倍周期分岔应该发生在 $a'_c = 1.9$, 而对称性破缺分岔应该发生在 $a'_c = 2.9$, 对称性恢复点应该发生在 $a'_c = 0.9 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 3.498$,

将分岔和混沌的出现提前, 数值结果验证了这三点, 如图 5 所示.

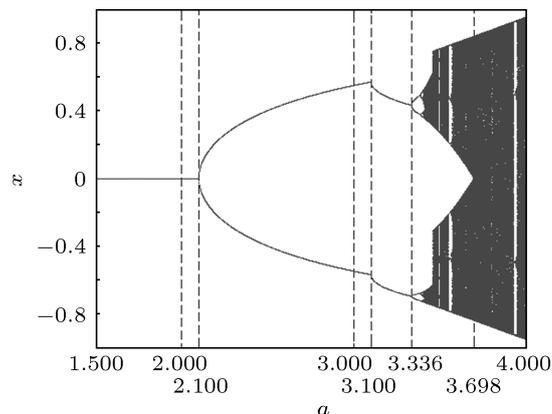


图 4 $k = 0.1$ 时, 控制系统 (23) 的分岔图

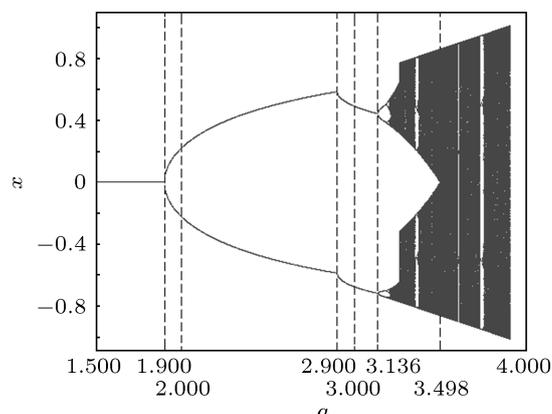


图 5 $k = -0.1$ 时, 控制系统 (23) 的分岔图

在 $a \in (2.9, 0.9 + \frac{3\sqrt{3}}{2})$ 范围内加入双初始值控制, 使得控制系统 (23) 在对称性恢复点 $a'_c = 0.9 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 3.498$ 前恢复了“即时”对称性, 数值结果如图 6 所示.

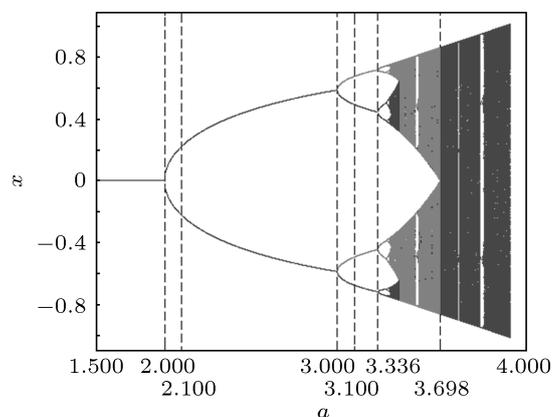


图 6 $k = -0.1$ 时, 控制系统 (23) 的双初始值分岔图

5 结论

通过分析一类三次对称离散系统发生对称性破缺分岔发生机制, 加入了线性控制器, 有效地控

制了倍周期分岔和对称性破缺分岔; 同时可以延迟或者提前所有分岔发生的时间, 改变了分岔点位置. 通过调节线性控制器增益就可使分岔控制效果满足定点及定时的要求.

- [1] Chen G, Morola J L, Wang H O 2000 *Int. J. Bif. Chaos* **10** 511
- [2] Chen G, Hill D J, Yu X H 2003 *Bifurcation Control: Theory and Applications* (Berlin: Springer) pp1-327
- [3] Harb A M, Zohdy M A 2002 *Nonlin. Anal.* **7** 37
- [4] Wang H O, Abed E G 1995 *Automatica* **31** 1213
- [5] Liu S H, Tang J S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6162 (in Chinese) [刘素华, 唐驾时 2008 物理学报 **57** 6162]
- [6] Chen D, Wang H O, Chen G 2001 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **48** 661
- [7] Lü Z S, Duan L X 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 050504
- [8] Ma W, Wang M Y, Nie H L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100202 (in Chinese) [马伟, 王明渝, 聂海龙 2011 物理学报 **60** 100202]
- [9] Fu W B, Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2889 (in Chinese) [符文斌, 唐驾时 2004 物理学报 **53** 2889]
- [10] Abed F H, Wang H O, Chen R C 1994 *Physica D* **70** 154
- [11] Tang J S, Ouyang K J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4438 (in Chinese) [唐驾时, 欧阳克俭 2006 物理学报 **55** 4438]
- [12] Tang J S, Zhao M H, Han F, Zhang L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 020504
- [13] Xiao M, Cao J D 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **332** 1010
- [14] Liang C X, Tang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 135
- [15] Jiang G R, Xu B G, Yang Q G 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5235
- [16] Lu W G, Xu P Y, Zhou L W, Luo Q M 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 030501
- [17] Zong X P, Geng J, Wang P G 2011 *Infom. Control* **40** 343 (in Chinese) [宗晓萍, 耿军, 王培光 2011 信息与控制 **40** 343]
- [18] Wu Z Q, Sun L M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050504 (in Chinese) [吴志强, 孙立明 2011 物理学报 **60** 050504]
- [19] Yu P, Chen G 2004 *Int. J. Bif. Chaos* **14** 1683
- [20] Huang Q W, Tang J S 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 685
- [21] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照, 唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]
- [22] Luo X S, Chen G R, Wang B H, Fang J Q, Zou Y L, Quan H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 (in Chinese) [罗晓曙, 陈关荣, 汪秉宏, 方锦清, 邹艳丽, 全宏俊 2003 物理学报 **52** 790]
- [23] Xiao H, Tang J S, Liang C X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2989 (in Chinese) [萧寒, 唐驾时, 梁翠香 2009 物理学报 **58** 2989]
- [24] Leung A Y T, Ji J C, Chen G R 2004 *Int. J. Bif. Chaos* **14** 1423
- [25] Ji J C, Leung A Y T 2002 *Nonlin. Dyna.* **27** 411
- [26] Ji J C 2001 *Nonlin. Dyn.* **25** 369
- [27] Ouyang K J, Tang J S, Liang C X 2009 *Chin. Phys.* **18** 4748
- [28] Liu S, Liu H R, Wen Y, Liu B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5223 (in Chinese) [刘爽, 刘浩然, 闻岩, 刘彬 2010 物理学报 **59** 5223]
- [29] Yu P, Lü J H 2011 *Int. J. Bif. Chaos* **21** 2647
- [30] Field M, Golubitsky M 1992 *Symmetry in Chaos: A Search for Pattern in Mathematics, Art and Nature* (2nd Ed.) (Oxford: Oxford University Press) p27
- [31] Zou F F 2006 *M. S. Dissertation* (Dalian: Dalian University of Technology) (in Chinese) [邹芳芳 2006 硕士学位论文 (大连: 大连理工大学)]
- [32] Zhang Y, Lei Y M, Fang T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3799 (in Chinese) [张莹, 雷佑铭, 方同 2009 物理学报 **58** 3799]
- [33] Chossat P, Golubitsky M 1988 *Physica D* **32** 423
- [34] Lai Y C 1996 *Phys. Rev. E* **53** 57
- [35] Szabo K G, Tel T 1989 *J. Stat. Phys.* **54** 925
- [36] Attili B S 1993 *J. Austral. Math. Soc. B* **35** 103
- [37] Werner B, Spence A 1984 *SIAM J. Numer. Anal.* **21** 388
- [38] Bishop S R, Sofroniou A, Shi P L 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **25** 257
- [39] Wang X Y, Meng Q Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 388 (in Chinese) [王兴元, 孟庆业 2004 物理学报 **53** 388]
- [40] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinear System* (Beijing: Electronics Industry Press) pp41-42 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌 (北京: 电子工业出版社) 第 41—42 页]
- [41] Liu S, Che X J, Wang Z X 2011 *J. Comp.* **6** 1648
- [42] Li X F, Chu Y D, Zhang H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030203
- [43] Li X F, Leung A Y T, Chu Y D 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 010201

Bifurcation control of a cubic symmetry discrete chaotic system*

Zhang Hui^{1)†} Chu Yan-Dong²⁾ Ding Wang-Cai¹⁾ Li Xian-Feng²⁾³⁾

1) (*School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*)

2) (*Department of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*)

3) (*Department of Civil and Architectural Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong*)

(Received 5 August 2012; revised manuscript received 26 September 2012)

Abstract

A direct and effective linear-controller is employed to exactly control the locations of bifurcation points, both the symmetry-breaking bifurcation and the period-doubling bifurcation, in a cubic symmetry discrete system. Moreover, both the sensibility and the symmetry to the initial values of the system are analyzed. The lack of the solution branches due to the symmetry-breaking bifurcation can be reinstated temporarily by selecting the corresponding basins of attraction. The effectiveness of the controller is verified by numerical simulations.

Keywords: discrete chaotic system, symmetry-breaking, period-doubling, bifurcation control

PACS: 02.30.Oz, 05.45.Gg, 05.45.Pq, 07.05.Tp

DOI: 10.7498/aps.62.040202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11161027, 11162007), the Key Foundation of Natural Science of Gansu Province, China (Grant No. 1010RJZA067), and the Young Scholars Science Foundation of Lanzhou Jiaotong University, China (Grant No. 2011026).

† Corresponding author. E-mail: zhanghui_nice@163.com