

## 精确 Cosserat 弹性杆动力学的分析力学方法\*

薛纭<sup>1)†</sup> 翁德玮<sup>1)2)</sup> 陈立群<sup>2)</sup>

1) (上海应用技术学院机械工程学院, 上海 201418)

2) (上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(2012年7月11日收到; 2012年8月29日收到修改稿)

以脱氧核糖核酸和工程中的细长结构为背景, 大变形大范围运动的弹性杆动力学受到关注. 将分析力学方法运用到精确 Cosserat 弹性杆动力学, 旨在为前者拓展新的应用领域, 为后者提供新的研究方法. 基于平面截面假定, 在弯扭基础上再计及拉压和剪切变形形成精确 Cosserat 弹性杆模型. 用刚体运动的概念描述弹性杆的变形, 导出弹性杆变形和运动的几何关系; 在定义截面虚位移及其变分法则的基础上, 建立用矢量表达的 d'Alembert-Lagrange 原理, 在线性本构关系下化作分析力学形式, 并导出 Lagrange 方程和 Nielsen 方程, 定义正则变量后化作 Hamilton 正则方程; 对于只在端部受力的弹性杆静力学, 导出了将守恒量预先嵌入的 Lagrange 方程, 并讨论了其首次积分. 从弹性杆的 d'Alembert-Lagrange 原理导出积分变分原理, 在线性本构关系下化作 Hamilton 原理. 形成的分析力学方法使弹性杆的全部动力学方程具有统一的形式, 为弹性杆动力学的对称性和守恒量的研究及其数值计算铺平道路.

**关键词:** 精确 Cosserat 弹性杆, 分析动力学方法, 变分原理, Lagrange 方程

**PACS:** 46.70.Hg, 45.20.Jj, 45.10.Db

**DOI:** 10.7498/aps.62.044601

## 1 引言

弹性杆力学具有悠久的历史 and 广泛的应用背景. 20 世纪 70 年代, 弹性杆被作为脱氧核糖核酸 (DNA) 等生物大分子的力学模型研究其位形的拓扑性质、平衡及其稳定性, 进一步推动了弹性杆力学的发展<sup>[1-4]</sup>. 鉴于应用背景的复杂和多样性, 弹性杆力学面临新的问题: 其一是极端细长导致小应变累积成超大位移, 形成异常复杂的几何形态; 其二是全新的约束形式, 如自接触等, 对组蛋白的缠绕包括了经典约束具有的单面、非定常、非完整等特征<sup>[2,5]</sup>. 因分析力学的建模方法在约束处理和数值计算上的优势<sup>[6,7]</sup>, 文献 [8-12] 建立了 Kirchhoff 弹性杆静力学和动力学的分析力学理论框架, 文献 [13, 14] 将近代分析力学中的对称性理论引入弹性杆静力学, 得到了由对称性导致的守恒量.

Kirchhoff 弹性杆静力学和动力学的分析力学

方法已有所研究, 由于忽略了弹性杆截面因变形导致随弧坐标的平移, 即拉压和剪切变形, 使得变分原理中与主矢有关的项以及关于主矢的 3 个动力学方程不具有分析力学的形式, 并且因主矢与主矩的耦合使得主矩方程的表达也不尽如人意<sup>[8-12]</sup>, 给应用带来了不便. 在弯扭基础上再计及轴向拉压和截面剪切变形的弹性杆模型是 Kirchhoff 模型的改进<sup>[15,16]</sup>, 这被称之为 Cosserat 弹性杆或精确模型, Kirchhoff 弹性杆是其特例.

本文引入了关于主矢的本构方程后形成的精确 Cosserat 弹性杆的分析力学方法, 其变分原理和动力学方程完全具有分析力学的形式, 这既有助于充分利用分析力学的现有成果为弹性杆力学提供新方法, 又有利于拓展分析力学的应用领域.

精确 Cosserat 弹性杆运动和变形的几何关系见文献 [16, 17]. 本文基于位形空间的虚位移概念, 建立弹性杆精确模型的 d'Alembert-Lagrange 原理和 Hamilton 原理, 在线性本构关系下导出完全具有分析力学形式的各种运动微分方程, 且以弧坐标和

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10972143)、上海应用技术学院《化工过程机械》重点学科建设基金 (批准号: 1020Q101201) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xy@sit.edu.cn

时间双自变量为特征. 为利用分析力学的现有成果, 如对称性和守恒量等以及在数值仿真时实施辛算法铺平道路.

## 2 弹性杆精确模型的位形描述

依据平面截面假定, 以弹性杆的截面为对象, 因变形导致截面随弧坐标发生转动和斜向平移, 如图 1 所示. 建立惯性坐标系 ( $O-\xi\eta\zeta$ ) 和与截面固结的形心主轴坐标系 ( $P-xyz$ ), 沿坐标轴的单位基矢量列阵分别为  $\mathbf{e}^I = (\mathbf{e}_\xi \ \mathbf{e}_\eta \ \mathbf{e}_\zeta)^T$  和  $\mathbf{e}^P = (\mathbf{e}_1(\bar{s}, t) \ \mathbf{e}_2(\bar{s}, t) \ \mathbf{e}_3(\bar{s}, t))^T$ , 其中  $\bar{s} = \bar{s}(s, t)$  为变形后的弧坐标,  $s$  为未变形时的弧坐标,  $\mathbf{e}_3$  为截面的外法矢, 指向弧坐标的正向. 两组基有关系  $\mathbf{e}^P = \mathbf{Q}\mathbf{e}^I$ ,  $\mathbf{Q}$  为单位正交阵. ( $P-xyz$ ) 的位置和姿态用截面形心相对惯性系的矢径  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$  的坐标阵  $\mathbf{r} = (\xi(\bar{s}, t) \ \eta(\bar{s}, t) \ \zeta(\bar{s}, t))^T$  和 Euler 角列阵  $\mathbf{q}_E = (\psi(\bar{s}, t) \ \vartheta(\bar{s}, t) \ \varphi(\bar{s}, t))^T$  描述,  $\mathbf{r}, \mathbf{q}_E$  的坐标依次用  $q_\alpha$ , ( $\alpha = 1, \dots, 6$ ) 表示. 截面的运动方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\bar{s}, t), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{s}, t), \quad \bar{s} = \bar{s}(s, t). \quad (1)$$

截面位置随  $s$  (或  $\bar{s}$ ) 和  $t$  的变化都称为运动. 对自变量  $s, t$  的全偏导数用  $\partial_s, \partial_t$  表示.

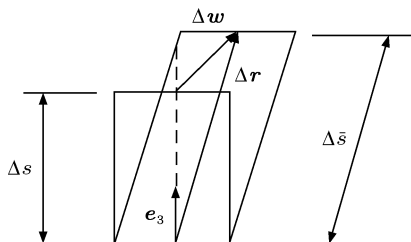


图 1 弹性杆截面的平移

对于给定的姿态  $q_\alpha = q_\alpha(s, t)$ , ( $\alpha = 4, 5, 6$ ), 截面随弧坐标的平移存在如下关系:  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_3\Delta s + \Delta\mathbf{w}$  (见图 1),  $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$  和  $\mathbf{w}(q_1, \dots, q_6)$  分别为中心线上一点  $P$  的矢径和位移矢量. 于是得到关于中心线的微分方程

$$\partial_s \mathbf{r} = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\gamma}, \quad (2)$$

其中  $\boldsymbol{\gamma} = \partial_s \mathbf{w}$  为  $P$  点的应变矢量, 其主轴分量  $\gamma_i = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) 中的前两个为截面的剪应变, 第三个为拉压应变, 存在关系

$$\gamma_3 = \partial_s \bar{s} - 1. \quad (3)$$

于是有  $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \mathbf{e}_i$ , 其广义坐标表达为

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 + 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \xi}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \eta}{\partial q_1} & \frac{\partial \eta}{\partial q_2} & \frac{\partial \eta}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s q_1 \\ \partial_s q_2 \\ \partial_s q_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Kirchhoff 弹性杆是取  $\boldsymbol{\gamma} = 0$  [8-12].

截面的弯扭度  $\boldsymbol{\omega}$  和角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  为截面姿态角对弧坐标  $s$  和时间  $t$  全偏导数的线性组合

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{\alpha=4}^6 \boldsymbol{\Xi}_\alpha \partial_s q_\alpha, \quad (5a)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{\alpha=4}^6 \boldsymbol{\Xi}_\alpha \partial_t q_\alpha, \quad (5b)$$

其中,  $\boldsymbol{\Xi}_\alpha$  为姿态角的矢值函数. 注意到 (5a) 式中的弯扭度以原始弧坐标为基准, 是考虑到与 Hook 定律中应变是相对原始长度的定义一致. 弯扭度的几何意义是截面的主轴坐标系以速率  $\partial_s \bar{s}$  沿中心线运动时的“角速度”. 与 Kirchhoff 弹性杆相似, 有如下的运动学方程 [9]

$$\tilde{\partial}_t \boldsymbol{\omega} - \tilde{\partial}_s \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = 0, \quad (6)$$

$$\partial_s \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' + \tilde{\partial}_t \boldsymbol{\gamma}, \quad (7)$$

式中波浪号表示相对主轴坐标系 ( $P-xyz$ ) 求导,  $\boldsymbol{\nu} = \partial_t \mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\boldsymbol{\Omega}$  的 Euler 角表达将使 (6) 式成为恒等式. (2), (3), (6) 和 (7) 式组成弹性杆精确模型的运动学方程.

值得指出的是, 应变矢  $\boldsymbol{\gamma}$  和弯扭度  $\boldsymbol{\omega}$  都是反映中心线弯曲的特征量.

## 3 弹性杆截面的虚位移

对于变形后的弹性杆, 截面随弧坐标绕形心转动的同时还存在平移. 定义如下弹性杆截面的虚位移 [8].

定义 (截面的虚位移) 约束所允许的、与弧坐标  $s$  和时间  $t$  变化无关的、假想的截面无限小位移定义为弹性杆截面的虚位移, 它可分解为随形心的虚平移和相对形心的虚角位移, 分别记为  $\delta\mathbf{r}$  和  $\delta\boldsymbol{\Phi}$ , 它对应于如下的变分定义

$$\delta s = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta q_\alpha \neq 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 6), \quad (8)$$

其中与虚位移  $\delta \mathbf{r}$  和  $\delta \Phi$  对应的广义坐标变分依次记为  $\delta_p q_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) 和  $\delta_r q_\alpha$ , ( $\alpha = 4, 5, 6$ ). 对仅为广义坐标  $q_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) 的函数的变分, 有  $\delta = \delta_p$ , 同理, 对仅为广义坐标  $q_\alpha$ , ( $\alpha = 4, 5, 6$ ) 的函数的变分, 有  $\delta = \delta_r$ .

定义微分和变分  $\delta$ ,  $\delta_p$  服从交换关系

$$\delta_p \partial_s ( ) = \partial_s \delta_p ( ), \quad (9a)$$

$$\partial_t \delta ( ) = \delta \partial_t ( ) \quad (9b)$$

和运算的普遍性.

由 (2) 和 (5) 式知, 截面的虚位移存在如下关系:

$$\delta \mathbf{r} = \delta_p \mathbf{w}, \quad (10a)$$

$$\delta \Phi = \sum_{\alpha=4}^6 \Xi_\alpha \delta q_\alpha, \quad (10b)$$

并有

$$0 = \mathbf{e}_3 + \sum_{\alpha=4}^6 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_\alpha} \partial_s q_\alpha, \quad (11)$$

与 Kirchhoff 模型类似, 可以证明存在以下运动学关系 [13]

$$\partial_s (\delta \Phi) = \tilde{\delta} \omega, \quad (12a)$$

或

$$\tilde{\partial}_s (\delta \Phi) = \delta \omega; \quad (12b)$$

以及

$$\partial_t (\delta \Phi) = \tilde{\delta} \Omega, \quad (13a)$$

或

$$\tilde{\partial}_t (\delta \Phi) = \delta \Omega, \quad (13b)$$

其中波浪号表示相对主轴坐标系求导或变分. 这些关系也可以用 Euler 角验证.

若弹性杆被限制在惯性空间 ( $O-\xi\eta\zeta$ ) 中的固定光滑曲面上, 约束方程为

$$g^\#(\xi_c, \eta_c, \zeta_c) = 0, \quad (14)$$

在约束的基本假设下 [8,9,11,12], (14) 式可以化作对截面位形的约束方程

$$g(q_\alpha, s) = g^\#(\xi + b_\xi, \eta + b_\eta, \zeta + b_\zeta) = 0, \quad (15)$$

式中  $(\xi, \eta, \zeta)$  为截面的形心坐标,  $\mathbf{b}(s, \mu(s, t))$  为截面与约束曲面接触点相对截面形心的矢径,  $b_\xi, b_\eta, b_\zeta$  是其投影. (15) 式的变分可化为

$$\delta g = \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} + (\mathbf{b} \times \mathbf{n}) \cdot \delta \Phi = 0. \quad (16)$$

(16) 式可简写为

$$\sum_{\alpha=1}^6 A_\alpha \delta q_\alpha = 0, \quad (17)$$

式中  $A_\alpha$  为 (16) 式中坐标变分前的系数. 方程 (16) 等价于理想约束条件

$$\mathbf{f}_C \cdot \delta (\mathbf{r} + \mathbf{b}) = 0, \quad (18)$$

其中  $\mathbf{f}_C$  为曲面对杆的分布约束力集度.

## 4 弹性杆精确模型动力学的微分变分原理

考察原长为  $\Delta s$  的微段杆 (图 1), 作用于其上的内力主矢  $\mathbf{F}$ , 主矩  $\mathbf{M}$ , 惯性力以及约束力的“虚功率”与 Kirchhoff 模型的区别仅在于 (2) 式和  $\partial_s \bar{s} \neq 1$ . 不计因变形产生的惯性力, 并利用理想约束条件, 可以得到如下的“虚功率”表达式

$$\begin{aligned} \delta W = & (\partial_s \mathbf{F} - \rho \partial_t^2 \mathbf{r} + \partial_s \bar{s} \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{r} \\ & + (\partial_s \mathbf{M} + \partial_s \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ & - \partial_t (\mathbf{J} \cdot \Omega) + \partial_s \bar{s} \mathbf{m}) \cdot \delta \Phi, \end{aligned} \quad (19)$$

式中  $\rho$  为弹性杆沿中心线的线密度,  $\mathbf{J}$  为截面的惯量并矢, 在主轴坐标系下的坐标阵为  $\mathbf{J} = \text{diag} (J_1 \ J_2 \ J_3)$ , 其中  $J_i = \rho I_i / A$ ,  $A$  为截面积,  $I_1, I_2$  为截面对主轴  $x, y$  的惯性矩,  $I_3$  为截面对主轴  $z$  的极惯性矩, 且有  $I_3 = I_1 + I_2$ ;  $\mathbf{f}(s, t)$  和  $\mathbf{m}(s, t)$  为沿中心线作用的连续分布力和分布力偶.

弹性杆精确模型动力学的 d'Alembert-Lagrange 原理表述为: 受有理想双面约束的弹性杆在任意时刻的真实运动不同于运动学上的可能运动仅在于真实运动对于任意的虚位移, 有

$$\delta W = 0. \quad (20)$$

(19) 和 (20) 式也可以直接从矢量形式的动力学方程导出.

设弹性杆服从线性本构关系, 用主轴分量表示为

$$\begin{aligned} F_i = & K_i (\gamma_i - \gamma_i^0), \\ M_i = & B_i (\omega_i - \omega_i^0) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $\gamma_i^0 = \gamma_i^0(s)$ ,  $\omega_i^0 = \omega_i^0(s)$  为原始应变和原始弯扭度分量;  $K_1, K_2$  和  $B_1, B_2$  分别为关于主轴  $x, y$  的抗剪刚度和抗弯刚度,  $K_3, B_3$  为关于主轴  $z$  的抗抗压刚度和抗扭刚度.

下面将用矢量表达的“虚功率”(19)式化作分析力学形式.

根据(8)—(13)式和分析力学的经典推导,对( $\alpha = 1, 2, 3$ )可以导出如下关系:

$$\partial_s \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_\alpha} = \partial_s \left( \frac{\partial S^P}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial S^P}{\partial q_\alpha}, \quad (22a)$$

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} = \partial_t \left( \frac{\partial T^P}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T^P}{\partial q_\alpha}, \quad (22b)$$

式中撇号和点号分别表示  $\partial_s$  和  $\partial_t$ ,  $S^P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 K_i (\gamma_i - \gamma_i^0)^2$ ,  $T^P = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{r}}^2$  为截面的平移弹性应变能和平移动能.

对( $\alpha = 4, 5, 6$ )有以下关系:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial q'_\alpha}, \quad \tilde{\partial} \Omega = \frac{\tilde{\partial} \omega}{\partial q'_\alpha}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q_\alpha} = \frac{\tilde{\partial} \Omega}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (23)$$

以及<sup>[9]</sup>

$$\tilde{\partial}_t \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\tilde{\partial} \Omega}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_\alpha} \times \Omega, \quad (24a)$$

或

$$\partial_t \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\tilde{\partial} \Omega}{\partial q_\alpha}. \quad (24b)$$

可以导出

$$\partial_s \mathbf{M} \cdot \delta \Phi = \sum_{i=4}^6 \left[ \partial_s \frac{\partial S^r}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial S^r}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha, \quad (25)$$

式中  $S^r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 B_i (\omega_i - \omega_i^0)^2$  为截面弯扭应变能.

$$\partial_t (\mathbf{J} \cdot \Omega) \cdot \delta \Phi = \sum_{\alpha=4}^6 \left[ \partial_t \left( \frac{\partial T^r}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T^r}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha, \quad (26)$$

式中  $T^r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \Omega_i^2$  为截面的转动动能.

$$(\partial_s \mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \delta \Phi = - \sum_{\alpha=4}^6 \frac{\partial S^P}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (27)$$

(25)和(26)式推导从略<sup>[9]</sup>. (22)和(27)式的推导如下:

$$\begin{aligned} & \partial_s \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= \partial_s \mathbf{F} \cdot \delta_p \mathbf{w} = \sum_{\alpha=1}^3 \partial_s \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \partial_s \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_\alpha} \right) - \mathbf{F} \cdot \partial_s \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \partial_s \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\tilde{\partial} \mathbf{w}'}{\partial q'_\alpha} \right) - \mathbf{F} \cdot \frac{\tilde{\partial} \mathbf{w}'}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \partial_s \left( \frac{\partial S^P}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial S^P}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha, \\ & \rho \partial_t^2 \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \rho \partial_t \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \partial_t \left( \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right) - \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \partial_t \left( \frac{\partial T^P}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T^P}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} (\partial_s \mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \delta \Phi &= (\delta \Phi \times \partial_s \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F} \\ &= (\delta \mathbf{r}' - \tilde{\delta} \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F} \\ &= - \sum_{\alpha=4}^6 \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\tilde{\partial} \gamma}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=4}^6 \frac{\partial S^P}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha, \end{aligned}$$

其中用到了关系

$$\delta \mathbf{r}' - \tilde{\delta} \mathbf{r}' = - \sum_{\alpha=4}^6 \frac{\tilde{\partial} \mathbf{r}'}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha, \quad \frac{\tilde{\partial} \mathbf{r}'}{\partial q_\alpha} = \frac{\tilde{\partial} \gamma}{\partial q_\alpha}.$$

于是, (20)式化作 Euler-Lagrange 形式

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \partial_s \left( \frac{\partial \Lambda^P}{\partial q'_\alpha} \right) + \partial_t \left( \frac{\partial \Lambda^P}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \Lambda^P}{\partial q_\alpha} + f_\alpha \right] \cdot \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=4}^6 \left[ \partial_s \left( \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q'_\alpha} \right) \right. \\ & \quad \left. + \partial_t \left( \frac{\partial \Lambda^r}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial S^P}{\partial q_\alpha} + f_\alpha \right] \cdot \delta q_\alpha \\ &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

式中,  $\Lambda^P = S^P - T^P$ ,  $\Lambda^r = S^r - T^r$ ,  $f_\alpha = \mathbf{s}' \mathbf{f} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial q_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2, 3$ ),  $f_\alpha = \mathbf{s}' \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Xi}_\alpha$ , ( $\alpha = 4, 5, 6$ ). 注意到有关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q'_\alpha} &= 0, \quad \frac{\partial \Lambda^r}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda^r}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3); \\ \frac{\partial \Lambda^P}{\partial q'_\alpha} &= 0, \quad \frac{\partial \Lambda^P}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda^P}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 4, 5, 6). \end{aligned}$$

(28)式可写成

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^6 \left[ \partial_s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) + \partial_t \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} + f_\alpha \right] \\ & \quad \times \delta q_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\Lambda = \Lambda^P + \Lambda^r. \quad (30)$$

为弹性杆动力学的 Lagrange 函数. (29) 式可化作 Nielsen 形式

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^6 \left[ \frac{\partial \Lambda'}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{\Lambda}}{\partial \dot{q}_\alpha} - 3 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} + f_\alpha \right] \cdot \delta q_\alpha = 0. \quad (31)$$

特殊地, 对于除端点外不受力作用的弹性杆平衡时, 动能为零, 即  $T^p = T^r = 0$ , 由矢量形式的平衡微分方程知截面主矢  $\mathbf{F}$  为常矢量, 不失一般性, 设

$$\mathbf{F} = F_0 \mathbf{e}_\zeta, \quad (32)$$

此守恒量不能预先嵌入上面的弹性应变能函数  $S^r$  和  $S^p$ , 但可以证明存在标量函数  $V$ , 使得

$$(\partial_s \mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \delta \Phi = \delta V, \quad (33)$$

其中

$$V = -F_0 \cos \vartheta + F_0^2 \left[ -\frac{1}{8K_1} (\cos(2\vartheta) + 2 \cos(2\varphi) \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{8K_2} (2 \cos(2\varphi) \sin^2 \vartheta - \cos(2\vartheta)) + \frac{1}{4K_3} \cos(2\vartheta) \right]. \quad (34)$$

显然, 当  $K_i \rightarrow \infty$  时, (34) 式与 Kirchhoff 模型一致<sup>[1]</sup> 于是, (29) 式化为

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial S^p}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial S^p}{\partial q_\alpha} \right] \cdot \delta q_\alpha + \sum_{\alpha=4}^6 \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right] \cdot \delta q_\alpha = 0, \quad (35)$$

其中  $U = S^r - V$ . (35) 式是利用守恒量 (32) 式的弹性杆静力学的 d'Alembert-Lagrange 原理.

### 5 弹性杆精确模型的动力学方程及其平衡问题的首次积分

对于除端点外不受约束的自由弹性杆, 广义坐标变分均为独立, 由原理 (20), (29) 和 (31) 式分别导出矢量形式的动力学方程

$$\tilde{\partial}_s \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} - \rho \partial_t^2 \mathbf{r} + (\gamma_3 + 1) \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (36a)$$

$$\tilde{\partial}_s \mathbf{M} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \partial_s \mathbf{r} \times \mathbf{F} - \partial_t (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\gamma_3 + 1) \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (36b)$$

和 Lagrange 方程

$$\partial_s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) + \partial_t \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} + f_\alpha$$

$$= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 6), \quad (37)$$

以及 Nielsen 方程

$$\frac{\partial \Lambda'}{\partial q'_\alpha} + \frac{\partial \dot{\Lambda}}{\partial \dot{q}_\alpha} - 3 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} + f_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 6), \quad (38)$$

(37) 和 (38) 式统一表达了弹性杆动力学的全部方程. 对于受有形如 (14) 式的曲面约束, 导出带乘子的 Lagrange 方程

$$\partial_s \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} \right) + \partial_t \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} + \lambda A_\alpha + f_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 6). \quad (39)$$

从原理 (35) 式导出平衡微分方程

$$\partial_s \left( \frac{\partial S^p}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial S^p}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (40a)$$

$$\partial_s \left( \frac{\partial U}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 4, 5, 6). \quad (40b)$$

讨论 (40) 式的首次积分:

1) 若取  $q_1 = \xi, q_2 = \eta, q_3 = \zeta$ , 则因  $\partial S_p / \partial q_\alpha = 0$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), 从式 (40a) 导出循环积分

$$\frac{\partial S^p}{\partial q'_\alpha} = C_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (41)$$

此积分的力学意义是主矢在惯性坐标轴的分量为常量, 这和平衡的矢量方程结果一致;

2) 若取 Euler 角为姿态坐标, 与 Kirchhoff 模型相同的是, 仍有  $\partial U / \partial \psi = 0$ , 即进动角仍是循环坐标, 从式 (40b) 导出循环积分

$$\frac{\partial U}{\partial \psi'} = C_\psi; \quad (42)$$

3) 因  $S^p, U$  都不显含  $s$ , 存在广义能量积分

$$S_2^p - S_0^p = C^p, \quad (43a)$$

$$S^r + V = C^r, \quad (43b)$$

其中  $S_2^p, S_0^p$  分别是函数  $S_p$  所含的二次和零次导数项,  $C^p, C^r$  为积分常数. (43) 式表明沿杆长方向, 截面因杆变形导致的平移和转动的应变能密度是均匀的.

### 6 弹性杆精确模型的 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程

将 (20) 式乘  $ds \cdot dt$  后再对  $s$  和  $t$  积分, 化作积分变分原理

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left\{ (\mathbf{F} \cdot \tilde{\delta} \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M} \cdot \tilde{\delta} \boldsymbol{\omega}) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \delta v + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} \right] \\
 & + \partial_s \bar{s} (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\Phi}) \Big\} ds dt = 0, \quad (44)
 \end{aligned}$$

其中用到了  $\mathbf{d}-\delta$  交换关系 (9) 式和端点变分条件

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}|_{s=0} &= \delta \mathbf{r}|_{s=L} = 0, \\
 \delta \boldsymbol{\Phi}|_{s=0} &= \delta \boldsymbol{\Phi}|_{s=L} = 0, \quad (45a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}|_{t=t_0} &= \delta \mathbf{r}|_{t=t_1} = 0, \\
 \delta \boldsymbol{\Phi}|_{t=t_0} &= \delta \boldsymbol{\Phi}|_{t=t_1} = 0. \quad (45b)
 \end{aligned}$$

当弹性杆服从线性本构关系 (21), 且不计主动分布力  $\mathbf{f}(s,t)$  和  $\mathbf{m}(s,t)$  时, (44) 式可进一步化作

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \delta \Lambda ds dt = 0, \quad (46)$$

其中  $\Lambda$  已由 (30) 式定义. (46) 式就是弹性杆精确模型动力学的 Hamilton 原理. 直接计算变分, 从原理 (46) 式可以导出方程 (37) 和 (38).

定义正则变量  $q_\alpha$ , 以及

$$p_{s\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha}, \quad p_{t\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, 6)$$

从而解出

$$q_a^{\ddot{}} = q_a(q_a, p_{sa}), \quad \dot{q}_a = \dot{q}_a(q_a, p_{ta}) \quad (\alpha = 1, \dots, 6)$$

定义弹性杆的 Hamilton 函数

$$H(q, p_s, p_t)$$

$$= \left[ \sum_{\alpha=1}^6 \left( q'_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \Lambda \right]_{\substack{q'_\alpha = q'_\alpha(q, p_s) \\ \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q, p_t)}}, \quad (47)$$

直接计算偏导数, 并注意到 (37) 式, 导出弹性杆的 Hamilton 正则方程

$$\begin{aligned}
 \partial_s q_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_{s\alpha}}, \quad \partial_t q_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_{t\alpha}}, \\
 \partial_s p_{s\alpha} + \partial_t p_{t\alpha} &= - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, 6), \quad (48)
 \end{aligned}$$

$3 \times 6$  个变量  $q_\alpha, p_{s\alpha}, p_{t\alpha}$ , ( $\alpha = 1, \dots, 6$ ), (48) 式共有  $3 \times 6$  方程, 方程组封闭. 正则方程 (48) 显示了弹性杆动力学的特殊性, 其相空间是  $3 \times 6$  维.

## 7 结论

基于位形空间上的虚位移定义建立的精确 Cosserat 弹性杆动力学的 d'Alembert-Lagrange 原理, 可以导出 Lagrange 方程和 Nielsen 方程. 建立的 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程保持了其经典形式. 从而将存在不足的 Kirchhoff 弹性杆动力学的分析力学方法推广到计及拉压和剪切变形情形, 使弹性杆的全部动力学方程都表达成分析力学的形式, 完成了分析力学方法对弹性杆动力学的移植. 双自变量特征也为分析力学的进一步研究提出了新的问题.

- |  |  |
|--|--|
| <p>[1] Liu Y Z 2006 <i>Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod—Theoretical Basis of Mechanical Model of DNA</i> (Beijing: Tsinghua University Press, Springer) p1432 (in Chinese) [刘延柱 2006 弹性细杆的非线性力学——DNA 力学模型的理论基础 (北京: 清华大学出版社 Springer) 第 1432 页]</p> <p>[2] Liu Y Z 2003 <i>Mech. Eng.</i> <b>25</b> 1 (in Chinese) [刘延柱 2003 力学与实践 <b>25</b> 1]</p> <p>[3] Ouyang Z C 2003 <i>Physics</i> <b>32</b> 728 (in Chinese) [欧阳钟灿 2003 物理 <b>32</b> 728]</p> <p>[4] Li M, Ouyang Z C 2003 <i>Science</i> <b>55</b> 15 (in Chinese) [黎明, 欧阳钟灿 2003 科学 <b>55</b> 15]</p> <p>[5] Malacinski G M (translated by Wei Q) 2005 <i>Essentials of Molecular Biology</i> (4th Ed.) (Beijing: Chemical Industry Press) p59 (in Chinese) [乔治 M 马拉森斯基著 (魏群译) 2005 分子生物学精要 (北京: 化学工业出版社) 第 59 页]</p> <p>[6] Westcott T P, Tobias I, Olson W K 1995 <i>J. Phys. Chem.</i> <b>99</b> 17926</p> | <p>[7] Pozo Coronado L M 2000 <i>Physica D</i> <b>141</b> 248</p> <p>[8] Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q 2005 <i>Chin. J. Theor. Appl. Mech.</i> <b>37</b> 485 (in Chinese) [薛纭, 刘延柱, 陈立群 2005 力学学报 <b>37</b> 485]</p> <p>[9] Xue Y, Liu Y Z 2006 <i>Acta Phys. Sin.</i> <b>55</b> 3845 (in Chinese) [薛纭, 刘延柱 2006 物理学报 <b>55</b> 3845]</p> <p>[10] Xue Y, Liu Y Z 2006 <i>Chinese Quarterly of Mechanics</i> <b>27</b> 550 (in Chinese) [薛纭, 刘延柱 2006 力学季刊 <b>27</b> 550]</p> <p>[11] Xue Y, Wen D W 2009 <i>Acta Phys. Sin.</i> <b>58</b> 34 (in Chinese) [薛纭, 翁德玮 2009 物理学报 <b>58</b> 34]</p> <p>[12] Xue Y, Shang H L 2009 <i>Chin. Phys. Lett.</i> <b>26</b> 074501</p> <p>[13] Zhao W J, Weng Y Q, Fu J L 2007 <i>Chin. Phys. Lett.</i> <b>24</b> 2773</p> <p>[14] Wang P, Xue Y, Liu Y L 2012 <i>Chin. Phys. B</i> <b>21</b> 070203</p> <p>[15] Cao D Q, Tucker R W 2008 <i>Int. J. Solids Struct.</i> <b>45</b> 460</p> <p>[16] Xue Y, Weng D W, Chen L Q 2009 <i>Chinese Quarterly of Mechanics</i> <b>30</b> 116 (in Chinese) [薛纭, 翁德玮, 陈立群 2009 力学季刊 <b>30</b> 116]</p> <p>[17] Xue Y, Weng D W 2011 <i>Mech. Eng.</i> <b>33</b> 65 (in Chinese) [薛纭, 翁德玮 2011 力学与实践 <b>33</b> 65]</p> |
|--|--|

# Methods of analytical mechanics for exact Cosserat elastic rod dynamics\*

Xue Yun<sup>1)†</sup> Weng De-Wei<sup>1)2)</sup> Chen Li-Qun<sup>2)</sup>

1) (School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

2) (Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

(Received 11 July 2012; revised manuscript received 29 August 2012)

## Abstract

Thin elastic rod mechanics with background of a kind of single molecule such as DNA and other engineering object has entered into a new developing stage. In this paper the vector method of exact Cosserat elastic rod dynamics is transformed into the form of analytical mechanics with the arc length and time as its independent variables, whose aims are to find new tools for studying rod mechanics and to develop the area of applications of classical analytical mechanics. Based on the plane cross-section assumption, a cross-section of the rod is taken as an object. Basic formulas on deformation and motion of the section are given. After defining virtual displacement of a cross-section and its equivalent variation rule, a differential variational principle such as d'Alembert-Lagrange one is established, from which dynamical equations of thin elastic rod are expressed as Lagrange equations or Nielsen equations under the condition of linear elasticity of the rod. For the rod statics when there exist conserved quantities, Lagrange equation which makes use of these quantities is derived and its first integral is discussed. Finally integral variational principle is derived from differential one, and expressed as Hamilton principle under the condition of linear elasticity. Hamilton canonical equations in phase space with  $3 \times 6$  dimensions are also derived. All of the results have formed the method of analytical mechanics of dynamics of an exact Cosserat elastic rod, so that the further problems such as symmetry and conserved quantities, and numerical simulation of the rod dynamics may be further studied.

**Keywords:** an exact Cosserat elastic rod, analytical dynamics, variational principle, Lagrange equation Hamilton principle

**PACS:** 46.70.Hg, 45.20.Jj, 45.10.Db

**DOI:** 10.7498/aps.62.044601

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972143) and the Key Disciplines Chemical Process Machinery of Shanghai Institute of Technology, China (Grant No. 1020Q101201).

† Corresponding author. E-mail: xy@sit.edu.cn