

电各向异性色散介质电磁散射时域有限差分分析的半解析递推卷积方法*

王飞† 魏兵

(西安电子科技大学物理系, 西安 710071)

(2012年7月8日收到; 2012年9月26日收到修改稿)

利用坐标系转换矩阵给出实验室系中磁化等离子体介质的频域极化率张量, 采用部分分式展开方法通过傅里叶逆变换得到极化率张量的时域指数函数形式, 应用数字信号处理中的半解析递归卷积算法, 给出适用于处理任意外磁场方向情形下磁化等离子体目标电磁散射的半解析递归卷积-时域有限差分计算方法. 计算了磁化等离子体球的同极化和交叉极化后向雷达散射截面, 结果表明了算法的正确有效性.

关键词: 半解析递归卷积, 磁化等离子体, 电磁散射, 时域有限差分方法

PACS: 41.20.Jb

DOI: 10.7498/aps.62.044101

1 引言

近年来, 等离子体与电磁波的相互作用受到了人们的广泛关注. 鉴于等离子体介质的色散特性以及实际问题的复杂性, 其与电磁波的相互作用常常采用数值的方法进行分析. 时域有限差分 (finite difference time domain, FDTD) 方法长于处理复杂介质的电磁问题, 因此常采用 FDTD 方法仿真等离子体与电磁波的相互作用. 文献中处理各向同性色散介质电磁问题的 FDTD 方法有: 递归卷积 (recursive convolution, RC) 法^[1]、分段线性递归卷积 (piecewise linear recursive convolution, PLRC) 法^[2]、电流密度卷积 (current density convolution, JEC) 法^[3]、分段线性电流密度递归卷积 (piecewise linear current density recursive convolution, PLJERC) 法^[4,5]、辅助方程 (auxiliary differential equation, ADE) 法^[6,7]、Z 变换 (Z-transform) 法^[8-10]、移位算子 (shift operator, SO) 法^[11] 和半解析递推卷积 (semi-analytical recursive convolution, SARC) 法^[12] 等.

外加磁场时等离子体介质具有电各向异性色

散特性, 因此对磁化等离子体问题, 需要将上述算法推广到各向异性色散介质情况. 1992 年 Hunsberger 等^[13] 将 RC 法推广用于一维磁化等离子体情形. 1994 年 Young^[14] 将直接积分 (direct integration, DI) 法推广到磁化等离子体情形. 2004 年刘少斌等^[15-17] 先后将 JEC 法、PLJERC 法、ADE 法推广到磁化等离子体情形并计算了磁化等离子体层的反透射. 2007 年杨利霞等^[18] 将 RC 法推广用于一维磁化等离子体情形.

SARC 算法是一种在数字信号处理 (digital signal process, DSP) 技术中被广泛应用、建立在对输入信号的线性插值理论基础上的快速递归卷积算法, 具有低复杂性、绝对稳定和好的精度等优点, 不仅适用于稳定系统, 而且还适用于渐进稳定系统和非均匀网格情况的卷积递归计算^[19,20]. 2009 年张玉强和葛德彪^[12] 将 SARC 算法应用于处理各向同性色散介质. 本文根据磁化等离子体介质电磁特性, 将 SARC 算法推广应用于磁化等离子体的 FDTD 分析. 首先利用坐标系转换矩阵给出实验室系中磁化等离子体介质的频域极化率张量, 再采用部分分式展开方法通过傅里叶逆变换得到极化率

* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2012AA01A308) 和西安电子科技大学基本科研业务费 (批准号: K50511070007) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wfei1021@yahoo.com.cn

张量的时域指数函数形式,最后在对电场强度采用线性插值近似基础上应用 SARC 算法,给出适用于处理任意外磁场方向情形下磁化等离子体目标电磁散射的 SARC-FDTD 计算方法,并计算了非磁化和磁化等离子体球的后向 RCS,与 SO 法和 RC 方法的结果符合得很好.数值结果表明,该方法是正确有效的.文中时谐因子取 $\exp(j\omega t)$.

2 实验室系中磁化等离子体的频域极化率张量

磁化等离子体属于电各向异性色散介质,其频域电本构关系为

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (1)$$

其中 $\epsilon_r(\omega)$ 是磁化等离子体相对介电系数张量的频域形式:

$$\epsilon_r(\omega) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}(\omega) & \epsilon_{xy}(\omega) & \epsilon_{xz}(\omega) \\ \epsilon_{yx}(\omega) & \epsilon_{yy}(\omega) & \epsilon_{yz}(\omega) \\ \epsilon_{zx}(\omega) & \epsilon_{zy}(\omega) & \epsilon_{zz}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega)$ 是 $\epsilon_r(\omega)$ 的元素 ($\alpha, \beta = x, y, z$). (1) 式可以改写为另一种形式 [21]

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_\infty \mathbf{E}(\omega) + \epsilon_0 \mathbf{P}(\omega), \quad (3)$$

其中 ϵ_∞ 是无限大频率时的相对介电系数张量, $\mathbf{P}$ 为极化矢量

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (4)$$

其中 $\chi(\omega)$ 为频域极化率张量, $\chi_{\alpha\beta}(\omega)$ 是 $\chi(\omega)$ 的元素 ($\alpha, \beta = x, y, z$), 有

$$\chi(\omega) = \begin{bmatrix} \chi_{xx}(\omega) & \chi_{xy}(\omega) & \chi_{xz}(\omega) \\ \chi_{yx}(\omega) & \chi_{yy}(\omega) & \chi_{yz}(\omega) \\ \chi_{zx}(\omega) & \chi_{zy}(\omega) & \chi_{zz}(\omega) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

由 (1), (3), (4) 式可知

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \chi(\omega). \quad (6)$$

各向异性介质的本构参数与所选取的坐标系有关. 磁化等离子体的极化率张量在外磁场坐标系 (设为 $x'y'z'$ 系) 中有简单的表达式, 而电磁测量往往在实验室坐标系 (设为 xyz 系) 下进行. 下面根据外磁场系和实验室系的转换矩阵以及外磁场系中磁化等离子体相对介电系数张量, 得到实验室系中极化率张量的表达式.

建立外磁场直角坐标系: $x'y'z'$ 系, 并令外磁场 $\mathbf{B}_0$ 方向为 z' 轴正向, 即 $\mathbf{B}_0 = \hat{z}' B_0$, $\hat{z}'$ 为 z' 轴正向单位矢, B_0 是 $\mathbf{B}_0$ 的大小. 设外磁场 $\mathbf{B}_0$ 在实验室直角坐标系 (xyz 系) 中的方向角为 θ_t, φ_t , 如图 1 所示.

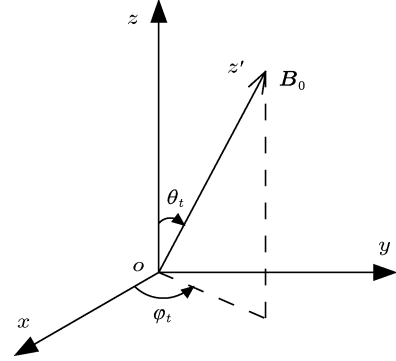


图 1 $x'y'z'$ 系和 xyz 系

设 $x'y'z'$ 系中, 磁化等离子体的相对介电系数张量为 $\epsilon'_r(\omega)$, 根据文献 [22] 有

$$\epsilon'_r(\omega) = \begin{bmatrix} \epsilon'_{x'x'}(\omega) & \epsilon'_{x'y'}(\omega) & \epsilon'_{x'z'}(\omega) \\ \epsilon'_{y'x'}(\omega) & \epsilon'_{y'y'}(\omega) & \epsilon'_{y'z'}(\omega) \\ \epsilon'_{z'x'}(\omega) & \epsilon'_{z'y'}(\omega) & \epsilon'_{z'z'}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_r & \epsilon_{rg} & 0 \\ -\epsilon_{rg} & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{rz} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中

$$\epsilon_r = \left(1 - \frac{j\omega_p^2(j\omega + \nu_c)}{\omega[(j\omega + \nu_c)^2 + \omega_{ce}^2]} \right),$$

$$\epsilon_{rg} = \left(\frac{j\omega_p^2 \omega_{ce}}{\omega[(j\omega + \nu_c)^2 + \omega_{ce}^2]} \right),$$

$$\epsilon_{rz} = 1 - \frac{j\omega_p^2}{\omega(j\omega + \nu_c)}, \quad (8)$$

其中 ω_p, ν_c 和 $\omega_{ce} = (e/m)B_0$ 分别为等离子体频率、等离子体中电子的平均碰撞频率和回旋频率, m 和 e 为电子质量和电量绝对值.

设 ϵ'_∞ 和 $\chi'(\omega)$ 分别是 $x'y'z'$ 系中无限大频率时的相对介电系数张量和频域极化率张量, 由 (6) 式可知

$$\epsilon'_r(\omega) = \epsilon'_\infty + \chi'(\omega). \quad (9)$$

设 ε'_∞ 为单位矩阵, 即

$$\varepsilon'_\infty = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由 (7), (8) 式可得到 $x'y'z'$ 系中

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \begin{bmatrix} \chi_{x'x'}(\omega) & \chi_{x'y'}(\omega) & \chi_{x'z'}(\omega) \\ \chi_{y'x'}(\omega) & \chi_{y'y'}(\omega) & \chi_{y'z'}(\omega) \\ \chi_{z'x'}(\omega) & \chi_{z'y'}(\omega) & \chi_{z'z'}(\omega) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \chi_r & \chi_{rg} & 0 \\ -\chi_{rg} & \chi_r & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{rz'} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_r &= \frac{-j\omega_p^2(j\omega + v_c)}{\omega[(j\omega + v_c)^2 + \omega_{ce}^2]}, \\ \chi_{rg} &= \frac{j\omega_p^2\omega_{ce}}{\omega[(j\omega + v_c)^2 + \omega_{ce}^2]}, \\ \chi_{rz'} &= \frac{-j\omega_p^2}{\omega(j\omega + v_c)}. \end{aligned} \quad (12)$$

可以证明 (11) 式中

$$\begin{aligned} \chi_{x'x'}(\omega) &= \chi_{y'y'}(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^4 p_n(j\omega)^n}{\left(\sum_{n=0}^4 q_n(j\omega)^n\right)}, \\ \chi_{x'y'}(\omega) &= -\chi_{y'x'}(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^4 p_{x'y'n}(j\omega)^n}{\sum_{n=0}^4 q_n(j\omega)^n}, \\ \chi_{z'z'}(\omega) &= \frac{\sum_{n=0}^4 p_{z'n}(j\omega)^n}{\sum_{n=0}^4 q_n(j\omega)^n}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} p_0 &= v_c^2 \omega_p^2, \quad p_1 = 2v_c \omega_p^2, \quad p_2 = \omega_p^2, \\ p_3 &= p_4 = 0, \quad p_{x'y'0} = -v_c \omega_p^2 \omega_{ce}, \\ p_{x'y'1} &= -\omega_p^2 \omega_{ce}, \quad p_{x'y'2} = p_{x'y'3} = p_{x'y'4} = 0, \\ p_{z'0} &= \omega_p^2 (v_c^2 + \omega_{ce}^2), \quad p_{z'1} = 2v_c \omega_p^2, \\ p_{z'2} &= \omega_p^2, \quad p_{z'3} = p_{z'4} = 0, \quad q_0 = 0, \\ q_1 &= v_c (v_c^2 + \omega_{ce}^2), \quad q_2 = 3v_c^2 + \omega_{ce}^2, \end{aligned}$$

$$q_3 = 3v_c, \quad q_4 = 1. \quad (14)$$

xyz 系中的 $\varepsilon_r(\omega)$ 可由 $x'y'z'$ 系中的 $\varepsilon'_r(\omega)$ 通过转换计算得到 [23]

$$\varepsilon_r(\omega) = \mathbf{U}^T \cdot \varepsilon'_r(\omega) \cdot \mathbf{U}, \quad (15)$$

$\mathbf{U}$ 为 $x'y'z'$ 系到 xyz 系的转换矩阵, $\mathbf{U}^T$ 是 $\mathbf{U}$ 的转置矩阵, 且

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_t & -\cos \varphi_t & 0 \\ \cos \theta_t \cos \varphi_t & \cos \theta_t \sin \varphi_t & -\sin \theta_t \\ \sin \theta_t \cos \varphi_t & \sin \theta_t \sin \varphi_t & \cos \theta_t \end{bmatrix}. \quad (16)$$

将 (9) 式代入 (15) 式有

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\omega) &= \varepsilon_\infty + \chi(\omega) \\ &= \mathbf{U}^T \cdot [\varepsilon'_\infty + \chi'(\omega)] \cdot \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^T \cdot \varepsilon'_\infty \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \cdot \chi'(\omega) \cdot \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (17)$$

即有

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty &= \mathbf{U}^T \cdot \varepsilon'_\infty \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \chi(\omega) &= \begin{bmatrix} \chi_{xx}(\omega) & \chi_{xy}(\omega) & \chi_{xz}(\omega) \\ \chi_{yx}(\omega) & \chi_{yy}(\omega) & \chi_{yz}(\omega) \\ \chi_{zx}(\omega) & \chi_{zy}(\omega) & \chi_{zz}(\omega) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}^T \cdot \chi'(\omega) \cdot \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (18)$$

根据 (13), (14), (16) 式可知, $\chi(\omega)$ 的各元素也可写成 $j\omega$ 的有理分数形式

$$\chi_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^4 p_{\alpha\beta n}(j\omega)^n}{\sum_{n=0}^4 q_n(j\omega)^n} \quad (\alpha, \beta = x, y, z), \quad (19)$$

其中 q_n 的值见 (14) 式, $p_{\alpha\beta n}$ 的值可由 (14) 和 (16) 式计算得到, 即

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} p_{xxn} & p_{xyn} & p_{xzn} \\ p_{yxn} & p_{yyn} & p_{yzn} \\ p_{zxn} & p_{zyn} & p_{zzn} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}^T \cdot \begin{bmatrix} p_n & p_{x'y'n} & 0 \\ -p_{x'y'n} & p_n & 0 \\ 0 & 0 & p_{z'n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \\ &(n = 0, 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (20)$$

3 实验室系中极化率张量的时域指数函数形式

由上可知, $\chi(\omega)$ 各个元素 $\chi_{\alpha\beta}(\omega)$ 可写成 $j\omega$ 的有理分式的真分式, 可采用部分分式展开法展开为部分分式进行傅里叶逆变换. 令

$$\chi_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{B_{\alpha\beta}(j\omega)}{A(j\omega)}. \quad (21)$$

由 (14), (19) 式可知 $\chi_{\alpha\beta}(\omega)$ 的分母 $A(j\omega)$ 有 4 个单根, 即 $A(j\omega)$ 可写为

$$A(\omega) = (j\omega - a_0)(j\omega - a_1)(j\omega - a_2)(j\omega - a_3), \quad (22)$$

可解得 4 个单根为

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = -v_c, \\ a_2 &= -(v_c + j\omega_{ce}), \\ a_3 &= -(v_c - j\omega_{ce}), \end{aligned} \quad (23)$$

其中 a_0, a_1 为单数单根, a_2, a_3 为一对共轭复根

$$a_3 = a_2^*. \quad (24)$$

根据部分分式展开法, $\chi_{\alpha\beta}(\omega)$ 可展开为部分分式为

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}(\omega) &= \frac{B_{\alpha\beta}(j\omega)}{A(j\omega)} \\ &= \frac{B_{\alpha\beta}(j\omega)}{(j\omega - a_0)(j\omega - a_1)(j\omega - a_2)(j\omega - a_3)} \\ &= \sum_{i=0}^3 \frac{K_{\alpha\beta i}}{(j\omega - a_i)}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中系数

$$K_{\alpha\beta i} = (j\omega - a_i) \chi_{\alpha\beta}(\omega) \Big|_{j\omega=a_i}, \quad (26)$$

由于 a_0, a_1 为单数单根, a_2, a_3 为一对共轭复根, 故 $K_{\alpha\beta 0}, K_{\alpha\beta 1}$ 为单数, $K_{\alpha\beta 2}, K_{\alpha\beta 3}$ 为一对共轭复数. 令

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta \text{fore}}(\omega) &= \frac{K_{\alpha\beta 0}}{(j\omega - a_0)} + \frac{K_{\alpha\beta 1}}{(j\omega - a_1)}, \\ \chi_{\alpha\beta \text{aft}}(\omega) &= \frac{K_{\alpha\beta 2}}{(j\omega - a_2)} + \frac{K_{\alpha\beta 3}}{(j\omega - a_3)}, \end{aligned} \quad (27)$$

$K_{\alpha\beta 0}, K_{\alpha\beta 1}$ 为单数, 故 $\chi_{\alpha\beta \text{fore}}(\omega)$ 的傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta \text{fore}}(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{K_{\alpha\beta 0}}{(j\omega - a_0)} \right] + \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{K_{\alpha\beta 1}}{(j\omega - a_1)} \right] \\ &= [K_{\alpha\beta 0} + K_{\alpha\beta 1} \exp(-v_c t)] u(t), \end{aligned} \quad (28)$$

$K_{\alpha\beta 2}, K_{\alpha\beta 3}$ 为一对共轭复数

$$K_{\alpha\beta 3} = K_{\alpha\beta 2}^*. \quad (29)$$

令

$$K_{\alpha\beta 2} = |K_{\alpha\beta 2}| \exp(j\varphi_{\alpha\beta}), \quad (30)$$

$|K_{\alpha\beta 2}|$ 和 $\varphi_{\alpha\beta}$ 分别为 $K_{\alpha\beta 2}$ 的模和相角, 从而有

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta \text{aft}}(\omega) &= \frac{|K_{\alpha\beta 2}|}{(j\omega - a_2)} \exp(j\varphi_{\alpha\beta}) + \frac{|K_{\alpha\beta 2}|}{(j\omega - a_2^*)} \exp(-j\varphi_{\alpha\beta}) \\ &= 2|K_{\alpha\beta 2}| \cos(\varphi_{\alpha\beta}) \\ &\quad \times \left[\frac{(j\omega) + \text{Re}(a_2)}{[\text{Re}(a_2)]^2 + [\text{Im}(a_2)]^2 + 2(j\omega) \text{Re}(a_2) - \omega^2} \right] \\ &\quad - 2|K_{\alpha\beta 2}| \sin(\varphi_{\alpha\beta}) \\ &\quad \times \left[\frac{\text{Im}(a_2)}{[\text{Re}(a_2)]^2 + [\text{Im}(a_2)]^2 + 2(j\omega) \text{Re}(a_2) - \omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

上式的傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta \text{aft}}(t) &= 2|K_{\alpha\beta 2}| [\sin(\varphi_{\alpha\beta}) \sin(\omega_{ce} t) \\ &\quad + \cos(\varphi_{\alpha\beta}) \cos(\omega_{ce} t)] \exp(-v_c t) u(t). \end{aligned} \quad (32)$$

将 (28) 和 (31) 式相加得到 $\chi_{\alpha\beta}$ 的时域形式

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}(t) &= [K_{\alpha\beta 0} + K_{\alpha\beta 1} \exp(-v_c t)] u(t) \\ &\quad + 2|K_{\alpha\beta 2}| [\sin(\varphi_{\alpha\beta}) \sin(\omega_{ce} t) \\ &\quad + \cos(\varphi_{\alpha\beta}) \cos(\omega_{ce} t)] \exp(-v_c t) u(t), \end{aligned} \quad (33)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}. \quad (34)$$

改写 (33) 式即得到极化率的时域指数函数形式

$$\chi_{\alpha\beta}(t) = \sum_{r=0}^2 \text{Im} [G_{\alpha\beta r} \exp(-\gamma_{\alpha\beta r} t)] u(t), \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta 0} &= jK_{\alpha\beta 0}, \quad G_{\alpha\beta 1} = jK_{\alpha\beta 1}, \\ G_{\alpha\beta 2} &= 2|K_{\alpha\beta 2}| [\sin(\varphi_{\alpha\beta}) + j\cos(\varphi_{\alpha\beta})], \\ \gamma_{\alpha\beta 0} &= 0, \quad \gamma_{\alpha\beta 1} = v_c, \quad \gamma_{\alpha\beta 2} = v_c - j\omega_{ce}. \end{aligned} \quad (36)$$

4 磁化等离子体 SARC-FDTD 方法

频域本构关系 (3) 式和极化矢量 $\mathbf{P}$ 的分量式为

$$\begin{bmatrix} D_x(\omega) \\ D_y(\omega) \\ D_z(\omega) \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} E_x(\omega) \\ E_y(\omega) \\ E_z(\omega) \end{bmatrix} + \epsilon_0 \begin{bmatrix} P_x(\omega) \\ P_y(\omega) \\ P_z(\omega) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} P_x(\omega) \\ P_y(\omega) \\ P_z(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{xx}(\omega) & \chi_{xy}(\omega) & \chi_{xz}(\omega) \\ \chi_{yx}(\omega) & \chi_{yy}(\omega) & \chi_{yz}(\omega) \\ \chi_{zx}(\omega) & \chi_{zy}(\omega) & \chi_{zz}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(\omega) \\ E_y(\omega) \\ E_z(\omega) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

转换到时域有

$$\begin{bmatrix} D_x(t) \\ D_y(t) \\ D_z(t) \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \\ E_z(t) \end{bmatrix} + \epsilon_0 \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_y(t) \\ P_z(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

和

$$\begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_y(t) \\ P_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\beta=x}^z (\chi_{x\beta}(t) * E_{\beta}(t)) \\ \sum_{\beta=x}^z (\chi_{y\beta}(t) * E_{\beta}(t)) \\ \sum_{\beta=x}^z (\chi_{z\beta}(t) * E_{\beta}(t)) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sum_{\beta=x}^z \left(\int_0^t \chi_{x\beta}(t-\tau) E_{\beta}(\tau) d\tau \right) \\ \sum_{\beta=x}^z \left(\int_0^t \chi_{y\beta}(t-\tau) E_{\beta}(\tau) d\tau \right) \\ \sum_{\beta=x}^z \left(\int_0^t \chi_{z\beta}(t-\tau) E_{\beta}(\tau) d\tau \right) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

如前所述, 在时域中极化率张量 $\chi(t)$ 各个元素 $\chi_{\alpha\beta}(t)$ 可归结为 (35) 式所示的指数函数形式, 因此可以应用 DSP 理论中的 SARC 循环卷积公式. 令

$$P_{\alpha}(t) = \sum_{\beta=x}^z [P_{\alpha\beta}(t)], \\ P_{\alpha\beta}(t) = \int_0^t \chi_{\alpha\beta}(t-\tau) E_{\beta}(\tau) d\tau \\ = \sum_{r=0}^2 \text{Im}[\psi_{\alpha\beta r}(t)], \quad (41)$$

$$\psi_{\alpha\beta r}(t) = \int_0^t G_{\alpha\beta r} \exp(-\gamma_{\alpha\beta r} \tau) E_{\beta}(\tau) u(\tau) d\tau.$$

设时域信号用时间间隔 Δt 进行离散, 且

$$\mathbf{D}^n = \mathbf{D}(n\Delta t), \quad \mathbf{E}^n = \mathbf{E}(n\Delta t), \\ P_{\alpha}^n = P_{\alpha}(n\Delta t) = \sum_{\beta=x}^z \left[\sum_{r=0}^2 \text{Im}[\psi_{\alpha\beta r}^n] \right].$$

则 (39) 式的 SARC 结果为

$$\begin{bmatrix} D_x^n \\ D_y^n \\ D_z^n \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ E_z^n \end{bmatrix} + \epsilon_0 \begin{bmatrix} P_x^n \\ P_y^n \\ P_z^n \end{bmatrix} \\ = \epsilon_0 \begin{bmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ E_z^n \end{bmatrix} + \epsilon_0 \begin{bmatrix} \sum_{r=0}^2 \text{Im}[\psi_{xr}^n] \\ \sum_{r=0}^2 \text{Im}[\psi_{yr}^n] \\ \sum_{r=0}^2 \text{Im}[\psi_{zr}^n] \end{bmatrix}, \quad (42)$$

其中

$$\psi_{\alpha r}^n = \sum_{\beta=x}^z (\psi_{\alpha\beta r}^n), \\ \psi_{\alpha\beta r}^n = \exp(-\gamma_{\alpha\beta r} \Delta t) \psi_{\alpha\beta r}^{n-1} \\ + G_{\alpha\beta r} \exp[-\gamma_{\alpha\beta r} n\Delta t] \\ \times \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \exp(\gamma_{\alpha\beta r} \tau) E_{\beta}(\tau) d\tau. \quad (43)$$

若将 $\mathbf{E}(\tau)$ 在区间 $\tau \in [(n-1)\Delta t, n\Delta t]$ 采用线性插值近似, 即

$$\mathbf{E}(\tau) = \mathbf{E}^{n-1} + \frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} (\tau - n\Delta t), \quad (44)$$

代入到 (43) 式就可以得到电场强度 $\mathbf{E}$ 到辅助变量 ψ 的 SARC 步进计算公式

$$\psi_{\alpha\beta r}^n = \exp(-\gamma_{\alpha\beta r} \Delta t) \psi_{\alpha\beta r}^{n-1} + c_{\alpha\beta 0, r} E_{\beta}^n + c_{\alpha\beta 1, r} E_{\beta}^{n-1} \\ (\alpha, \beta = x, y, z), \quad (45)$$

其中

$$c_{\alpha\beta 0, r} = \begin{cases} \frac{G_{\alpha\beta r} \Delta t}{2} & \gamma_{\alpha\beta r} = 0 \\ \frac{G_{\alpha\beta r}}{\gamma_{\alpha\beta r}} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\Delta t \gamma_{\alpha\beta r})}{\gamma_{\alpha\beta r} \Delta t} \right) & \gamma_{\alpha\beta r} \neq 0 \end{cases}, \\ c_{\alpha\beta 1, r} =$$

$$\begin{cases} \frac{G_{\alpha\beta r}\Delta t}{2} & \gamma_{\alpha\beta r} = 0 \\ \frac{G_{\alpha\beta r}}{\gamma_{\alpha\beta r}} \left(\frac{1 - \exp(-\Delta t \gamma_{\alpha\beta r})}{\gamma_{\alpha\beta r} \Delta t} - \exp(-\Delta t \gamma_{\alpha\beta r}) \right) & \\ \gamma_{\alpha\beta r} \neq 0 \end{cases} \quad (46)$$

磁化等离子体的 Maxwell 旋度方程为

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = -(\nabla \times \mathbf{E}) / \mu_0, \quad (47)$$

$$\partial \mathbf{D} / \partial t = \nabla \times \mathbf{H}. \quad (48)$$

对 (47) 式进行 FDTD 离散就可以得到电场强度 $\mathbf{E}$ 到磁场强度 $\mathbf{H}$ 的 FDTD 步进计算公式

$$\mathbf{H}^{n+1/2} = \mathbf{H}^{n-1/2} - (\Delta t / \mu_0) [\nabla \times \mathbf{E}]^n. \quad (49)$$

将 (42) 式代入 (48) 式的 FDTD 离散式, 得到

$$\begin{aligned} & (\Delta t / \epsilon_0) [\nabla \times \mathbf{H}]_{\alpha}^{n+1/2} \\ & = (E_{\alpha}^{n+1} - E_{\alpha}^n) + (P_{\alpha}^{n+1} - P_{\alpha}^n) \quad (\alpha = x, y, z). \end{aligned} \quad (50)$$

将 (41), (45) 式代入 (50) 式即可求出磁场强度 $\mathbf{H}$ 和辅助变量 ψ 到电场强度 $\mathbf{E}$ 的步进计算公式

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}^{n+1} = \frac{\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{C}|}, \quad (51)$$

其中 $\mathbf{C}^*$, $|\mathbf{C}|$ 为 $\mathbf{C}$ 矩阵的伴随矩阵和行列式, 以及有

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{xx0,r}) & \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{xy0,r}) & \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{xz0,r}) \\ \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{yx0,r}) & 1 + \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{yy0,r}) & \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{yz0,r}) \\ \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{zx0,r}) & \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{zy0,r}) & 1 + \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{zz0,r}) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} [\nabla \times \mathbf{H}]_x^{n+1/2} \\ [\nabla \times \mathbf{H}]_y^{n+1/2} \\ [\nabla \times \mathbf{H}]_z^{n+1/2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\beta=x}^z \left\{ \sum_{r=0}^2 \text{Im} \left\{ [1 - \exp(-\gamma_{x\beta r} \Delta t)] \psi_{x\beta r}^n \right\} \right\} \\ \sum_{\beta=x}^z \left\{ \sum_{r=0}^2 \text{Im} \left\{ [1 - \exp(-\gamma_{y\beta r} \Delta t)] \psi_{y\beta r}^n \right\} \right\} \\ \sum_{\beta=x}^z \left\{ \sum_{r=0}^2 \text{Im} \left\{ [1 - \exp(-\gamma_{z\beta r} \Delta t)] \psi_{z\beta r}^n \right\} \right\} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 - \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{xx1,r}) & -\sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{xy1,r}) & -\sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{xz1,r}) \\ -\sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{yx1,r}) & 1 - \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{yy1,r}) & -\sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{yz1,r}) \\ -\sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{zx1,r}) & -\sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{zy1,r}) & 1 - \sum_{r=0}^2 \text{Im}(c_{zz0,r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}^n. \end{aligned} \quad (53)$$

最后可以将磁化等离子体的 SARC-FDTD 步进计算步骤总结如下:

1) 由 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, 用 (49) 式计算; 2) 由 $\mathbf{E} \rightarrow \psi$, 用 (45) 式计算; 3) 由 $\psi, \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, 用 (51) 式计算; 4) 回到步骤 1)。

5 算例验证及数值结果

计算非磁化等离子体球的后向 RCS (退化验

证). 球的半径为 1.0 m, 等离子体电子回旋频率为 $\omega_{ce} = 0$, 等离子体频率为 $\omega_p = 2\pi \times 28.7 \times 10^9$ rad/s, 等离子碰撞频率为 $\nu_c = 2.0 \times 10^{10}$ Hz. FDTD 计算中 $\delta = 5$ cm, $\Delta t = \delta / (2c)$, c 为光速, 入射波为高斯脉冲 $E_x(t) = \exp\left[-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right]$, 沿着 z 轴入射, x 方向极化, 其中 $\tau = 5$ ns 和 $t_0 = 0.8\tau$. 计算结果如图 2 所示, 其中实线为本文方法结果, 圆圈表示用移位算子法^[11]的计算结果, 两者符合得非常好。

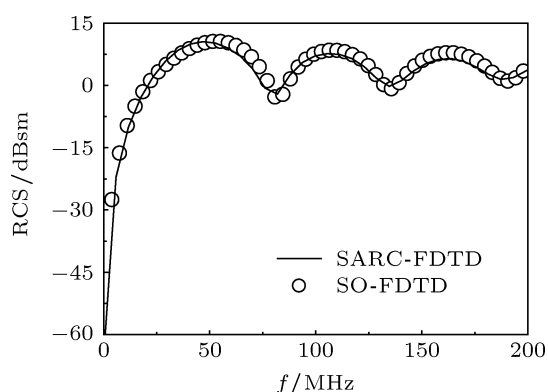


图2 等离子体球的后向 RCS

当外加磁场平行于 z 轴时, 设等离子体电子回旋频率为 $\omega_{ce} = 3.0 \times 10^{11}$ rad/s. 计算得到该磁化等离子体球的同极化以及交叉极化后向 RCS, 分别在图 3(a), (b) 中用实线表示, 作为比较图 3 中同时给出 RC-FDTD 方法的结果 [18] (如图 3 中圆圈所示),

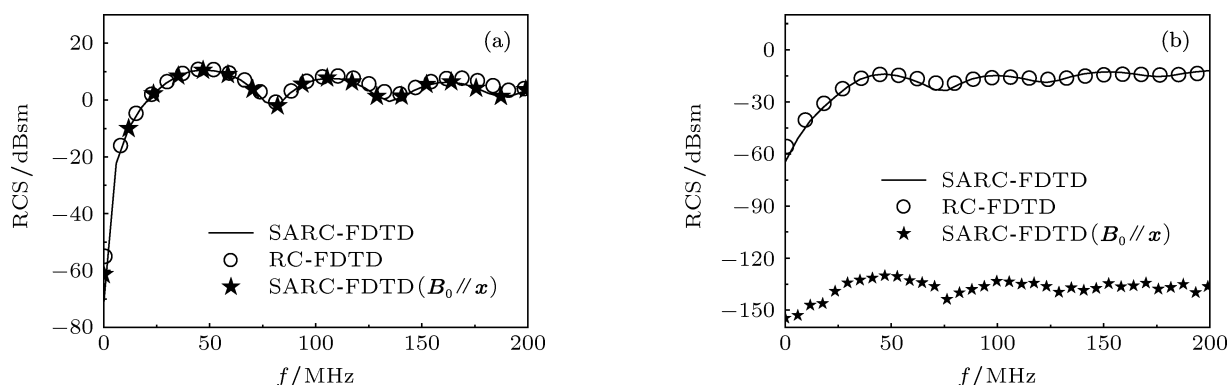


图3 磁化等离子体球的后向 RCS (a) 同极化; (b) 交叉极化

两者符合得非常好. 由于本文方法适用于处理任意磁化方向的等离子体目标, 因此同时计算了外磁场沿 x 轴正向时该等离子体球的后向 RCS (如图 3 中五角星所示).

6 结论

将 DSP 技术中被广泛应用的 SARC 方法应用于磁化等离子体介质的 FDTD 分析, 首先利用坐标系转换矩阵给出实验室系中磁化等离子体介质的频域极化率张量, 再采用部分分式展开方法通过傅里叶逆变换得到极化率张量的时域指数函数形式, 最后在对电场强度采用线性插值近似基础上应用 SARC 算法, 给出适用于处理任意外磁场方向情形下磁化等离子体目标电磁散射的 SARC-FDTD 计算方法, 并采用该方法计算了非磁化和磁化等离子体球的后向 RCS, 与 SO 法和 RC 方法的结果符合得很好. 数值结果表明, 该方法是正确有效的.

- [1] Luebbers R J, Hunsberger F, Kunz K S 1991 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **39** 29
- [2] Kelley D F, Lubbers R J 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **44** 792
- [3] Chen Q, Katsurai M, Aoyagi P H 1998 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **46** 1739
- [4] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 778 (in Chinese) [刘少斌, 莫锦军, 袁乃昌 2004 物理学报 **53** 778]
- [5] Xu L J, Yuan N C 2005 *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.* **15** 277
- [6] Nickisch L J, Franke P M 1992 *IEEE Antennas Propagat. Mag.* **34** 33
- [7] Takayama Y, Klaus W 1994 *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.* **12** 102
- [8] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1223
- [9] Sullivan D M 1995 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **43** 676
- [10] Sullivan D M 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **44** 28
- [11] Ge D B, Wu Y L, Zhu X Q 2003 *Chin. J. Radio Sci.* **18** 359 (in Chinese) [葛德彪, 吴跃丽, 朱湘琴 2003 电波科学学报 **18** 359]
- [12] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4573 (in Chinese) [张玉强, 葛德彪 2009 物理学报 **58** 4573]
- [13] Hunsberger F, Lubbers R J, Kunz K S 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1489
- [14] Young L J 1994 *Radio Sci.* **29** 1513
- [15] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 783 (in Chinese) [刘少斌, 莫锦军, 袁乃昌 2004 物理学报 **53** 783]
- [16] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *IEEE Microw. Wireless Compon. Lett.* **14** 222
- [17] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2233 (in Chinese) [刘少斌, 莫锦军, 袁乃昌 2004 物理学报 **53** 2233]
- [18] Yang L X, Ge D B, Wei B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4509 (in Chinese)

- [杨利霞, 葛德彪, 魏兵 2007 物理学报 **56** 4509]
- [19] Janke W, Blakiewicz G 1995 *IEE Proc. Circuits Dev. Syst.* **142** 125
- [20] Pietrenko W, Janke W, Kazimierzczuk M K 2001 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **48** 1246
- [21] Ge D B, Yan Y B 2011 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (3th Ed.) (Xi'an: Xidian University Press) p259 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2005 电磁波时域有限差分法 (第三版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 259 页]
- [22] Bi D X 1985 *Electromagnetic Field Theory* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) p434 (in Chinese) [毕德显 1985 电磁场理论 (北京: 电子工业出版社) 第 434 页]
- [23] Kong J A 2002 *Electromagnetic Wave Theory* (Beijing: Higher Education Press) p333

Semi-analytical recursive convolution algorithm in the finite-difference time domain analysis of anisotropic dispersive medium*

Wang Fei[†] Wei Bing

(Department of Physics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 8 July 2012; revised manuscript received 26 September 2012)

Abstract

The polarizability tensor of magnetized plasma in frequency domain in laboratory coordinate system is gained by using the transfer matrix between the principal and the laboratory system, and then its exponential function form in time domain is derived by inverse Fourier transform. Combined with the semi-analytical recursive convolution (SARC) algorithm in digital signal process techniques, the SARC-finite-difference time-domain method applied to magnetized plasma subjected to an arbitrary direction of external dc magnetic field is derived. The co-polarized and cross-polarized backward radar scattering cross-section for a magnetized plasma sphere are obtained by the presented algorithm. The computed results indicate the correctness and feasibility of the method.

Keywords: semi-analytical recursive convolution, magnetized plasma, electromagnetic scattering, finite-difference time-domain method

PACS: 41.20.Jb

DOI: 10.7498/aps.62.044101

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA01A308) and the Basic Science Research Fund in Xidian University, China (Grant No. K50511070007).

[†] Corresponding author. E-mail: wfei1021@yahoo.com.cn