

自散焦非局域非线性材料中的光学涡旋孤子*

欧阳世根†

(华南师范大学, 广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广州 510631)

(2012年7月12日收到; 2012年9月18日收到修改稿)

通过数值模拟的方法对非局域非线性自散焦材料中的光学涡旋孤子的传输特性以及相互作用特性进行了研究. 研究表明, 拓扑荷 $|m| = 1$ 的非局域涡旋孤子是稳定的, 而拓扑荷 $|m| > 1$ 的非局域涡旋孤子均具有拓扑不稳定性. 在微扰存在的情况下以及在近距离相互作用的过程中, $|m| > 1$ 的涡旋孤子会分裂成一系列的 $|m| = 1$ 的涡旋孤子. 非局域涡旋孤子与局域涡旋孤子具有相同的长距离相互作用模式, 即点涡旋相互作用模式. 但两者的短距离相互作用存在一些差别, 在相同的距离下, 两涡旋间的相互绕转的周期随着材料的非局域响应长度增大而增大.

关键词: 非局域非线性薛定谔方程, 自散焦, 涡旋孤子

PACS: 05.45.Yv, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.62.040504

1 引言

在自散焦的非线性材料中可形成光学涡旋孤子. 光学涡旋孤子具有均匀的背景光强, 并且具有一个相位奇点, 在该相位奇点处的光强为零, 绕相位奇点一圈相位增加 2π 的整数倍 (该整数倍数称为涡旋孤子的拓扑荷, 相应于台风的螺旋度^[1]). 涡旋光孤子已在多种光学非线性材料中观察到, 包括 Kerr 非线性材料^[2]、光折变晶体^[3,4] 和饱和非线性材料^[5,6]. 对涡旋光孤子的稳定性的研究在实际应用中具有重要的现实意义^[3,6-13]. 在体材料中, 一维暗孤子由于自身具有的横向调制不稳定性而演变出一系列的二维涡旋光孤子^[7,8,11]. 拓扑荷 $|m| > 1$ 的涡旋孤子具有拓扑不稳定性, 在扰动的作用下会裂变为 $|m|$ 个具有单拓扑荷的涡旋孤子, 以保证裂变过程中总的拓扑荷守恒^[3,9]. 然而, 在扰动很小的情况下, 这些裂变的产物会聚集在一个很小的距离内以至于无法把它们区分开来, 在这种情况下, 这些分裂的涡旋仍被认为组成一个拓扑荷为 $|m| > 1$ 的涡旋孤子, 因此, 拓扑荷大于 1 的涡旋孤子被认为是准稳定的 (metastable)^[10]. 实验上, 在各向同性的介质中, 已观测到拓扑荷 $|m| = 1$

的同号/异号涡旋孤子间的相互绕转/湮灭^[9,14]. 理论表明, 当涡旋孤子间的距离远大于孤子的尺度时, 涡旋间的相互作用可通过点涡旋模型很好地描述^[15,16]. 但在各向异性的材料中, 涡旋孤子的相互作用会呈现出新的特点, 例如, 在光折变晶体中, 从 $|m| > 1$ 的涡旋孤子中裂变出来的涡旋会相互排斥, 沿着与晶轴垂直的方向排成一行^[3].

本文通过数值模拟的方法研究非局域非线性对涡旋光孤子在自散焦材料中的传输和相互作用特性的影响. 研究表明, 随着材料非局域特征响应长度的增大, 涡旋孤子的半径也随之增大. 与局域材料中的情况类似, 在非局域材料中 $|m| > 1$ 的涡旋孤子具有拓扑不稳定性, 在存在扰动的情况下会分裂成 $|m|$ 个具有单拓扑荷的涡旋孤子. $|m| = 1$ 的单拓扑荷涡旋孤子是非局域非线性材料中是稳定的. 这里, 非局域性并没有使涡旋孤子的传播特性发生质的改变. 当孤子间的距离远大于孤子的半径时, 涡旋孤子间的相互作用仍可通过点涡旋模型很好地描述, 这时涡旋的相互作用模式完全由空间的相位分布决定. 只有当两涡旋处在光诱导非线性折射率存在显著变化的区域内, 非局域非线性才会影响涡旋间的相互作用.

* 国家自然科学基金 (批准号: 61008007) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ouyang.shigen@163.com

2 自散焦非局域材料中的涡旋孤子

考虑一连续单色光束 $E(X, Y, Z) = U(X, Y, Z) \times \exp(ikZ)$, 这里 X, Y, Z 为实验室坐标系, Z 轴为光束的传播方向, $k = 2\pi n_0/\lambda_0$, 其中 n_0 为材料的线性折射率, λ_0 为真空中的波长, U 为光束电场的慢变包络. 由时谐亥姆霍兹方程, 在旁轴近似下, 可获得该慢变包络的演化方程

$$2ik \frac{\partial U}{\partial Z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) U + 2k^2 \frac{\Delta N}{n_0} U = 0,$$

这里 ΔN 为光诱导非线性折射率, 依赖于空间中的光强, 并且 $|\Delta N| \ll n_0$. 引入特征长度 l_0 和特征电场强度 E_0 , 做无量纲代换 $x = X/l_0, y = Y/l_0, z = Z/(kl_0^2), u = U/E_0, n = k^2 l_0^2 \Delta N/n_0$, 那么上述传输方程变为下面的 (1+2) 维无量纲非线性薛定谔方程

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 u + nu = 0, \quad (1)$$

这里 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. 本文研究在自散焦非局域非线性材料 [17-20] 中光束的传输特性, 这时, 材料的非线性折射率为 $n(\mathbf{r}, z) = -\int R(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^2 \mathbf{r}'$, 其中 $\mathbf{r} = xe_x + ye_y, R(|\mathbf{r}|)$ 为材料的非局域响应函数并满足下面的归一化条件 $\int R(|\mathbf{r}|) d^2 \mathbf{r} = 1$, 这里以及下文中, 我们总是假定所有的积分的积分区域为 x - o - y 全平面.

容易证明, 在下面的尺度变换下:

$$\tilde{u}(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{\alpha} u\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}, \frac{z}{\alpha^2}\right), \quad (2)$$

$$\tilde{R}(|\mathbf{r}|) = \frac{1}{\alpha^2} R\left(\frac{|\mathbf{r}|}{\alpha}\right), \quad (3)$$

方程 (1) 的形式保持不变, 这里 α 为任意的正实数. 这表明, 我们只需研究背景光强为 $|u(\pm\infty, z)|^2 = 1$ 的涡旋孤子就足够了, 因为具有其他背景光强的涡旋孤子可通过上述尺度变换而获得. 因此下文中, 我们总是假定 $|u(\pm\infty, z)|^2 = 1$. 在柱坐标下, 方程 (1) 的涡旋孤子解具有下面的形式 [5,10,15]

$$u_m(\mathbf{r}, z) = \psi_m(r) e^{-iz + im\phi}, \quad (4)$$

这里 ϕ 为方位角, $r = |\mathbf{r}|$ 为横向矢径的长度, 非零整数 $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, 为涡旋孤子的拓扑荷, 实函数 $\psi_m(r)$ 为涡旋孤子的包络. 作为涡旋孤子解, 我们要求 $\psi_m(0) = 0$ 以及当 $r \rightarrow \infty$ 时, 有 $\psi_m(r) \rightarrow 1$. 下文中, 我们假设涡旋光束在自散焦材料中诱导出的非线性折射率 n 由下式描述 [17,18]

$$n - w^2 \nabla_{\perp}^2 n = -|u|^2, \quad (5)$$

该方程可表达成卷积的形式

$$n(\mathbf{r}, z) = -\frac{1}{2\pi w^2} \int \mathbf{K}_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{w}\right) |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^2 \mathbf{r}', \quad (6)$$

这里 $\mathbf{K}_0(x)$ 为第二类修正贝塞尔函数, w 为材料的特征非局域响应长度. 把 (4) 式代入 (1) 式和 (5) 式, 可得

$$\psi_m + \frac{1}{2} \left(\psi_m'' + \frac{1}{r} \psi_m' - \frac{m^2}{r^2} \psi_m \right) + n \psi_m = 0, \quad (7)$$

$$n - w^2 \left(n'' + \frac{1}{r} n' \right) = -\psi_m^2, \quad (8)$$

由上面两式, 可获得下面一些渐近行为: 当 $r \rightarrow 0$ 时, 有 $\psi_m(r) \approx a_m r^{|m|}, n(r) \approx n_0 + \frac{n_0}{4w^2} r^2$, 这里 a_m, n_0 为待定常数; 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 有 $\psi_m(r) \approx 1 - \frac{m^2}{4r^2}, n(r) \approx -1 + \frac{m^2}{2r^2}$. 方程 (7) 和 (8) 的涡旋孤子解可通过多种数值方法求解 [21-26], 图 1 为一些局域/非局域涡旋孤子解. 由图 1 可看出, 涡旋孤子的半径随着非局域长度 w 和拓扑荷 $|m|$ 的增大而增大.

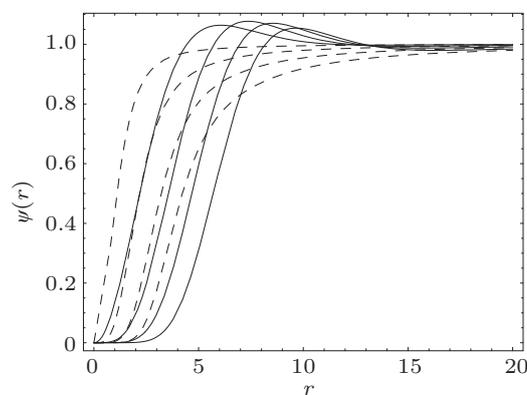


图 1 涡旋孤子解 虚线为局域 ($w = 0$) 孤子解, 实线为非局域 ($w = 5$) 孤子解, 从左到右, 拓扑荷依次为 $m = 1, 2, 3, 4$

在求出非局域涡旋孤子解的基础上, 可以通过数值模拟来研究它们的传输特性. 由图 2(a) 可以看出, 当非局域长度 $w = 5$ 时, 拓扑荷 $m = 1$ 的涡旋孤子在 $z = 100$ 的传播距离内没有可观察的变化. 图 2(b) 和 (c) 分别是初始半径为涡旋孤子半径的 0.5 倍和 2 倍的涡旋光束的演化, 可以看出, 这两束初始偏离孤子形状的涡旋光束可通过向外辐射光能的方式不断地调整自己的形状, 并很快地演化成涡旋孤子的形式. 这表明拓扑荷 $m = 1$ 的涡旋孤子是稳定的.

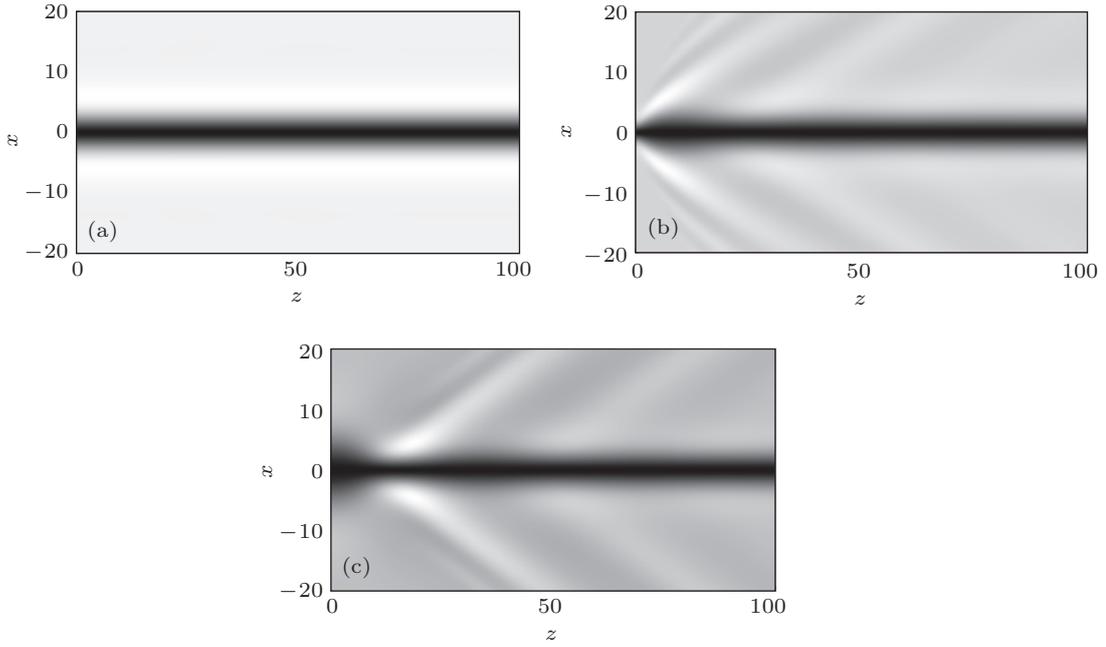


图2 涡旋光束在 x - z 平面内的光强分布 (a) 涡旋孤子光束; (b) 初始半径为 0.5 倍孤子半径的涡旋光束; (c) 初始半径为 2 倍孤子半径的涡旋光束; 这里非局域长度为 $w = 5$

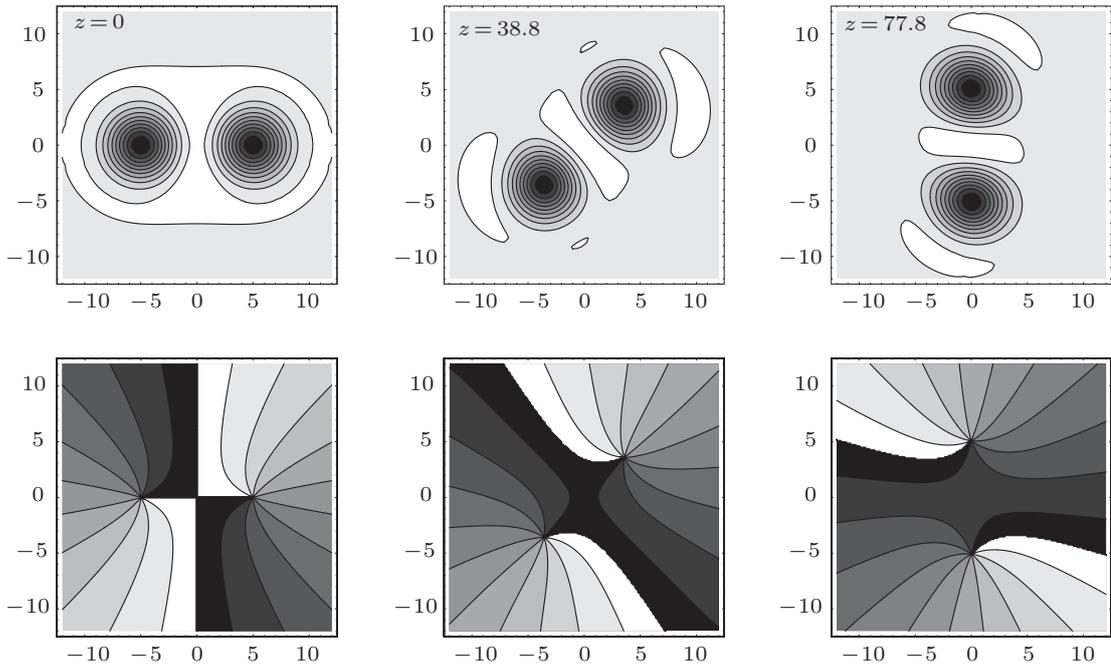


图3 相距 $d = 10$ 的 $m = 1$ 的两非局域涡旋 ($w = 5$) 间的相互绕转 上图为在 $z = 0, 38.8, 77.8$ 的传播距离处的 x - o - y 平面上的光强分布; 下图为相应的相位分布, 其中的点状结构为相位奇点

文献 [15, 16] 指出, 当涡旋孤子间的距离远大于孤子半径时, 这些涡旋孤子可被看成没有结构的点涡旋, 这时它们间的相互作用主要由空间中的相位分布决定, 并可通过点涡旋模型进行描述. 根据点涡旋模型, 若在均匀背景光场中存在 k 个涡旋孤子, 它们间的距离都远大于它们的涡旋半径, 那么在点 \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) 处的拓扑荷为 m_i 的涡旋

孤子相对于背景运动的线速度

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dz} = kl_0 \frac{d(X_i \mathbf{e}_x + Y_i \mathbf{e}_y)}{dz}$$

由下式描述

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j \neq i}^k m_j \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}, \quad (9)$$

特别地, 当空间中只有两个涡旋时, 它们的

线速度分别为 $v_1 = m_2 e_z \times (r_1 - r_2)/d^2$ 和 $v_2 = m_1 e_z \times (r_2 - r_1)/d^2$, 其中 $d = |r_2 - r_1|$ 为这两涡旋间的距离. 由此可以算出, 当 $m_1 + m_2 \neq 0$ 时, 这两涡旋会绕着它们连线上的一点做匀速圆周运动, 角速度 $\omega = 2\pi/T = |m_1 + m_2|/d^2$, 即 $|m_1 + m_2|T/(2\pi d^2) = 1$, 其中 T 为圆周运动的周期, 两涡旋圆周运动的半径分别为 $a_1 = |m_2|d/|m_1 + m_2|$ 和 $a_2 = |m_1|d/|m_1 + m_2|$; 当 $m_1 + m_2 = 0$, 即 $m_1 = -m_2$ 时, 两涡旋以速度 $v = |m_1|/d$ 做匀速直线同向运动, 运动方向垂直于它们的连线. 我们通过数值模拟的方法研究非局域涡旋孤子间的相互作用. 图 3 为相距 $d = 10$ 的拓扑荷均为 $m = 1$ 的两个涡旋间的相互绕转, 它们绕转的角速度是均匀的, 与传输距离无关; 它们间的距离在相互作用的过程中也保持不变, 因此它们的运动为匀速圆周运动. 由图 3 可以测算出涡旋绕转的周期 $T \approx 77.8 \times 4 = 311.2$. 由于圆周运动的线速度等于圆周运动的半径 $d/2$ 与角速度 $\omega = 2\pi/T$ 的乘积, 因此有 $v = d\pi/T = 10 \times 3.14/311.2 = 0.1009$. 另一方面, 由点涡旋模型 (9) 式, 可以算出涡旋圆周运动的线速度为 $v = 1/d = 1/10 = 0.1$, 与数值模拟测算的结果一致. 因此在这种情况下, 涡旋间的相互作用可通过点涡旋模型很好地描述.

对于上述 $m = 1$ 的两涡旋相互绕转的例子, 在点涡旋模型下, 涡旋间相互绕转的圆周运动周期和它们间的距离存在下面的简单关系 $T/(d^2\pi) = 1$.

由图 4 可以看出, 无论对于局域涡旋孤子 ($w = 0$) 还是非局域涡旋孤子 ($w = 5$), 随着两涡旋孤子间的距离 d 不断增大, 比值 $T/(d^2\pi)$ 都趋向等于 1, 因此点涡旋模型在涡旋间距离远大于涡旋半径的情况下都是适用的, 与非线性的具体形式无关. 由图 4 还可以看出, 当涡旋间的距离小于或接近于涡旋半径时, 涡旋间的相互作用就会明显地偏离点涡旋模型, 它们会感受到非线性折射率分布的影响. 事实上, 当距离 d 比较小时, 涡旋圆周运动的周期 T 会大于 $d^2\pi$, 而且 d 越小, 偏离越明显; 在相同距离 d 下, 圆周运动的周期 T 随着材料的特征非局域响应长度 w 的增大而增大.

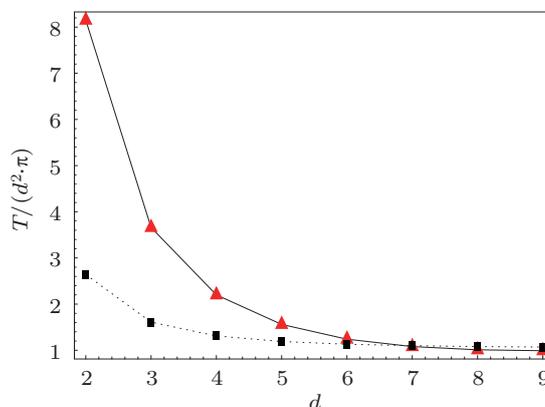


图 4 拓扑荷 $m = 1$ 的两涡旋相互绕转的周期 T 与它们间的距离 d 之间的关系. 三角形数据点为非局域情况 $w = 5$; 正方形数据点为局域情况 $w = 0$

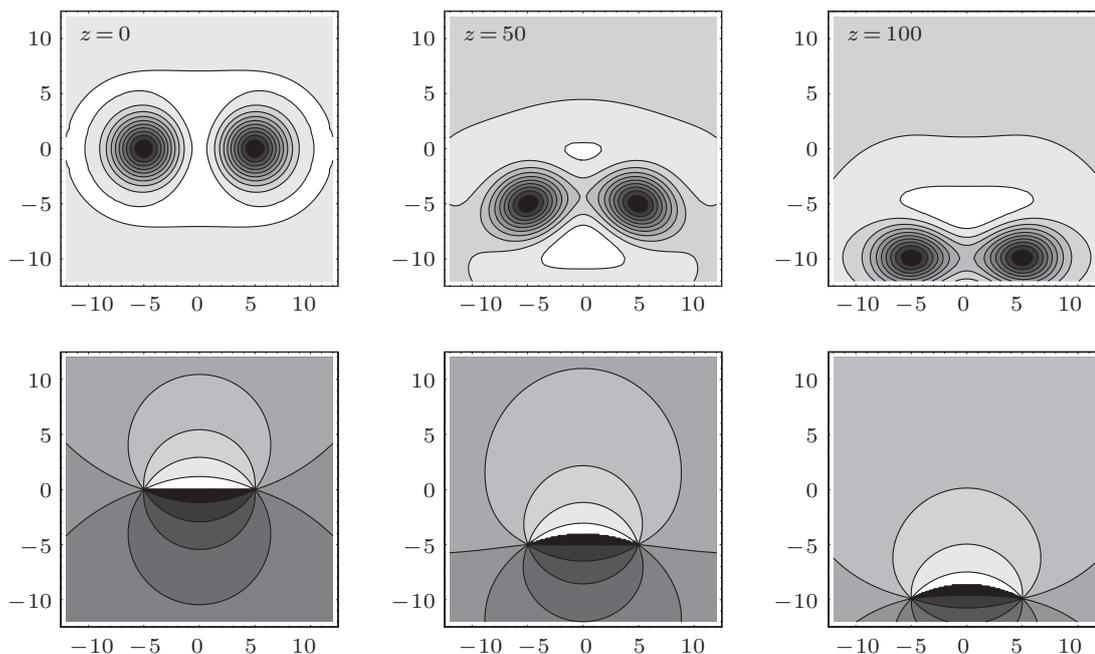


图 5 相距 $d = 10$, 拓扑荷分别为 $m = -1$ 和 $m = 1$ 的两非局域涡旋 ($w = 5$) 间的相互作用

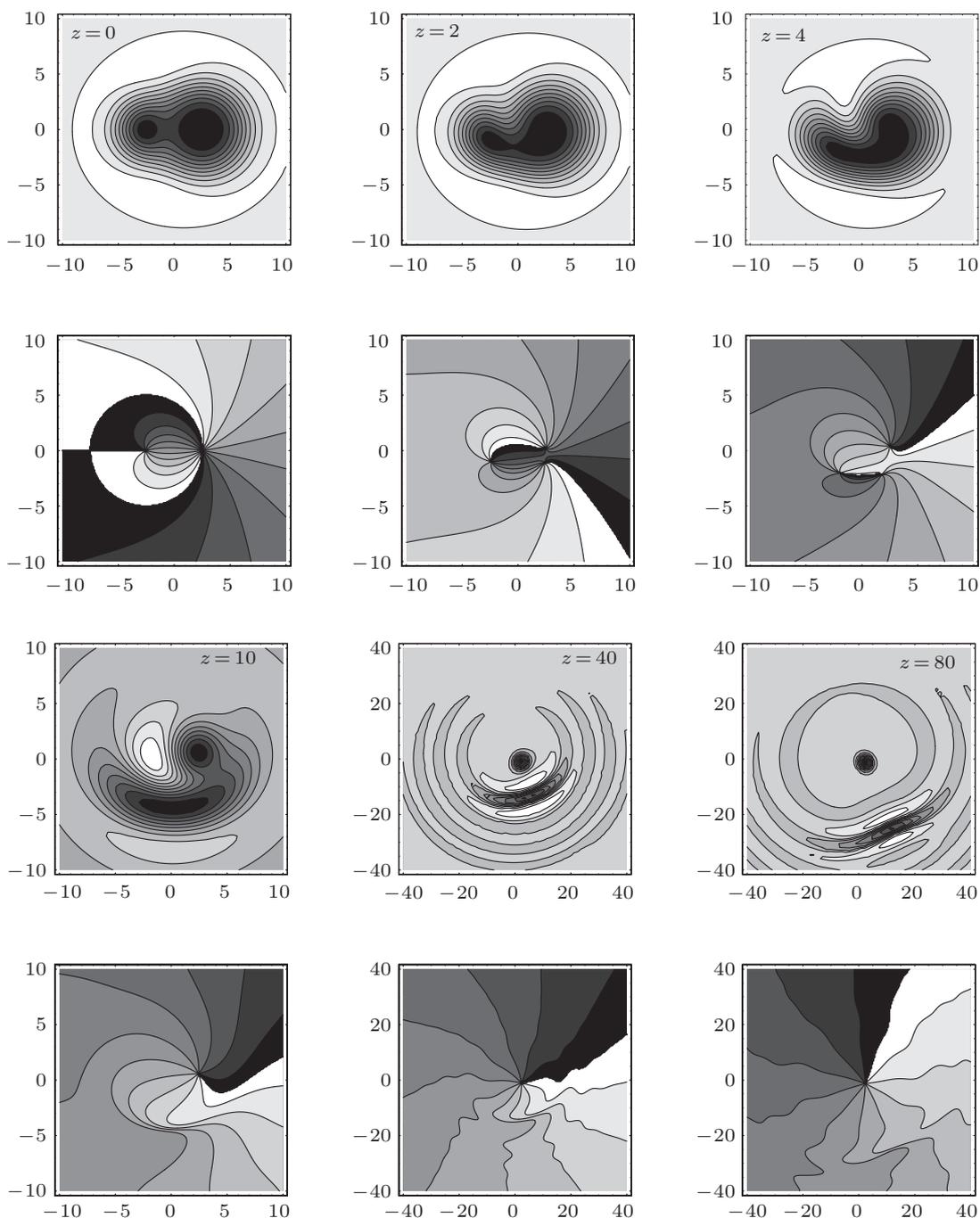


图 6 初始距离为 $d = 5$, 拓扑荷分别为 $m = -1$ 和 $m = 2$ 的两非局域涡旋 ($w = 5$) 间的相互作用

图 5 为相距 $d = 10$ 的拓扑荷分别为 $m = -1$ 和 $m = 1$ 的两涡旋间的相互作用. 根据点涡旋模型^[15,16]或(9)式, 对于相距甚远的带有相反拓扑荷的两涡旋, 它们运动的速度大小相等, 方向相同, 均垂直于它们的连线, 所以它们间不存在相对运动, 它们不可能相互靠近而发生湮灭. 由图 5 可以测算出它们的共动速度为 $v = \Delta y / \Delta z = 10 / 100 = 0.1$, 与点涡旋模型预言的速度 $v = 1/d = 1/10 = 0.1$ 一致. 因此, 如果没有其他外部的作用, 对于相距甚远的

带有相反拓扑荷的两涡旋孤子, 仅靠它们间的相互作用是不可能导致涡旋间相互靠近和湮灭的. 但如果带有相反拓扑荷的两涡旋间的距离很小, 它们可通过非线性效应改变其周边空间的折射率分布而导致它们相互靠近从而相互湮灭, 在这短距离下, 点涡旋模型不再适用(通过数值模拟, 也可以观察到近距离下带有相反拓扑荷的两涡旋间的湮灭, 参看下文).

拓扑荷 $|m| > 1$ 的涡旋孤子具有拓扑不稳定

性^[3,9],微小的扰动都足以使这些涡旋分裂成一群单拓扑荷的涡旋,但如果扰动较小,这些分裂出来的单拓扑荷涡旋彼此将非常靠近以至于很难把它们一一分辨,这种情况下,实验上还是认为它们组成一个 $|m| > 1$ 的涡旋.另一方面,线性衍射效应也会对拓扑不稳定性起到推波助澜的作用,使初始为椭圆形的 $|m| > 1$ 的涡旋发生分裂^[3].本文中,我们发现,涡旋间的近距离相互作用也会引起 $|m| > 1$ 的涡旋的分裂.当两涡旋距离比较近时,它们之间的折射率将会由于非局域非线性效应而引起变化,使得涡旋周边的折射率偏离圆对称,这种不对称的折射率分布就会导致 $|m| > 1$ 的涡旋分裂.图6为拓扑荷分别为 $m = -1$ 和 $m = 2$ 的两涡旋间的近距离相互作用.可以看出 $m = 2$ 的涡旋很快分裂成两个单拓扑荷涡旋.从 $m = 2$ 的涡旋中分裂出来的其中一个单拓扑荷涡旋与原来的 $m = -1$ 的涡旋相互靠近湮灭,留下了一个移动的暗条纹,该暗条纹在移动的过程中不断向外辐射光能而渐渐消失,最后留下从原来的 $m = 2$ 的涡旋中分裂出来的另一个单拓扑荷涡旋.由此可见,涡旋间的湮灭不是直接发生在 $m = -1$ 和 $m = 2$ 的涡旋之间的,而是 $m = 2$

的涡旋首先分裂成两个单拓扑荷涡旋,后者中的一个与 $m = -1$ 的涡旋相互湮灭.因此,实际上不存在拓扑荷大于1的涡旋间的相互湮灭,所有湮灭都是发生在 $|m| = 1$ 的涡旋之间.

3 结论

本文通过数值模拟的方法研究了非局域涡旋光孤子在自散焦材料中的传输和相互作用特性.研究表明,涡旋孤子的半径随着材料非局域特征响应长度的增大而增大.无论是局域涡旋还是非局域涡旋, $|m| > 1$ 的涡旋孤子都具有拓扑不稳定性,而 $|m| = 1$ 的涡旋孤子都是稳定的.当涡旋间的距离远大于涡旋半径时,点涡旋模型能很好地描述非局域涡旋孤子间的相互作用.非局域涡旋和局域涡旋具有相同的长距离相互作用模式.但在短距离相互作用中,非局域涡旋间的相互绕转的周期随材料非局域特征响应长度的增大而增大.短距离的相互作用也会导致 $|m| > 1$ 的涡旋孤子分裂为一群单拓扑荷的涡旋.

- [1] Zhao S N, Xiong X Y, Zhu J 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1817 (in Chinese) [赵松年, 熊小芸, 朱江 1996 物理学报 **45** 1817]
- [2] Swartzlander G A, Law C T 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2503
- [3] Mamaev A V, Saffman M, Zozulya A A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2108
- [4] Lu Y, Liu S M, Wang D Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1300 (in Chinese) [陆琦, 刘思敏, 汪大云 2002 物理学报 **51** 1300]
- [5] Dreischuh A, Paulus G G, Zacher F, Grasbon F, Walther H 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6111
- [6] Dreischuh A, Paulus G G, Zacher F, Grasbon F, Neshev D, Walther H 1999 *Phys. Rev. E* **60** 7815
- [7] Law C T, Swartzlander G A 1993 *Opt. Lett.* **18** 586
- [8] Sakaguchi H, Higashiuchi T 2006 *Phys. Lett. A* **359** 647
- [9] Basistiy I V, Bazhenov V Y, Soskin M S, Vasnetsov M V 1993 *Opt. Commun.* **103** 422
- [10] Aranson I, Steinberg V 1996 *Phys. Rev. B* **53** 75
- [11] Pelinovsky D E, Stepanyants Y A, Kivshar Y S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 5016
- [12] Kuznetsov E A, Rasmussen J J 1995 *Phys. Rev. E* **51** 4479
- [13] Velchev I, Dreischuh A, Neshev D, Dinev S 1997 *Opt. Commun.* **140** 77
- [14] Luther-Davies B, Powles R, Tikhonenko V 1994 *Opt. Lett.* **19** 1816
- [15] Neu J C 1990 *Physica D* **43** 385
- [16] Lund F 1991 *Phys. Lett. A* **159** 245
- [17] Ouyang S G, Guo Q 2009 *Opt. Express* **17** 5170
- [18] Ouyang S G, Hu W, Guo Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 040505
- [19] Zhou L H, Gao X H, Yang Z J, Lu D Q, Guo Q, Cao W W, Hu W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044208 (in Chinese) [周罗红, 高星辉, 杨振军, 陆大全, 郭旗, 曹伟文, 胡巍 2011 物理学报 **60** 044208]
- [20] Yang Z J, Zhou L H, Zheng Y Z, Lu D Q, Hu W, Gao X H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084213 (in Chinese) [杨振军, 周罗红, 郑一周, 陆大全, 胡巍, 高星辉 2011 物理学报 **60** 084213]
- [21] Snyder A W, Poladian L, Mitchell D J 1992 *Opt. Lett.* **17** 789
- [22] Balushev S, Dreischuh A, Velchev I, Dinev S, Marazov O 1995 *Phys. Rev. E* **52** 5517
- [23] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2005 *Opt. Lett.* **30** 2140
- [24] Petviashvili V I 1976 *Fiz. Plazmy* **2** 469
- [25] Petviashvili V I 1976 *Sov. J. Plasma Phys.* **2** 257
- [26] Zozulya A A, Anderson D Z, Mamaev A V, Saffman M 1998 *Phys. Rev. A* **57** 522

Optical vortex solitons in self-defocusing Kerr-type nonlocal medium*

Ouyang Shi-Gen[†]

(Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(Received 12 July 2012; revised manuscript received 18 September 2012)

Abstract

The propagation and interaction properties of optical vortex solitons in a self-defocusing Kerr-type nonlocal medium are investigated by the numerical simulation method. It is indicated that the singly charged vortices are stable and the multicharged vortices are topologically unstable in both the nonlocal and local cases. And in the nonlocal and local cases the point vortices model is applicable for describing the interactions of vortices provided that the interval distances between vortices are much larger than the size of the core of the vortices. However, vortices interact differently in short distance, depending on the nonlocality, and the larger the characteristic nonlocal respond length, the larger the rotating period of two singly charged vortices.

Keywords: Schrödinger equation, self-defocusing, vortex soliton

PACS: 05.45.Yv, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.62.040504

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61008007).

[†] Corresponding author. E-mail: ouyang.shigen@163.com