

## 非局域暗孤子及其稳定性分析\*

高星辉<sup>1)2)</sup> 张承云<sup>1)</sup> 唐冬<sup>1)</sup> 郑晖<sup>1)</sup> 陆大全<sup>2)</sup> 胡巍<sup>2)†</sup>

1) (广州大学电子信息工程系, 广州 510006)

2) (华南师范大学, 光子信息技术广东省高校重点实验室, 广州 510631)

(2012年7月4日收到; 2012年8月13日收到修改稿)

由于其在通信领域潜在的应用前景, 非局域空间孤子一直是研究热点. 但空间非局域暗孤子由于其边界的特殊性, 对其特别是稳定性方面研究甚少. 提出了非局域暗孤子稳定性分析理论, 并对热非线性体介质中 1+1 维基态和二阶暗孤子的稳定性进行了数值分析和研究, 得到了稳定性图. 从稳定性分析图可知: 在热非线性体介质中, 1+1 维基态暗孤子在其存在区域总是稳定的, 而 1+1 维二阶暗孤子是震荡不稳定的, 其不稳定区域的宽度与传播常数以及介质的非局域程度有关. 为了验证非局域暗孤子稳定性分析理论的正确性, 对加噪声初始输入的传输进行数值模拟得到了传输图, 传输图表明稳定性分析理论的正确性.

关键词: 非局域, 稳定性, 暗孤子

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Jx

DOI: 10.7498/aps.62.044214

## 1 引言

近些年来, 非局域空间孤子一直是研究的热点, 人们对它们的各种特性例如相互作用、稳定性进行了大量研究. 体介质中非局域亮孤子间的相互作用取决于它们间的相位差、相干程度、材料的非线性非局域程度<sup>[1-3]</sup>; 非局域基态和二阶体亮孤子总是稳定的, 而高阶亮孤子是震荡不稳的<sup>[4]</sup>, 但如果样品的宽度超过一临界值, 三阶、四阶体亮孤子在其存在区域也总是稳定的<sup>[5]</sup>. 非局域表面亮孤子的稳定性与体亮孤子的稳定性相似: 基态和二阶表面亮孤子总是稳定的, 高阶表面亮孤子是震荡不稳的<sup>[6-9]</sup>. 非局域基态界面亮孤子总是稳定的, 二阶及以上高阶界面亮孤子是震荡不稳的<sup>[10-12]</sup>.

与非局域亮孤子相比, 由于其边界的特殊性, 对非局域暗孤子相互作用及其稳定性的研究甚少. 非局域暗孤子间的相互作用取决于孤子间距离以及介质的非局域程度<sup>[13-16]</sup>, 并存在着一个相互作用的临界点<sup>[17]</sup>. 1+2 维非局域暗孤子由于横向不稳定性容易分裂并演变成涡旋孤子<sup>[18]</sup>, 1+1 维非局域

暗孤子的稳定性如何, 目前还没有文章对其进行过具体研究. 本文从 1+1 维非局域非线性薛定谔方程出发, 通过数值模拟得到非局域暗孤子解, 然后提出了暗孤子稳定性分析理论, 并对其数值求解得到了非局域暗孤子的稳定性分析图, 最后利用加噪声的传输验证了稳定性分析理论的正确性.

## 2 非局域非线性薛定谔方程的数值解

## 2.1 理论模型

在傍轴近似下, 1+1 维光束在热非线性体介质(比如液晶)中的传输由非局域非线性薛定谔方程确定(NNLSE):<sup>[19]</sup>

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \int R(x-\xi) |u(\xi, z)|^2 d\xi = 0, \quad (1)$$

其中  $u(x, z)$  是光束的复振幅包络;  $x, z$  分别为横坐标和纵坐标;  $R(x)$ ,  $\left(\int R(x) dx = 1\right)$  是实对称的非局域响应函数,  $\Delta n(x, z) = -\int R(x-\xi) |u(\xi, z)|^2 d\xi$  是光束引起热非线性体介质的折射率变化.

\* 国家自然科学基金(批准号: 10804033, 11174090, 11174091)、广东省高等学校科技创新团队计划(批准号: 06CXTD005)和教育部高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 200805740002)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: huwei@snu.edu.cn

不失一般性, 我们考虑热非线性体介质的归一化响应函数为  $R(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$  [20,21], 其中  $\sigma$  是表征介质非局域程度的非局域系数,  $\sigma$  越大表示非局域程度越高. 这样方程 (1) 就可以用如下耦合方程来表示:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\Delta n &= 0, \\ \sigma^2\frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n - |u|^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

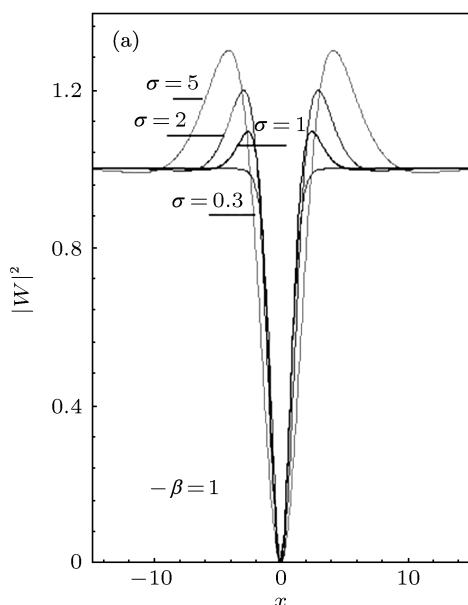
当  $\sigma \rightarrow 0$  时, 该耦合方程就变成局域非线性薛定谔方程.

## 2.2 非局域暗孤子数值解

耦合方程 (2) 有暗孤子和灰孤子解, 这里考虑暗孤子解. 设耦合方程 (2) 的解为  $u(x, z) = W(x)\exp(i\beta z)$ ,  $n(x, z) = N(x)$ , 其中  $W(x)$ ,  $N(x)$  为实数,  $\beta$  为传播常数且为负数. 将它们代入耦合方程 (2) 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta W + NW &= 0, \\ N - \sigma^2\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + |W|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

对耦合方程 (3) 利用牛顿迭代法进行数值模拟得到基态暗孤子和二阶暗孤子解 (见图 1), 边界上我们令振幅、折射率的导数为零, 离散化方程时边界条件利用三点微分公式.



## 3 非局域暗孤子稳定性分析

### 3.1 稳定性分析理论

下面分析非局域暗孤子对横向扰动的稳定性. 对耦合方程 (2) 引入扰动解

$$\begin{aligned} u(x, z) &= [W(x) + a(x, z)]\exp(i\beta z), \\ n(x, z) &= N(x) + b(x, z), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $a(x, z)$ ,  $b(x, z)$  ( $a \ll W$ ,  $b \ll N$ ) 分别为振幅和折射率微扰且都为实数. 将方程 (4) 代入 (2) 式并围绕 (3) 式线性化且忽略高阶项得到关于  $a, b$  的线性方程

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta\right)a + Na + Wb &= 0, \\ \left(\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right)b = W^*a + a^*W. \end{aligned} \quad (5)$$

方程 (5) 有如下形式的解:

$$a = a_+(x)\exp(i\lambda z) + a_-(x)\exp(-i\lambda^*z), \quad (6)$$

把 (6) 式代入方程 (5) 得

$$\begin{aligned} [(L_0 + WL_d^{-1}W^* - \lambda)a_+ + WL_d^{-1}Wa_+] \\ \times \exp(i\lambda z) + [(L_0 + WL_d^{-1}W^* + \lambda^*)a_- \\ + WL_d^{-1}Wa_+] \exp(-i\lambda^*z) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $L_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta + N$ ,  $L_d = \sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1$ .

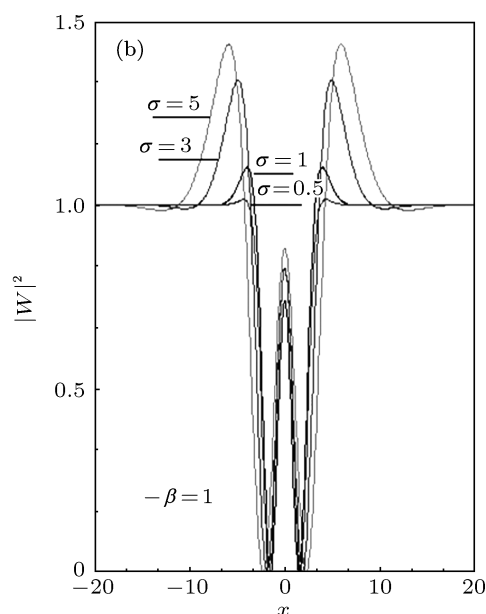


图 1 非局域暗孤子数值解 (a) 不同  $\sigma$  对应的基暗孤子; (b) 不同  $\sigma$  对应的二阶暗孤子

从方程 (7) 可以得到

$$(L_0 + WL_d^{-1}W^* - \lambda)a_+ + WL_d^{-1}Wa_-^* = 0, \quad (8)$$

$$(L_0 + WL_d^{-1}W^* + \lambda^*)a_- + WL_d^{-1}Wa_+^* = 0. \quad (9)$$

对 (9) 式取共轭得到

$$(L_0 + W^*L_d^{-1}W + \lambda)a_-^* + W^*L_d^{-1}W^*a_+ = 0. \quad (10)$$

这样由 (8), (10) 两式组成的方程组就变成了求本征值方程 (本征值为  $\lambda$ ) 的问题

$$Aa = \lambda a,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} L_0 + UL_d^{-1}U^* & UL_d^{-1}U \\ -U^*L_d^{-1}U^* & -L_0 - U^*L_d^{-1}U \end{pmatrix},$$

本征函数

$$a = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_-^* \end{pmatrix}.$$

在边界上我们令振幅、折射率的导数为零, 离散化方程时对边界条件用三点微分公式. 非局域暗孤子的不稳定性来源于本征值虚部的负数 (见 (6) 式), 即扰动随着本征值虚部的负数  $g = -\text{Im}(\lambda)$  指数增长, 从而导致暗孤子不稳定.

### 3.2 稳定性分析图

对上述本征值方程进行数值求解并得到稳定性分析图. 从稳定性分析图发现, 与基态非局域亮孤子一样, 基态非局域暗孤子在它存在区域内总是稳定的 (见图 2), 二阶非局域暗孤子是区间不稳定的 (见图 3), 而二阶非局域亮孤子在其存在区域总是稳定的 [9]. 为了验证稳定性分析结果的正确性, 我们令耦合方程 (2) 的加噪声初始输入为  $u(x, z = 0) = W(x)[1 + \rho(x)]$ , 其中  $\rho(x)$  为高斯分布的随机噪声且方差  $\delta^2 = 0.03$ . 将上述初始输入代入方程 (2) 并利用菱形差分法进行数值模拟得到加噪的孤子传输图, 边界上令振幅、折射率的导数为零.

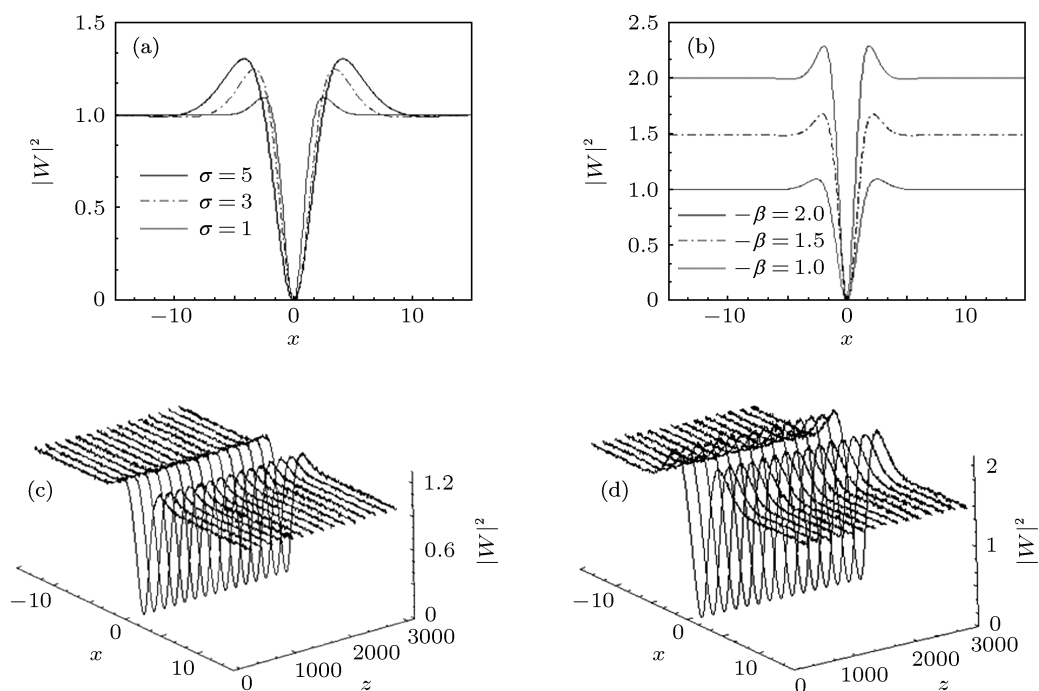


图 2 基态暗孤子波形图 (a) 相同  $\beta$ , 不同  $\sigma$  的波形; (b) 相同  $\sigma$ , 不同  $\beta$  的波形, 基态暗孤子的加噪传输图; (c)  $\sigma = 1, \beta = -1$  时的传输图; (d)  $\sigma = 3, \beta = -1.5$  时的传输图

图 2 (c), (d) ( $\sigma, \beta$  为基态暗孤子存在区域内的任意值) 为加噪后基态暗孤子传输图, 其中图 2(c) 中介质的非局域程度为  $\sigma = 1$  且传播常数  $\beta = -1$ , 图 2(d) 中  $\sigma = 3$  且  $\beta = -1.5$ . 从图 2 中可以看出,

加了微扰的基态暗孤子传输 3000 个瑞利距离后波形仍然保持不变, 并且无论非局域程度和传播常数为任何值, 这说明基态暗孤子在其存在领域内总是稳定的.

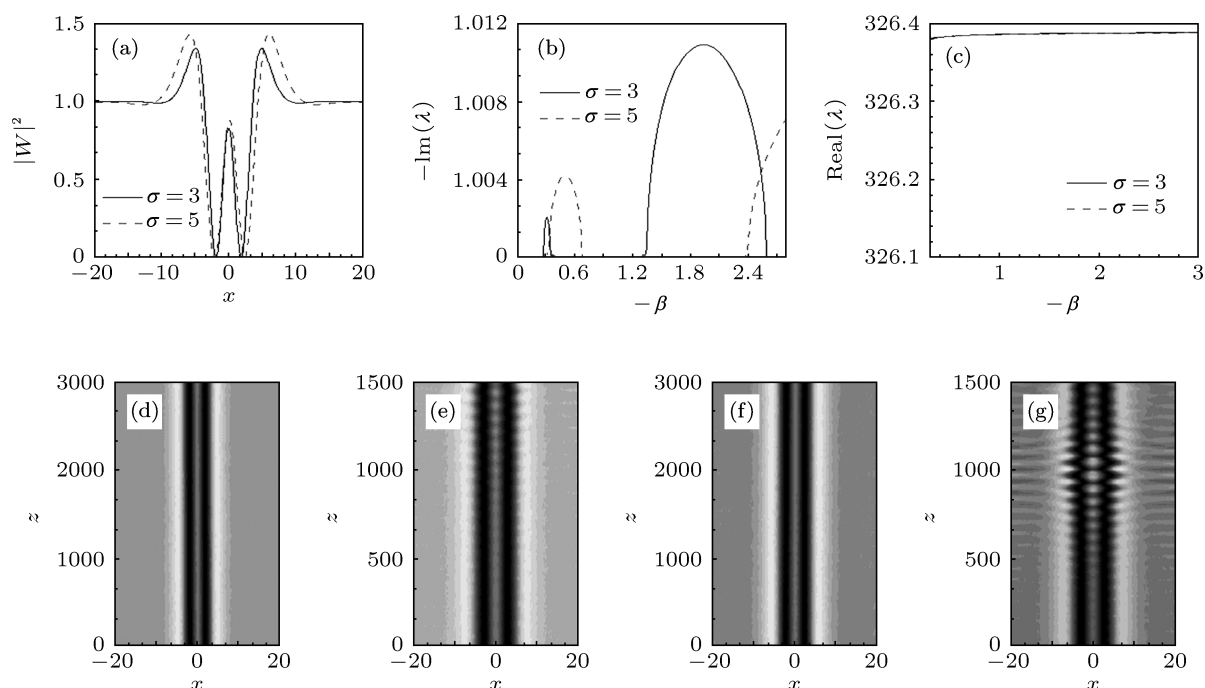


图3 二阶暗孤子波形图 (a) 相同  $\beta$ , 不同  $\sigma$  的二阶暗孤子波形; (b) 扰动增长率虚部的负数 - 传播常数图 (稳定性分析图),  $\sigma = 3, 5$ ; (c) 本征实部 - 传播常数图; 二阶暗孤子的加噪传输图; (d)  $\sigma = 3, \beta = -1$ ; (e)  $\sigma = 3, \beta = -0.3$ ; (f)  $\sigma = 5, \beta = -1$ ; (g)  $\sigma = 5, \beta = -0.5$

图 3(b) 为二阶非局域暗孤子稳定性分析图, 其中横坐标为传播常数的负数, 纵坐标为本征方程中本征值虚部的负数. 从图 3(b) 可以看出, 二阶非局域暗孤子是区域不稳定的, 在曲线内暗孤子不稳, 曲线外稳定, 图 3(d)–(g) 验证了稳定性分析图的正确性. 图 3(d), (e) 分别为  $\sigma = 3$  而  $\beta$  为在不稳定区域内、外取一任意值时加噪二阶暗孤子传输图, 图 3(d) (稳定区取  $\beta = -1$ ) 表明在加噪传输 3000 个瑞利距离后二阶暗孤子波形仍然保持不变, 图 3(e) (不稳定区取  $\beta = -0.3$ ) 表明在加噪传输 1500 个瑞利距离后二阶暗孤子波形已经严重变形; 图 3(f), (g) 分别为  $\sigma = 5$  而  $\beta$  在不稳定区内、外取一任意值时加噪二阶暗孤子的传输图. 从图 3 可以得出结论: 二阶非局域暗孤子的稳定性与亮孤子的不一样, 它是区间不稳定的, 并且不稳定区间的大小与体介质非局域程度  $\sigma$  以及传播常数  $\beta$  有关系, 更高阶的非局域暗孤子也有类似性质. 另外, 不稳定区间的大小与暗孤子的阶数也有关系, 这些我们将在以后

讨论.

局域暗孤子间总是排斥的, 非局域暗孤子间可以表现为相互吸引, 高阶非局域暗孤子可以看成是几个基态暗孤子的束缚态, 只有当非局域程度、孤子宽度以及非线性 (传播常数和背景强度) 等条件合适时才可以形成稳定的高阶非局域暗孤子, 否则形成的暗孤子是不稳定的.

## 4 结论

与基态、二阶亮孤子一样, 基态非局域暗孤子在其存在领域内总是稳定的, 而二阶非局域暗孤子是区间不稳定的, 其不稳定区间的大小与介质的非局域程度以及传播常数有关系, 另外还与暗孤子的阶数有关系. 这一结论对非局域暗孤子的实际应用和相互作用的研究有一定的参考价值, 特别是对高阶暗孤子稳定性的研究有重要的指导和参考意义.

- [1] Hu W, Zhang T, Guo Q, Xuan L, Lan S 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 071111  
 [2] Cao J N, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3688 (in Chinese) [曹觉能, 郭旗 2005 物理学报 **54** 3688]

- [3] Jiang D S, Ouyang S G, She W L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3777 (in Chinese) [江德生, 欧阳世根, 余卫龙 2004 物理学报 **53** 3777]  
 [4] Xu Z Y, Kartashov Y V, Torner L 2005 *Opt. Lett.* **30** 3171  
 [5] Dong L W, Ye F W 2010 *Phys. Rev. A* **81** 013815

- [6] Kartashov Y V, Vysloukh V A, Torner L 2009 *Opt. Lett.* **34** 283
- [7] Kartashov Y V, Torner L 2006 *Opt. Lett.* **31** 2172
- [8] Yang Z J, Ma X K, Lu D Q, Zheng Y Z, Gao X H, Hu W 2011 *Opt. Express* **19** 4890
- [9] Ye F W, Kartashov Y V, Torner L 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033829
- [10] Ma X K, Yang Z J, Lu D Q, Guo Q, Hu W 2011 *Phys. Rev. A* **83** 033829
- [11] Ma X K, Yang Z J, Lu D Q, Guo Q, Hu W 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053831
- [12] Ma X K, Yang Z J, Lu D Q, Guo Q, Hu W 2011 *Phys. Rev. A* **83** 033802
- [13] Dreischuh A, Neshev D N, Petersen D E, Bang O, Krolikowski W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 043901
- [14] Nikolov N I, Neshev D, Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Christiansen P L 2004 *Opt. Lett.* **29** 286
- [15] Fischer R, Neshev D N, Krolikowski W, Kivshar Y S, Iturbe-Castillo D, Chavez-Cerda S, Meneghetti M R, Caetano D P, Hickman J M 2006 *Opt. Lett.* **31** 3010
- [16] Kong Q, Wang Q, Bang O, Krolikowski W 2010 *Opt. Lett.* **35** 2152
- [17] Gao X H, Yang Z J, Zhou L H, Zheng Y Z, Lu D Q, Hu W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084213 (in Chinese) [高星辉, 杨振军, 周罗红, 郑一周, 陆大全, 胡巍 2011 物理学报 **60** 084213]
- [18] Armaroli A, Trillo S, Fratolocchi A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 053803
- [19] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
- [20] Wyller J, Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 066615
- [21] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612

## Nonlocal dark soliton and its linear stability analysis\*

Gao Xing-Hui<sup>1)2)</sup> Zhang Cheng-Yun<sup>1)</sup> Tang Dong<sup>1)</sup> Zheng Hui<sup>1)</sup>  
Lu Da-Quan<sup>2)</sup> Hu Wei<sup>2)</sup>†

1) (Department of Electrical and Information Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

2) (Laboratory of Photonic Information Technology, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(Received 4 July 2012; revised manuscript received 13 August 2012)

### Abstract

Due to its future use in communication area, nonlocal spatial optical soliton has been a hot research topic recently. However, because of its special border condition, little research has been done on spatial dark solitons especially on its linear stability. In this paper, a method to analyze linear stability of nonlocal spatial dark soliton is put forward, moreover a numerical simulation and analysis is done on the linear stability of (1+1)-dimensional fundamental and second-order dark soliton in thermal nonlinear medium. Numerical results show that (1+1)-dimensional fundamental nonlocal dark solitons are always stable in their entire existence domain, while second-order dark solitons are oscillatorily unstable and the width of unstable domain depends on propagation constant and nonlocality degree of thermal nonlinear medium. The propagation graphs of initial input with noise addition confirms the correctness of linear stability analysis results.

**Keywords:** nonlocal, linear stability, dark solitons

**PACS:** 42.65.Tg, 42.65.Jx

**DOI:** 10.7498/aps.62.044214

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10804033, 11174090, 11174091), the Science Technology Innovative Research Team Program of Institution of Higher Education of Guangdong Province, China (Grant No. 06CXTD005), and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education, China (Grant No. 200805740002).

† Corresponding author. E-mail: huwei@scnu.edu.cn