二维玻色 - 爱因斯坦凝聚中孤立波的调制不稳定性*

张恒 段文山†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2012年8月27日收到; 2012年9月4日收到修改稿)

研究了盘状势阱中二维玻色 - 爱因斯坦凝聚 (BEC) 的孤立波. 在平均场理论下, 由 BEC 所满足的 Gross-Pitaevkii 方程出发导出了二维 BEC 所满足的非线性 Schrödinger 方程. 从该方程出发, 研究单组分常振幅二维 BEC (单组分常振幅 BEC) 的调制不稳定性, 得到了该系统相应的增长率.

关键词: 孤子, 不稳定性, 玻色 - 爱因斯坦凝聚

PACS: 47.35.Fg, 42.81.Dp, 03.75.Kk **DOI:** 10.7498/aps.62.044703

1 引 言

自从 1995 年玻色 - 爱因斯坦凝聚在碱金属原子中实现以来, 人们在实验和理论方面对它做了大量的研究 [1−13]. 这些研究工作又一次燃起了人们对这一物态的研究兴趣 [14,15], 其中一个令人极其感兴趣的问题是玻色 - 爱因斯坦凝聚 (BEC) 的动力学行为 [16−18] 研究. 在零温极限情况下, 所有原子都发生凝聚, 这使得体系很自然地可以用平均场下的 Gross-Pitaevskii (GP)[19] 方程来描述. 并且在该理论下还发现了 BEC 系统所满足的 Korteweg-de Vries (KdV) 方程和暗孤子 [20−24]. 众所周知, 在很多物理研究领域内都发现了孤子, 比如尘埃等离子体 [25,26]、激光等离子体 [27]、BEC 系统 [28−31]、二维系统 [32] 等.

自从在 BEC 系统中发现孤子以来, 调制不稳定性是孤子研究 [33] 中的一个有趣的问题. 可以确定的是对于单组分 BEC 系统的稳定性可用标记原子之间相互作用的方法来惟一确定. 由于原子的相互作用 [34,35], 在原子数目的最大临界值以内凝聚是稳定的. 因为有外部原子源的存在, 当原子数目超过最大临界值时, 由于 BEC 内的原子相互作用半径趋于零导致中心凝聚密度区域无穷大. 因此, 凝聚开始塌缩发射出原子, 直到原子数目减少到临界值以下结构达到稳定. 然后凝聚物又开始堆积, 一系列的塌缩也伴随发生.

继文献 [33] 的研究工作之后, 我们给出一种处理 GP 方程以及从二维非线性 Schrödinger 方程 (NLSE) 出发去描述 BEC 中孤立波的方法, 并得出了色散关系的显示式, 同时, 还解析研究了单组分常振幅 BEC (TBEC) 的调制不稳定性.

2 二维非线性 Schrödinger 方程的导出

假设用波函数来描述粒子数为 N 具有相同量子态的凝聚气体. 在低温情况下, 具有弱相互作用的玻色气体的动力学行为可以用含时的 Gross-Pitaevskii 方程来描述, 写出序参量 [36]

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{\mathrm{ext}}+U_0|\Psi|^2\right]\Psi, \qquad (1)$$

这里的 $U_0=4\pi\hbar^2a_{\mathrm{s}}/m$ 是相互作用常数, a_{s} 是原子间 s 波散射长度 (具有排斥相互作用的系统 $a_{\mathrm{s}}>0$), m 为原子质量. 假设粒子被限制在具有盘状势 $V_{\mathrm{ext}}=m[\omega_{\perp}^2(x^2+y^2)+\omega_z^2z^2]/2$ 的阱中, $\omega_{\perp}$ 代表 x 轴或 y 轴的横向频率, ω_z 为 z 方向的势阱频率. 为了方便变量无量纲化, 规定 $x=[\hbar/(m\omega_z)]^{1/2}\xi$, $y=[\hbar/(m\omega_z)]^{1/2}\eta$, $z=[\hbar/(m\omega_z)]^{1/2}\zeta$, $t=(\omega_z)^{-1}\tau$.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11275156) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: duanws@126.com

将这些变量带入方程 (1) 中则有

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=&-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}\right]\\&+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\omega_\perp}{\omega_z}\right)^2(\xi^2+\eta^2)+\zeta^2\right]\Psi\\&+\frac{U_0}{\hbar\omega_z}|\Psi|^2\Psi.\end{aligned}\tag{2}$$

由于盘状势 $\omega_\perp/\omega_z$ 非常小, 因此 $(\omega_\perp/\omega_z)^2$ 可以被忽略. 然后有:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=&-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}\right]\\&+\frac{1}{2}\zeta^2\Psi+\frac{U_0}{\hbar\omega_z}|\Psi|^2\Psi.\end{aligned}\tag{3}$$

假设势阱的 x 轴和 y 轴是相互垂直的, 可以把波函数写成 $\Psi=f(\xi,\eta,\tau)g(\zeta)$, $g(\zeta)$ 满足

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{2}\zeta^2g=\nu g,\tag{4}$$

方程 (4) 就是大家熟知的一维量子谐振子本征方程, 它的基态解的形式为 $g_0=\exp(-\zeta^2/2)$, 对应的本征值为 $\nu=1/2$. 将波函数的表达式代入方程 (3), 并乘以 g^* 可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial\tau}=&-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right]\\&+\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{2}\zeta^2g\right]g^*f\\&+\frac{U_0}{\hbar\omega_z}|g|^2|f|^2f.\end{aligned}\tag{5}$$

将方程 (4) 代入方程 (5), 得到如下形式:

$$\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial\tau}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right]+\nu f+\frac{U_0}{\hbar\omega_z}|g|^2|f|^2f.\tag{6}$$

通过如下的变换

$$f=w(\xi,\eta,\tau)\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_z+\mu)t\right]\tag{7}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial w}{\partial\tau}=&-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right]-\left[1+\frac{\mu}{\omega_z}-\nu\right]w\\&+\frac{U_0}{\hbar\omega_z}|g|^2|w|^2w.\end{aligned}\tag{8}$$

给方程 (8) 左右同乘 $\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}$, 让方程 (4) 中 $g=g_0$ 并代入方程 (8) 中, 对 ζ 积分一次以消除方程对 ζ 的依赖, 得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial w}{\partial\tau}+A|w|^2w+B\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+C\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+Dw=0,\tag{9}$$

其中

$$\begin{cases}A=-\dfrac{4\sqrt{3}\pi\hbar a_\mathrm{s}}{3m\omega_z},\\B=1/2,\\C=1/2,\\D=\dfrac{\omega_z+2\mu}{2\omega_z},\end{cases}$$

这里的 μ 是化学势.

3 TBEC 的调制不稳定性

这一部分将研究 TBEC 的调制不稳定性. 将方程 (9) 中的振幅 w 分成如下的两部分:

$$w=(w_0+\delta w)\exp(\mathrm{i}\varphi\tau),\tag{10}$$

其中 w_0 是孤立波的常实振幅, δw ($\delta w\ll w_0$) 是小振幅微扰, φ 是非线性频移. 把方程 (10) 代入方程 (9) 中并保留零阶项和一阶项 (线性化), 得到

$$\varphi=A|w_0|^2+D,\tag{11}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial\delta w}{\partial\tau}+A|w_0|^2\left[\delta w+\delta w^*\right]+B\frac{\partial^2\delta w}{\partial\xi^2}+C\frac{\partial^2\delta w}{\partial\eta^2}=0,\tag{12}$$

这里的 δw^* 是 δw 的复共轭. 把 $\delta w=X+\mathrm{i}Y$ 代入方程 (12) 中, 并将实部和虚部分开, 得到如下耦合方程:

$$-\frac{\partial Y}{\partial\tau}+2A|w_0|^2X+B\frac{\partial^2X}{\partial\xi^2}+C\frac{\partial^2X}{\partial\eta^2}=0,\tag{13}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\tau}+B\frac{\partial^2Y}{\partial\xi^2}+C\frac{\partial^2Y}{\partial\eta^2}=0.\tag{14}$$

假设振幅微扰 $\delta w=X+\mathrm{i}Y$, 其中

$$X=X_0\exp[\mathrm{i}(K_\xi\xi+K_\eta\eta+\Omega\tau)],\tag{15}$$

$$Y=Y_0\exp[\mathrm{i}(K_\xi\xi+K_\eta\eta+\Omega\tau)],\tag{16}$$

这里的 Ω 是调制波的频率. K_ξ 和 K_η 分别为 ξ 和 η 方向的调制波数. 用方程 (15) 和 (16) 可以得到非线性色散关系

$$\Omega^2=(BK_\xi^2+CK_\eta^2)(BK_\xi^2+CK_\eta^2-2A|w_0|^2).\tag{17}$$

由方程 (17) 可以推断, 如果满足如下条件: 1) $B>0$, $C>0$ 且 $A<0$; 2) $B<0$, $C<0$ 且 $A>0$, $\Omega^2>0$. 对于以上条件, Ω 是实数, 所以孤立波是稳定的. 上文中考虑的条件 $B=C=1/2>0$, $A=-\dfrac{4\sqrt{3}\pi\hbar a_\mathrm{s}}{3m\omega_z}<0$,

对于 $a_s > 0$ 所对应的原子间相互作用力为斥力, 因此 TBEC 的孤立波是稳定的. 相反, 如果 $\Omega^2 < 0$, Ω 是虚数, 那么 TBEC 的孤立波是不稳定的. 这样看来是存在调制不稳定的条件.

为简单起见, 令 $K_\eta = 0$, 那么微扰振幅只在 ξ 方向上. 鉴于这种情况, 方程 (17) 的色散关系可以被重新写作 $\Omega^2 = B^2K_\xi^2[K_\xi^2 - 2(A/B)|w_0|^2]$. 因此, 满足条件 1) $BA < 0$, 2) $BA > 0$ 但 $K_\xi^2 > 2(A/B)|w_0|^2$ 时, TBEC 中的孤立波是调制不稳定的. 这样看来, 孤立波的稳定性依赖于 A/B 的符号. 当波数 K_ξ 满足 $K_\xi^2 < 2(A/B)|w_0|^2$, 如果 B 和 A 同号, TBEC 中的孤立波是调制不稳定的. 当原子间相互作用了为引力, $a_s < 0, AB > 0$ 时, 如果 $K_\xi^2 < 2(A/B)|w_0|^2$, 孤立波是不稳定的, 然而如果 $K_\xi^2 > 2(A/B)|w_0|^2$, 孤立波是稳定的. 因此, 对于原子间相互作用力为斥力, $a_s > 0$, $AB < 0$ 时, 对于所有条件孤立波都是调制稳定的.

由条件 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}K_\xi = 0$, 可以找到增长率的最大值. 当 $K_\xi = \sqrt{|A/B|}|w_0|$ 时, 与增长率最大值相应的频率可由 $\gamma_{\max} = |A||w_0|^2$ 得到. 如果 $K_\xi = 0$, 微扰振幅只在 η 方向存在. 那么方程 (17) 的色散关系可以重新写作 $\Omega^2 = C^2K_\eta^2[K_\eta^2 - 2(A/C)|w_0|^2]$. 对于以上条件可以类似地做稳定性分析.

4 结 论

本文由 GP 方程出发, 推导出了二维 Schrödinger 方程. 研究了 TBEC 中孤立波的调制不稳定性. 研究发现, $a_s > 0$ 对于任何条件孤立波都是调制稳定的. 而对于条件 $a_s < 0$, 孤立波在 $K^2 > 2(A/B)|w_0|^2$ 和 $K^2 < 2(A/B)|w_0|^2$ 情况下分别为稳定和不稳定. 同时, 如果扰动的波数足够大, 那么波是稳定的, 否则是不稳定的.

[1] Wen W, Shen S Q, Huang G X 2010 *Phys. Rev.* B **81** 014528

[2] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [臧小飞, 李菊萍, 谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]

[3] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev.* A **73** 13619

[4] Li S C, Fu L B, Duan W S, Liu J 2008 *Phys. Rev.* A **78** 063621

[5] Wen W, Huang G X 2009 *Phys. Rev.* A **79** 023605

[6] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]

[7] Madison K, Chevy F, Bretin V, Dalibard J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 806

[8] Svidzinsky A A, Fetter A L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5919

[9] Jochin S, Bartenstein M, Altmeyer A, Hendl G, Hecker Denschlag J, Grimm R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **91** 240402

[10] Wang G F, Fu L B, Liu J 2006 *Phys. Rev.* A **73** 13619

[11] Liu J, Wu B, Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404

[12] Wu Y, Yang X X 2003 *Phys. Rev.* A **68** 013608

[13] Hu B B, Huang G X, Ma Y L 2004 *Phys. Rev.* A **69** 063608

[14] Legget A J 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 1083

[15] Trombettoni A, Smerzi A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2353

[16] Gerton J M, Strekalov D, Prodan I, Hulet R G 2001 *Nature* **408** 692

[17] Men F D, Liu H, Fan Z L, Zhu H Y 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2649

[18] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Chin D, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev.* A **66** 023404

[19] Bradley C C, Sackett C A, Hulet R G 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 985

[20] Huang G X 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 628

[21] Yang X X, Shi Y R, Duan W S 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 119

[22] Hang G X, Zhu S H 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 17

[23] Duan W S, Chen J H, Yang H J, Shi Y R, Wang H Y 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2000

[24] Song S W, Wang D S, Wang H Q, Liu W M 2012 *Phys. Rev.* A **85** 063617

[25] Liang G Z, Han J N, Lin M M, Wei J N, Duan W S 2009 *Phys. Plasmas* **16** 073705

[26] Jiang X, Gao X Y, Li S C, Shi Y R, Duan W S 2009 *Appl. Math. Comp.* **214** 60

[27] Tian D X, He G J, Han J N, Duan W S 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 529

[28] Li S C, Han J N, Duan W S 2009 *Physica* B **404** 1235

[29] Li S C, Duan W S 2008 *Commun. Theor. Phys.* **50** 655

[30] Li B, Zhang X F, Li Y Q, Chen Y, Liu W M 2008 *Phys. Rev.* A **78** 023608

[31] Hu X H, Zhang X F, Zhao D, Luo H G, Liu W M 2009 *Phys. Rev.* A **79** 023619

[32] Han J N, Du S L, Duan W S 2008 *Phys. Plasmas* **15** 112104

[33] Duan W S, Parkes J, Zhang L 2004 *Phys. Plasmas* **11** 3762

[34] Gammal A, Frederico T, Tomio L, Chomaz P 2000 *Phys. Rev.* A **61** 051602

[35] Kagan Y, Muryshev A E, Shlyapnikov G V 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 933

[36] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463

[37] Duan W S, Parkes J, Lin M M 2005 *Phys. Plasmas* **12** 022106

The modulational instability of the solition wave in two-dimensional Bose-Einstein condensates*

Zhang Heng Duan Wen-Shan†

(*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070*, China*)

(Received 27 August 2012; revised manuscript received 4 September 2012)

Abstract

The solition wave in Bose-Einstein condensate with disk-shaped trap is investigated in this paper. Beyond the mean field, a two-dimensional nonlinear Schrödinger equation is obtained. The modulational instability for this system is studied analytically, and the growth rate for it is given.

Keywords: soliton, instability, Bose-Einstein condensate

PACS: 47.35.Fg, 42.81.Dp, 03.75.Kk **DOI:** 10.7498/aps.62.044703

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11275156).

† Corresponding author. E-mail: duanws@126.com