

大气湍流中光束的高阶强度矩*

李晓庆¹⁾²⁾ 季小玲²⁾ 朱建华^{1)†}

1) (四川大学物理科学与技术学院, 成都 610064)

2) (四川师范大学物理学院, 成都 610068)

(2012年5月14日收到; 2012年9月21日收到修改稿)

研究了光束通过大气湍流传输的高阶强度矩, 提出了大气湍流中光束高阶强度矩的推导方法, 并推导出了一至四阶光束强度矩传输的解析表达式. 所得结果具有一般性, 任意某一光束在自由空间和大气湍流中传输的高阶强度矩均可作为本文结果的特例. 另一方面, 以高斯光束为例, 研究了其 K 参数在湍流大气中的传输规律. 研究表明, 高斯光束在大气湍流中其 K 参数并不是一个传输不变量, 它与传输距离、束腰半径、湍流内外尺度以及湍流强度均有关. 这个结论与采用 Rytov 相位结构函数二次近似或强湍流近似下的结论不同, 本文给出了合理解释.

关键词: 高阶强度矩, 大气传输, 大气湍流, K 参数

PACS: 42.68.Bz, 42.25.Bs

DOI: 10.7498/aps.62.044217

1 引言

强度矩是研究激光束传输特性的重要参数, 许多重要光束特性参数都可由各阶强度矩表示, 如一阶矩描述了光束的重心, 二阶矩描述了束宽、远场发散角、光束的曲率半径和光束传输因子等, 三阶矩和四阶矩分别描述了光束的偏斜度和平整度等. Weber^[1] 研究了光束在二次折射率介质中传输的高阶矩, 并给出了高阶矩的表达式, 但文中仅考虑了一维光束情况. 另一方面, 激光束的大气传输特性对遥感、跟踪和远距离光通信等应用有重要的意义^[2], 国内外同行对此做了大量的研究^[3-14]. 目前, 大气湍流中光束的强度矩的研究仅限于光束二阶矩或某一特定光束高阶强度矩, 如文献 [15] 给出了部分相干光束通过大气湍流的二阶矩传输公式; 文献 [16, 17] 分别研究了超高斯光束和 Airy 光束在大气湍流中的高阶强度矩. 本文将研究任意光束的高阶强度矩在大气湍流中的传输规律.

从实验的观点看, 只有光束的一至四阶矩是有意义的, 高于四阶矩则存在很大的误差并难以测量^[1]. 本文采用维格纳分布函数 (WDF)^[18], 提出了

大气湍流中光束高阶强度矩的推导方法, 并推导出了一至四阶光束强度矩传输的解析表达式, 该结果具有一般性, 任意某一光束 (包括相干光和部分相干光) 在自由空间和大气湍流中传输的高阶强度矩均可作为本文结果的特例给出.

另一方面, 本文以高斯光束为例, 研究了其 K 参数在湍流大气中的传输规律. 众所周知, 高斯光束在自由空间传输其 K 参数保持不变. 本文研究发现, 高斯光束在大气湍流中其 K 参数并不是一个传输不变量. 这个结论是在没有采用近似条件情况下得到的, 它与采用 Rytov 相位结构函数二次近似或强湍流近似所得的结论是不同的, 本文给出了合理的解释. 并指出, 研究光束在湍流中的四阶强度矩时采用这两种近似是不合适的.

2 高阶强度矩的推导

根据广义惠更斯-菲涅耳原理, 光束通过大气湍流传输到 z 平面处的交叉谱密度可以表示为^[2]

$$W(\rho_1, \rho_2, z)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 61178070) 和中国科学院大气成分与光学重点实验室开放基金 (批准号: JJ-10-08) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhujh@scu.edu.cn

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho'_1, \rho'_2, 0) \\
 &\quad \times \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(\rho'_1 - \rho_1)^2 - (\rho'_2 - \rho_2)^2]\right. \\
 &\quad \left. - H(\rho_1; \rho_2, \rho'_1; \rho'_2, z)\right\} d^2\rho'_1 d^2\rho'_2, \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中, ρ'_1, ρ'_2 和 ρ_1, ρ_2 分别为 $z=0$ 平面上和 z 平面上的横向矢量, k 是波数 ($k=2\pi/\lambda$, λ 是波长). $W(\rho'_1, \rho'_2, 0)$ 为光束在 $z=0$ 平面上的交叉谱密度, $\exp[-H]$ 代表湍流的影响, 可以表示为 [2]

$$\begin{aligned}
 &H(\rho_1; \rho_2, \rho'_1; \rho'_2, z) \\
 &= 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) \left[1 - J_0(\kappa|\xi(\rho'_1 - \rho'_2)\right. \\
 &\quad \left.+ (1-\xi)(\rho_1 - \rho_2)|)\right] d\kappa d\xi, \quad (2)
 \end{aligned}$$

(2) 式中, $J_0(\cdot)$ 为零阶贝塞尔函数, $\Phi_n(\kappa)$ 为湍流大气介质的折射率起伏空间谱密度函数.

引入新积分变量 $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$, $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$, $\rho' = (\rho'_1 + \rho'_2)/2$ 和 $\rho'_d = \rho'_1 - \rho'_2$, 则 (1) 式和 (2) 式可以写为

$$\begin{aligned}
 &W(\rho, \rho_d, z) \\
 &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho', \rho'_d, 0) \\
 &\quad \times \exp\left\{\frac{ik}{z} [(\rho - \rho') \cdot (\rho_d - \rho'_d)]\right. \\
 &\quad \left. - H(\rho_d, \rho'_d, z)\right\} d^2\rho' d^2\rho'_d, \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &H(\rho_d, \rho'_d, z) \\
 &= 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) \left[1 - J_0(\kappa|\xi\rho'_d + (1-\xi)\rho_d)\right] d\kappa d\xi. \quad (4)
 \end{aligned}$$

为了能够推导出解析结果, 将 $J_0(\cdot)$ 展开成无限项求和形式, 则 (4) 式可写为 [19]

$$\begin{aligned}
 &H(x_d, y_d; x'_d, y'_d, z) \\
 &= 4\pi^2 k^2 z \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(j!)^2 2^{2j}} \int_0^1 \int_0^\infty \kappa^{2j+1} \Phi_n(\kappa) \\
 &\quad \times [(\xi x'_d + (1-\xi)x_d)^2 \\
 &\quad + (\xi y'_d + (1-\xi)y_d)^2]^j d\kappa d\xi. \quad (5)
 \end{aligned}$$

光束的 WDF 可以用交叉谱密度表示为 [18]

$$h(\rho, \theta, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho, \rho_d, z)$$

$$\times \exp(-ik\theta \cdot \rho_d) d^2\rho_d, \quad (6)$$

其中 $\theta = (\theta_x, \theta_y)$, $k\theta_x$ 和 $k\theta_y$ 分别是波矢量沿 x 轴和 y 轴的分量.

光束的 $n_1 + n_2 + m_1 + m_2$ 阶强度矩可用 WDF 定义为 [15-18]

$$\begin{aligned}
 &\langle x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \rangle \\
 &\equiv \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} h(\rho, \theta, z) d^2\rho d^2\theta \\
 &= \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho', \theta', z) h(\rho', \theta', 0) d^2\rho' d^2\theta', \quad (7)
 \end{aligned}$$

其中 $P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\rho, \theta, z) d^2\rho d^2\theta$ 是光束的总能量, $h(\rho', \theta', 0)$ 是 $z=0$ 平面处的 WDF. 并且

$$\begin{aligned}
 &G(\rho', \theta', z) \\
 &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \\
 &\quad \times \exp\left\{\frac{ik}{z} [(\rho - \rho') \cdot (\rho_d - \rho'_d)]\right. \\
 &\quad \left. + ik\theta' \cdot \rho'_d - ik\theta \cdot \rho_d - H(\rho_d, \rho'_d, z)\right\} \\
 &\quad \times d^2\rho d^2\theta d^2\rho'_d d^2\theta'_d. \quad (8)
 \end{aligned}$$

对 (8) 式中的 ρ, θ 积分后可以得到

$$\begin{aligned}
 &G(\rho', \theta', z) \\
 &= (-i)^{n_1+n_2+m_1+m_2} \frac{z^{n_1+n_2}}{k^{n_1+n_2+m_1+m_2}} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{ik}{z} \rho' \cdot (\rho_d - \rho'_d)\right. \\
 &\quad \left. + ik\theta' \cdot \rho'_d - H(\rho_d, \rho'_d, z)\right\} \\
 &\quad \times \delta^{(n_1)}(x'_d - x_d) \delta^{(n_2)}(y'_d - y_d) \\
 &\quad \times \delta^{(m_1)}(x_d) \delta^{(m_2)}(y_d) d^2\rho'_d d^2\rho_d. \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中, $\delta^{(n)}$ 表示对 δ 函数的 n 次求导. 联合 (9), (7) 和 (5) 式, 原则上可以得到光束各阶强度矩. 值得指出的是, 在推导光束高阶强度矩时, 需利用积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(j)}(x) dx = (-1)^j f^{(j)}(0)$ ($f^{(j)}$ 表示任意函数 f 的 j 次导数), 对函数 f 求 j 次导数, 且求导后对变量赋零值. 可以证明, $f^{(j)}$ 函数中的湍流项为幂指数函数形式. 那么 $f^{(j)}(0)$ 中的湍流项对应 $j > n_1 + n_2 + m_1 + m_2$ 的项数均为零. 这样, 导致 (5) 式中的求和项数不会大于强度矩的阶数, 大大地简化了推导过程. 以下列出了我们推导出的光束一至四阶强度矩在大气湍流中的传输公式.

2.1 一阶矩 ($n_1 + n_2 + m_1 + m_2 = 1$)

$$\begin{bmatrix} \langle x \rangle \\ \langle y \rangle \\ \langle \theta_x \rangle \\ \langle \theta_y \rangle \end{bmatrix} = M_z \begin{bmatrix} \langle x_0 \rangle \\ \langle y_0 \rangle \\ \langle \theta_{x0} \rangle \\ \langle \theta_{y0} \rangle \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中 M_z 是传输矩阵, 且

$$M_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

下角标“0”表示光束在 $z = 0$ 平面处对应的强度矩. 从 (10) 式可知, 光束的一阶矩与湍流无关.

2.2 二阶矩 ($n_1 + n_2 + m_1 + m_2 = 2$)

光束的二阶矩表示的 4×4 的矩阵可写为

$$V = \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xy \rangle & \langle x\theta_x \rangle & \langle x\theta_y \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle y^2 \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle y\theta_y \rangle \\ \langle x\theta_x \rangle & \langle y\theta_x \rangle & \langle \theta_x^2 \rangle & \langle \theta_x\theta_y \rangle \\ \langle x\theta_y \rangle & \langle y\theta_y \rangle & \langle \theta_x\theta_y \rangle & \langle \theta_y^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (12)$$

光束通过大气湍流传输的二阶矩为

$$V = M_z V_0 M_z^t + M_T \quad (13)$$

其中

$$M_T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}z^3 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}z^3 & 0 & z^2 \\ z^2 & 0 & 2z & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & 2z \end{bmatrix} T, \quad (14)$$

$$T = \pi^2 \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa, \quad (15)$$

V_0 表示 $z = 0$ 平面处的光束二阶矩阵, M_z^t 是 M_z 的转置矩阵, M_T 是湍流矩阵. 湍流对光束二阶矩的影响由湍流参数 T 描述, 且含 T 的项只与传输距离 z 有关. 本文 (13) 式与文献 [6] 中 (15) 式是一致的.

2.3 三阶矩 ($n_1 + n_2 + m_1 + m_2 = 3$)

$$\langle x^3 \rangle = \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^3 \rangle + 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \rangle z^3 T, \quad (16)$$

$$\langle \theta_x^3 \rangle = \langle \theta_{x0}^3 \rangle + 6 \langle \theta_{x0}^2 \rangle z T, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \theta_x \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \theta_{x0} \rangle + 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \rangle z^2 T \\ &\quad + \frac{2}{3} \langle \theta_{x0} \rangle z^3 T, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle x \theta_x^2 \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \theta_{x0}^2 \rangle + 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \rangle z T \\ &\quad + 2 \langle \theta_{x0} \rangle z^2 T, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 y \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 (y_0 + \theta_{y0}z) \rangle \\ &\quad + \frac{2}{3} \langle (y_0 + \theta_{y0}z) \rangle z^3 T, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\langle x \theta_y^2 \rangle = \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \theta_y^2 \rangle + 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \rangle z T, \quad (21)$$

$$\langle x^2 \theta_y \rangle = \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \theta_y \rangle + \frac{2}{3} \langle \theta_{y0} \rangle z^3 T, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle xy \theta_x \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z) (y_0 + \theta_{y0}z) \theta_{x0} \rangle \\ &\quad + \langle (y_0 + \theta_{y0}z) \rangle z^2 T. \end{aligned} \quad (23)$$

将 (16)—(23) 式中 x 与 y 对换, 即可得到其他三阶矩 $\langle y^3 \rangle, \langle \theta_y^3 \rangle, \langle y^2 \theta_y \rangle, \langle y \theta_y^2 \rangle, \langle y^2 x \rangle, \langle y \theta_x^2 \rangle, \langle y^2 \theta_x \rangle$ 和 $\langle xy \theta_y \rangle$ 在大气湍流中的传输公式. 湍流对光束三阶矩的影响由湍流参数 T 描述, 且含 T 的项不仅与传输距离 z 有关, 还与光束在 $z = 0$ 平面上的一阶矩有关.

2.4 四阶矩 ($n_1 + n_2 + m_1 + m_2 = 4$)

$$\begin{aligned} \langle x^4 \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^4 \rangle + 4 \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \rangle z^3 T \\ &\quad + \frac{4}{3} z^6 T^2 + \frac{3}{10k^2} z^5 T', \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_x^4 \rangle &= \langle \theta_{x0}^4 \rangle + 12 \langle \theta_{x0}^2 \rangle z T + 12 z^2 T^2 \\ &\quad + \frac{3}{2k^2} z T', \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \theta_x^2 \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \theta_{x0}^2 \rangle + 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \rangle_0 z T \\ &\quad + \frac{2}{3} \langle \theta_{x0}^2 \rangle_0 z^3 T + 4 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \theta_{x0} \rangle z^2 T \\ &\quad + \frac{10}{3} z^4 T^2 + \frac{1}{2k^2} z^3 T', \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \langle x^3 \theta_x \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^3 \theta_{x0} \rangle + 3 \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \rangle z^2 T \\ &\quad + 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \theta_{x0} \rangle z^3 T \\ &\quad + 2 z^5 T^2 + \frac{3}{8k^2} z^4 T', \end{aligned} \quad (27)$$

$$\langle x \theta_x^3 \rangle = \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \theta_{x0}^3 \rangle + 3 \langle \theta_{x0}^2 \rangle z^2 T$$

$$\begin{aligned}
 &+ 6 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \theta_{x0} \rangle zT + 6z^3 T^2 \\
 &+ \frac{3}{4k^2} z^2 T', \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 y^2 \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 (y_0 + \theta_{y0}z)^2 \rangle \\
 &+ \frac{2}{3} \left(\langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \rangle \right. \\
 &+ \left. \langle (y_0 + \theta_{y0}z)^2 \rangle \right) z^3 T \\
 &+ \frac{4}{9} z^6 T^2 + \frac{1}{10k^2} z^5 T', \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x^3 y \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^3 (y_0 + \theta_{y0}z) \rangle \\
 &+ 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \langle y_0 + \theta_{y0}z \rangle \rangle z^3 T, \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 \theta_y^2 \rangle &= \langle (x + \theta_x z)^2 \theta_y^2 \rangle + 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z)^2 \rangle zT \\
 &+ \frac{2}{3} \langle \theta_{y0}^2 \rangle z^3 T + \frac{4}{3} z^4 T^2 + \frac{1}{6k^2} z^5 T', \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle xy \theta_x^2 \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z) (y_0 + \theta_{y0}z) \theta_{x0}^2 \rangle \\
 &+ 2 \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \langle y_0 + \theta_{y0}z \rangle \rangle zT \\
 &+ 2 \langle \theta_{x0} \langle y_0 + \theta_{y0}z \rangle \rangle z^2 T, \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle xy \theta_x \theta_y \rangle &= \langle (x_0 + \theta_{x0}z) (y_0 + \theta_{y0}z) \theta_{x0} \theta_{y0} \rangle \\
 &+ \langle (x_0 + \theta_{x0}z) \theta_{x0} \rangle z^2 T \\
 &+ \langle (y_0 + \theta_{y0}z) \theta_{y0} \rangle z^2 T \\
 &+ z^4 T^2 + \frac{1}{6k^2} z^5 T', \quad (33)
 \end{aligned}$$

其中

$$T' = \pi^2 \int_0^\infty \kappa^5 \Phi_n(\kappa) d\kappa. \quad (34)$$

同样地, $\langle y^4 \rangle$, $\langle \theta_y^4 \rangle$, $\langle y^2 \theta_y^2 \rangle$, $\langle y^3 \theta_y \rangle$, $\langle y \theta_y^3 \rangle$, $\langle y^3 x \rangle$, $\langle y^2 \theta_x^2 \rangle$ 和 $\langle xy \theta_x^2 \rangle$ 在大气湍流中的传输公式可通过将 (24)—(28) 式和 (30)—(32) 式中 x 与 y 对换得到. 从 (24)—(34) 式可知, 湍流对光束四阶矩的影响由 T 和 T' 两个湍流参数描述, 并且含 T 的项还与光束在 $z=0$ 平面处的二阶矩有关.

值得指出的是: 1) 本文所得结果对强、弱湍流情况均适合; 2) 当 $T = T' = 0$ 时, 以上大气湍流中的强度矩可简化为自由空间中的对应强度矩; 3) 任意某一光束在大气湍流中传输的强度矩可作为本文结果的特例得到, 即首先求出该光束在 $z=0$ 平面处的维格纳分布函数 $h(\rho, \theta, 0)$, 再将其代入强度矩定义 (7) 式即可得 $z=0$ 平面处的强度矩, 然后, 将 $z=0$ 平面处的强度矩代入本文推导出的对应公式即可得到光束在 z 平面处的各阶强度矩. 下面以高斯光束为例说明.

3 高斯光束的高阶强度矩及 K 参数

高斯光束在 $z=0$ 平面的交叉谱密度可以表示为

$$W_{00}(\rho_1, \rho_2, 0)|_{GS} = \exp \left[-\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{w_0^2} \right], \quad (35)$$

其中 w_0 是光束的束腰半径. 将 (35) 式代入 (6) 式, 经过积分运算得到

$$\begin{aligned}
 h(\rho, \theta, 0) &= \frac{k^2 w_0^2}{2\pi} \exp \left[-\frac{2x^2 + 2y^2}{w_0^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k^2 w_0^2}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) \right]. \quad (36)
 \end{aligned}$$

将 (36) 式代入 (7) 式, 可以得到高斯光束在 $z=0$ 平面上的各阶强度矩为

$$\langle x_0 \rangle = \langle y_0 \rangle = \langle \theta_{x0} \rangle = \langle \theta_{y0} \rangle = 0, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 \langle x_0^2 \rangle &= \langle y_0^2 \rangle = \frac{w_0^2}{4}, \\
 \langle \theta_{x0}^2 \rangle &= \langle \theta_{y0}^2 \rangle = \frac{1}{k^2 w_0^2}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\langle x_0 \theta_{x0} \rangle = 0,$$

$$\langle x_0^3 \rangle = \langle y_0^3 \rangle = \langle \theta_{x0}^3 \rangle_0 = \langle \theta_{y0}^3 \rangle = 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 \langle x_0^4 \rangle &= \langle y_0^4 \rangle = \frac{3}{16} w_0^4, \\
 \langle \theta_{x0}^4 \rangle &= \langle \theta_{y0}^4 \rangle = \frac{3}{k^4 w_0^4}, \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$\langle x_0^2 \theta_{x0}^2 \rangle = \frac{1}{4k^2}, \quad \langle x_0^3 \theta_{x0} \rangle = 0.$$

将在 $z=0$ 平面处的强度矩代入 (10)—(34) 式可得到传输平面 z 处的各阶强度矩. 因高斯光束为对称光束, 本文仅考虑 x 方向的强度矩, 即

$$\langle x^2 \rangle = \frac{w_0^2}{4} + \frac{1}{k^2 w_0^2} z^2 + \frac{2}{3} z^3 T, \quad (41)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \frac{1}{k^2 w_0^2} + 2zT, \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 \langle x^4 \rangle &= \frac{3}{16} w_0^4 + \frac{3}{2k^2} z^2 + \frac{3}{k^4 w_0^4} z^4 \\
 &+ 6 \left(\frac{w_0^2}{4} + \frac{1}{k^2 w_0^2} z^2 \right) z^3 T \\
 &+ \frac{4}{3} z^6 T^2 + \frac{3}{10k^2} z^5 T', \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\langle \theta_x^4 \rangle = \frac{3}{k^4 w_0^4} + 12 \frac{1}{k^2 w_0^2} zT + 12 z^2 T^2 + \frac{3}{2k^2} zT'. \quad (44)$$

沿 x 方向的 K_x 参数定义为 $K_x = \langle x^4 \rangle / \langle x^2 \rangle^2$ [20], 将 (41) 和 (43) 式代入该定义式可得到高斯光束通过大气湍流传输的 K_x 参数, 即

$$K_x = 3 + \frac{3}{10k^2 \langle x^2 \rangle^2} z^5 T'. \quad (45)$$

由 (45) 式可知, 高斯光束通过大气湍流传输的 K_x 参数并不是一个不变量, 它与传输距离 z , 束腰半径 w_0 , 湍流参数 T 与 T' 均有关. 并且有 $\lim_{z \rightarrow \infty} K_x = 3$, 即只有当传输距离 z 足够大时, 高斯光束通过大气湍流传输光束形状才保持高斯分布不变.

如果采用 Von Karman 谱 [2]

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \left(\kappa^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-11/6} \times \exp \left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2} \right), \quad (46)$$

其中 C_n^2 是折射率结构常数, 它表征湍流的强弱. $\kappa_m = 5.92/l_0$, l_0 和 L_0 分别是湍流的内、外尺度.

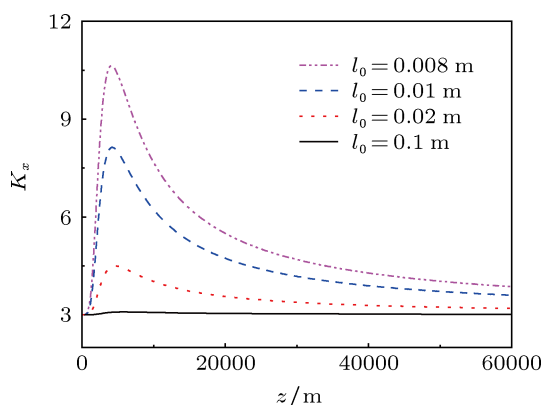


图 1 不同湍流内尺度 l_0 下, 高斯光束 K_x 参数随传输距离 z 的变化 ($C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$, $w_0 = 0.05 \text{ m}$)

图 1—图 3 是高斯光束在大气湍流中传输其 K_x 参数随传输距离 z 变化曲线, 计算参数为 $L_0 = 10 \text{ m}$ 和 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$. 图 1—图 3 表明, 高斯光束在湍流中传输, K_x 参数会出现一个极大值, 之后减小并逐渐接近 3. 图 1 为不同湍流内尺度 l_0 下高斯光束的 K_x 参数随传输距离 z 的变化曲线. 图 1 表明, 湍流内尺度 l_0 越大, K_x 参数越小. 当 $l_0 = 0.1 \text{ m}$ 时, K_x 参数的值几乎保持为 3 不变. 图 2 为不同湍流折射率结构常数 C_n^2 下高斯光束 K_x 参数随传输距离 z 的变化曲线. 由图 2 可知, 在自由空间 K_x 参数不随传输距离变化, 恒等于 3. 在湍流中, C_n^2 越大, K_x 参数越小. 当 $C_n^2 = 10^{-12} \text{ m}^{-2/3}$ 时, K_x 参数近似为 3 不变. 这一结论与在强湍流近似下的结论一致.

图 3 为不同束腰半径 w_0 下高斯光束 K_x 参数随传输距离 z 的变化曲线. 图 3 表明, 束腰半径 w_0 越小, K_x 参数越小. 当 $w_0 = 0.005 \text{ m}$ 时, K_x 参数的值几乎保持为 3 不变. 因此, 只有当湍流内尺度或湍流折射率结构常数足够大, 或光束束腰半径 w_0 足够小时, 高斯光束在大气湍流中传输光束形状才保持高斯分布.

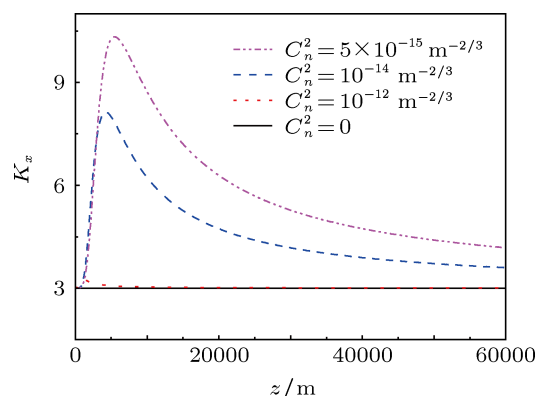


图 2 不同湍流折射率结构常数 C_n^2 下, 高斯光束 K_x 参数随传输距离 z 的变化 ($w_0 = 0.05 \text{ m}$, $l_0 = 0.01 \text{ m}$)

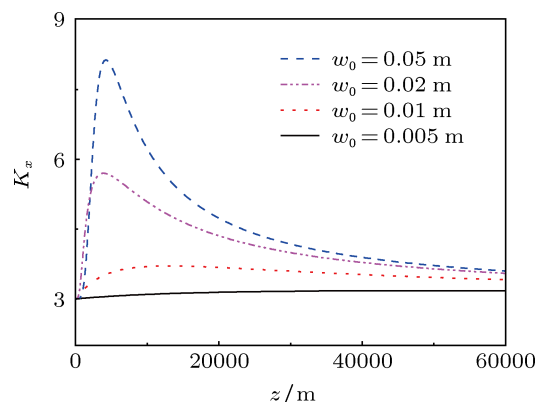


图 3 不同束腰半径 w_0 下, 高斯光束 K_x 参数随传输距离 z 的变化 ($C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$, $l_0 = 0.01 \text{ m}$)

4 结论

本文研究了光束通过大气湍流传输的高阶强度矩, 提出了大气湍流中光束高阶强度矩的推导方法, 并推导出了一至四阶光束强度矩传输的解析表达式. 研究表明, 光束的一阶矩与湍流无关, 光束的二阶矩和三阶矩只与湍流参数 T 有关, 而光束的四阶矩与湍流参数 T 和 T' 均有关. 本文所得结果具有一般性, 任意某一光束在自由空间和大气湍流中传输的高阶强度矩均可作为本文结果的特例.

另一方面, 本文研究表明: 在大气湍流中, 高斯光束的 K 参数并不是一个传输不变量, 其 K 参数会出现一个极大值. 这个结论是本文在没有采用近似条件情况下得到的. 但是, 如果采用 Rytov 相位结构函数二次近似或强湍流近似, 高斯光束在大气湍流中的平均光强会保持为高斯分布, 即其 K 参数是一个传输不变量 (恒为常数 3). Rytov 相位结构函数二次近似和强湍流近似是湍流介质中光传输

研究中常采用的近似方法, 但长期以来该近似方法的适用性一直是国内外学者们争论的焦点. 大量理论和实验已证明, Rytov 相位结构函数二次近似在处理光束大气湍流传输的平均光强和二阶强度矩时误差很小 [5,6,8,10,21–25]. 本文指出, 研究光束在湍流中的四阶强度矩时采用这两种近似是不合适的. 本文所得结果对激光大气传输应用具有意义.

- [1] Weber H 1992 *Opt. Quant. Elect.* **24** 1027
- [2] Andrews L C, Phillips R L 2005 *Laser Beam Propagation through Random Media* (2nd Ed.) (Bellingham: SPIE)
- [3] Yuan Y, Cai Y, Eyyuboğlu H T, Baykal Y, Korotkova O 2009 *Opt. Express* **17** 17344
- [4] Wu G, Guo H, Yu S, Luo B 2010 *Opt. Lett.* **35** 715
- [5] Zhou G 2011 *Opt. Express* **19** 45
- [6] Ji X L, Li X Q 2011 *Appl. Phys. B* **104** 207
- [7] Ji X L, Li X Q, Ji G M 2011 *New J. Phys.* **13** 103006
- [8] Mao H, Zhao D M 2010 *Opt. Express* **18** 1741
- [9] Pu J X, Korotkova O 2009 *Opt. Commun.* **282** 1691
- [10] Dou L Y, Ji X L, Li P 2012 *Opt. Express* **20** 8417
- [11] Liu F, Ji X L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 014216 (in Chinese) [刘飞, 季小玲 2011 物理学报 **60** 014216]
- [12] Zhao G Y, Zhang Y X, Wang J Y, Jia J J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1378 (in Chinese) [赵贵燕, 张逸新, 王建宇, 贾建军 2010 物理学报 **59** 1378]
- [13] Chu X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 014207
- [14] Pu J X, Wang T, Lin H C, Li C L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 089201
- [15] Dan Y, Zhang B 2009 *Opt. Lett.* **34** 563
- [16] Chu X, Qiao C, Feng X 2011 *Appl. Phys. B* **105** 909
- [17] Chu X 2011 *Opt. Lett.* **36** 2701
- [18] Lohmann A W 1993 *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 2181
- [19] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 2007 *Table of Integrals, Series, and Products* (7th Ed.) (New York: Academic Press)
- [20] Piquero G, Mejias P M, Martinez-Herrero R 1993 *Proceedings of the Workshop on Laser Beam Characterization* (Madrid: Optical Society of Spain)
- [21] Leader J C 1978 *J. Opt. Soc. Am. A* **681** 75
- [22] Wang S C H, Plonus M A 1979 *J. Opt. Soc. Am. A* **69** 1297
- [23] Ji X L, Li X Q 2009 *J. Opt. Soc. Am. A* **26** 236
- [24] Ji X L, Zhang E T, Lü B D 2006 *Opt. Commun.* **259** 1
- [25] Li X Q, Zhao Q, Ji X L 2011 *Acta Opt. Sin.* **31** 1201002 (in Chinese) [李晓庆, 赵琦, 季小玲 2011 光学学报 **31** 1201002]

Higher-order intensity moments of optical beams in atmospheric turbulence*

Li Xiao-Qing¹⁾²⁾ Ji Xiao-Ling²⁾ Zhu Jian-Hua^{1)†}

1) (*College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

2) (*Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China*)

(Received 14 May 2012; revised manuscript received 21 September 2012)

Abstract

The higher-order intensity moments of optical beams propagating through atmospheric turbulence are studied in the paper. The method to derive higher-order intensity moments in atmospheric turbulence is proposed, and the simple expressions for intensity moments up to the fourth-order are derived. The results obtained in this paper are general, which can reduce to higher-order intensity moments of an arbitrary optical beam propagating in both free space and turbulence. Taking the Gaussian beam for example, the propagation of the kurtosis parameter in atmospheric turbulence is studied. It is shown that the kurtosis parameter of Gaussian beams is not a propagation invariant in atmospheric turbulence, which depends on propagation distance, waist width, inner and outer scales of turbulence and refraction index structure constant. This result is different from that obtained by using the quadratic approximation of Rytov's phase structure function or the strong fluctuation condition of turbulence. The reasonable explanations for the differences are given in this paper.

Keywords: higher-order intensity moment, atmospheric propagation, atmospheric turbulence, kurtosis parameter

PACS: 42.68.Bz, 42.25.Bs

DOI: 10.7498/aps.62.044217

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61178070) and the Open Research Fund of Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. JJ-10-08).

† Corresponding author. E-mail: zhujh@scu.edu.cn